উচ্চ মাধ্যমিক বীজগণিত

নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর জন্য

শ্রীভুপেন্দ্রচন্দ্র দাস
শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়

C/11

DAS GUPT

3212

উচ্চ-মাধ্যমিক বীজগণিত

(নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর জন্য)

প্রেসিডেন্সী কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস, এম. এস্‌-সি.

ও

স্কটিশচার্চ কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়, এম. এ.

প্রেমচাঁদ রায়চাঁদ স্কলার

প্রণীত

S.C.E.R.T., West Bengal
Library
Calcutta
25/3, B. C. Road

ইউ. এন্‌. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ

১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা ১২

EVALUATION UNIT LIBRARY

প্রকাশক :
শ্রীদ্বিজেন্দ্রনাথ ধর, বি.এল.
ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ
১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট,
কলিকাতা ১২

[গ্রন্থকারগণ কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

S.C.E.R.T., West Bengal
Date 28-3-85
Acc. No. 3212

EVALUATION UNIT LIBRARY
DAVID HARE TRAINING
COLLEGE.
CALCUTTA-19
Acc. No. 0070
Date 30 MAR 1965
Call No. B 512 D314

মুদ্রক :
শ্রীত্রিদিবেশ বসু
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন,
কলিকাতা ৬

সূচীপত্র

HIGHER SECONDARY SYLLABUS OF ELECTIVE MATHEMATICS : ALGEBRA

(Course for Class IX)

The Remainder Theorem, Divisibility (factor theorem) ; Harder Factors, Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative indices not being required) ; Surds ; Involutions and Evolutions ; Simple Simultaneous Equations and Problems with two or more variables ; Quadratic Equations ; Graphical Solutions.

(Course for Class X)

Elementary ideas of elimination ; A. P. and G. P. (Finite series), H. P. (definition only) ; Variations ; Logarithms (*Note* : Use of slide rule may be encouraged) ;

Irrational quantities ; Complex numbers and their geometrical representation ; Simultaneous equation in two unknowns of which one is quadratic and the other linear.

(Course for Class XI)

Theory of Quadratic Equations and Expressions ; Permutation and Combination ; Binomial Theorem for positive integral index.

Elementary idea of an infinite series in connection with infinite geometric series ; The use of the expansion of $(1+x)^n$ where n is fractional or negative (proof for the establishment of this expansion is not required but the restriction on the value of x should be known) ; Definition of e as an infinite series ; Direct application of the series for e^x, $\log_e (1+x)$ (proofs for the establishment of these are not required but restrictions on the values of x, if any, should be known).

Acquaintance with graphs of x^n (n is a positive integer), $\log_e x$, e^x.

SOME IMPORTANT FORMULÆ AND RESULTS

1. ভাগশেষ প্রতিজ্ঞা ও বিভাজ্যতা **(Remainder Theorem and Divisibility) :**

$$\frac{f(x)}{x-a}=(x-a)\,Q(x)+R\ ;\ R=f(a)$$

2. দুরূহ উৎপাদক **(Harder factors) :**

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

(ii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

(iii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

(iv) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(bc+ca+ab)(a+b+c).$

(v) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

(vi) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

(vii) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$

(viii) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

(ix) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c).$$

3. সূচকতত্ত্ব (Law of Indices) :

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$. (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

(iii) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$. (iv) $a^n \times b^n = (ab)^n$.

(v) $a^0 = 1$. (vi) $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. (vii) $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$.

(viii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

4. উদ্ঘাতন (Involution) :

(i) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$.

(ii) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b)$.

5. করণী (Surds) :

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

(ii) যদি $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ হয়, তবে $a = c$ এবং $b = d$.

যদি $a \pm \sqrt{b} = 0$ হয়, তবে $a = 0$ এবং $b = 0$.

(iii) যদি $a^2 - b$ ধনাত্মক পূর্ণবর্গ হয়, তবে

$$(a \pm \sqrt{b})^{\frac{1}{2}} = \pm\{\sqrt{\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - ab})} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - ab})}\}.$$

6. মূলাকর্ষণ (Evolution) :

(i) বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম § 6·2 দেখ।

(ii) ঘনমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম § 6·4 দেখ।

7. সরল সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equation of First Degree) :

If $a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

8. দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations) :

(i) যদি $ax^2 + bx + c = 0$ হয়, তবে

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) যদি α, β ; $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তবে

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \; ; \; \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

9. অপনয়ন (Elimination) :

(i) যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ হইতে x অপনয়ন করা হয় তবে

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2.$$

(ii) যদি $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3z=0$ হইতে x, y, z অপনয়ন করা হয় তবে

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

10. প্রগতি (Progression) :

I. (i) সমান্তর-শ্রেণীর n-তম পদ, $l=a+(n-1)d$, $a=$ প্রথম পদ, $d=$ সাধারণ অন্তর, $n=$ পদসংখ্যা।

(ii) n-পদ বিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীর যোগফল

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

(iii) প্রদত্ত দুই রাশির সমান্তর-মধ্যক, $A=\frac{1}{2}(a+b)$.

II. (i) গুণোত্তর-শ্রেণীর সাধারণ পদ, $l=ar^{n-1}$, $a=$ প্রথম পদ, $r=$ সাধারণ অনুপাত, $n=$ পদসংখ্যা।

(ii) গুণোত্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\ (r<1)$$

$$=\frac{a(r^n-)}{r-1}\ (r>1).$$

(iii) নির্দিষ্ট দুই রাশির গুণোত্তর-মধ্যক $G=\sqrt{ab}$.

III. (i) দুইটি রাশির বিপরীত মধ্যক, $H=\frac{2ab}{a+b}$.

উল্লেখযোগ্য $AH=G^2$ এবং $A>G>H$.

IV. (i) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

(ii) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

(iii) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(iv) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$.

V. (i) $a+ar+ar^2+\cdots\infty$ পর্যন্ত $=\frac{a}{1-r}\ r<1$.

11. লগারিদ্‌ম (Logarithm) :

(i) যদি $a^x = N$ হয়, তবে $x = \log_a N$.

(ii) $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$.

(iii) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$.

(iv) $\log_a (m)^n = n \log_a m$. (v) $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$.

(vi) $(\log_b a) \times (\log_a b) = 1$. (vii) $\log_a a = 1$.

(viii) $\log_a 1 = 0$.

(ix) $\log_a 0 = -\infty$ যদি $a > 1$ হয়,
$= +\infty$ যদি $o < a < 1$ হয়।

(x) $\log_e 10 = 2{\cdot}3048$, $\log_{10} e = {\cdot}4343$.

12. ভেদ (Variation) :

(i) $A \propto B$ হয় এবং $B \propto C$ হয়, তবে $A \propto C$ হইবে।

(ii) যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$ হয়, তবে $A \pm B \propto C$
এবং $\sqrt{AB} \propto C$ হইবে।

(iii) যদি $A \propto B$ হয় এবং $C \propto D$ হয়, তবে $AC \propto BD$ এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

(iv) যদি $A \propto B$ হয় এবং $A \propto C$ হয়, তবে $A \propto B - C$ হইবে।

(v) যদি $A \propto BC$ হয়, তবে $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$ হইবে।

(vi) যদি $A \propto B$ যখন C ধ্রুবক এবং $A \propto C$ যখন B ধ্রুবক তাহা হইলে $A \propto BC$ হইবে, যখন B, C উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

13. কাল্পনিক রাশি ও জটিল রাশি (Imaginary and Complex quantities) :

(i) $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$.

(ii) যদি $a + ib = c + id$, তাহলে $a = c$ এবং $b = d$.

(iii) যদি $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ হয়,

(a) z_1 এর শুদ্ধ মান $= |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

(b) z_1 এর বিস্তার $=$ amp. $z_1 = \tan^{-1} \frac{y_1}{x_1}$.

(c) $|z_1 \pm z_2| = |z_1| + |z_2|$. (d) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$.

(e) amp. $(z_1z_2)=$ amp. z_1+ amp. z_2.

(f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$. (g) amp. $\frac{z_1}{z_2}=$ amp. z_1- amp. z_2.

14. দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালা তত্ত্ব (Theory of Quadratic Equations and Expressions) :

(i) $ax^2+bx+c=0$ ও $a'x^2+b'x+c'=0$ একটি সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$.

(ii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ কে দুইটি একঘাত-বিশিষ্ট গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিবার শর্ত $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

15. বিন্যাস ও সমবায় (Permutations and Combinations) :

I. (i) ${}^nP_n=\lfloor n=1.2.3....n$. (ii) $\lfloor 0=1$. (iii) $\frac{1}{\lfloor -n}=0$.

(iv) ${}^nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}=n(n-1)(n-2)....(n-r+1)$.

(v) ${}^nP_r={}^{n-1}P_r+r.{}^{n-1}P_{r-1}$.

II. (i) ${}^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$. (ii) ${}^nC_0=1$. (iii) ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

(iv) ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$.

(v) ${}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots\cdots+{}^nC_n=2^n-1$.

(vi) ${}^nC_r=\frac{n-r+1}{r}\times{}^nC_{r-1}=\frac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1}$.

16. দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) :

(i) n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

(a) $(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}.a+{}^nC_2x^{n-2}.a^2+\cdots\cdots$

$+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots\cdots+{}^nC_na^n$

$=x^n+nx^{n-1}.a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\cdots\cdots+a^n$.

(b) $(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\cdots+x^n$

$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots\cdots+x^n$.

(ii) $(a+n)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদ

$={}^nC_r\,a^{n-r}\,x^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}.x^r$.

(iii) $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যবর্তী পদ

$$= {}^nC_{n-1}\, a^{\frac{n-1}{2}} . x^{\frac{n+1}{2}} \text{ ও } {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}}$$

[n অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে]

$$= {}^nC_{\frac{n}{2}}\, a^{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{n}{2}}$$ [n যুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে]

(iv) $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$ বৃহত্তম সহগের জন্য § 19·7 দেখ।

(v) n যদি ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হয়, তবে

(a) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত। [x এর চিহ্ন-বিবর্জিত মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর]

(b) $(r+1)$-তম পদ $= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} x^r.$

(vi) $1 - x + x^2 - \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত $= (1+x)^{-1}$.

(vii) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত $= (1+x)^{-2}$.

(viii) $1 + 3x + 6x^2 + 4x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত $= (1-x)^{-3}$.

অন্যান্য বিস্তৃতির জন্য § 20·3 দেখ।

17. সূচকশ্রেণী (Exponential series) :

(i) x এর সকল মানের জন্য

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(ii) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

(iii) $a^x = 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

18. লগারিদ্‌ম-শ্রেণী (Logarithm series) :

x এর সাংখ্যমান < 1, $(-1 < x < 1)$ হইলে,

(i) $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

(ii) $\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

পরিভাষা

অক্ষ axis
অখণ্ড integral [number
অখণ্ড ধনসংখ্যা integral positive
অনুবন্ধী করণী conjugate surd
অনুবন্ধী জটিল রাশি conjugate complex quantities
অনুসিদ্ধান্ত corollary
অপনয়ন elimination
অপনীতক eliminant
অপসারী divergent
অপসারী অসীম শ্রেণী infinite divergent series
অপেক্ষক function
অবম, সর্বনিম্ন minimum
অভিসারী convergent
অভিসারী অসীম শ্রেণী infinite convergent series
অভেদ identity
অমূলদ সংখ্যা irrational number
অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম antilogarithm
অসদৃশ করণী dissimilar surd
অংশক mantissa
আরগাণ্ডীয় সমতল Argand's plane
আরোহ পদ্ধতি method of induction
উদ্‌ঘাতন বা ঘাত-উন্নয়ন involution
একপদ-বিশিষ্ট monomial
করণী surd [surds
করণী নিরসন rationalisation of
করণী-নিরশক rationalising
করণীর ক্রম order of a surd
কলন-শাস্ত্র calculus
কাল্পনিক রাশি imaginary quantity
কোটি ordinate
গতিলেখ motion-graph
গুণোত্তর মধ্যক geometric mean
গুণোত্তর শ্রেণী geometric series or geometrical progression
ঘনমূল cube root [of the person
ঘাতের অধঃক্রম descending order
চক্রক্রম cyclic order
চতুর্ঘাত করণী biquadratic surd
চরম, সর্বোচ্চ maximum
চল variable
জটিল রাশি complex quantity
জটিল সমতল complex plane
ত্রিঘাত করণী cubic surd
ত্রিপদ রাশি trinomial expression
দোলায়মান শ্রেণী oscillating or periodic divergent series
দ্বিঘাত করণী quadratic surd
দ্বিঘাত রাশিমালাতত্ত্ব theory of quadratic expressions
দ্বিঘাত সমীকরণ quadratic equation
দ্বিঘাত সমীকরণ-তত্ত্ব theory of quadratic equations
দ্বিপদ উপপাদ্য binomial theorem
দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী binomial quadratic surd
দ্বিপদ রাশি binomial expression
ধ্রুবক constant
নিধান base
নির্বাচন selection
পদ, রাশি term
পরিবর্তক লেখ conversion graph
পূরক করণী complementary surd
পূর্ণক characteristic
পূর্ণ করণী complete surd
পূর্ণ বর্গ perfect square
প্রগতি progression
প্রাকৃত বা নেপিরীয় লগারিদ্‌ম natural or Napierian logarithm

বজ্রগুণন প্রণালী method of cross-multiplication
বর্গ অনুপাত duplicate ratio
বর্গমূল square root [expression
বহুপদ রাশি multinomial
বাতিল বিন্দু null point
বিচ্ছেদ নিয়ম distributive law
বিনিময় নিয়ম commutative law
বিন্যাস permutation [progression
বিপরীত প্রগতি harmonic
বিপরীত প্রগতি মধ্যক বা বিপরীত মধ্যক harmonic mean
বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক inverse circular function
বিভাজ্যতা বা গুণনীয়ক উপপাদ্য divisibility or factor theorem
বিশুদ্ধ বা অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ pure quadratic equation
বিস্তার amplitude
বিস্তৃতি expansion
বীজ-নিরূপক discriminant
ব্যস্তভেদ inverse variation
ভাগ graph, division [theorem
ভাগশেষ প্রতিজ্ঞা remainder
ভুজ abscissa, side
ভেদ variation
ভেদ-ধ্রুবক variation constant
মডিউলাস্ modulus
মিশ্র করণী mixed surd
মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ adfected quadratic equation
মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক rational and integral algebraic function, polynomial
মূলদ সংখ্যা rational number
মূল বিন্দু origin
মূলাকর্ষণ evolution
মূল্য-লেখ price-graph [argument
যুক্তি (চল রাশির স্বল্প পরিবর্তন)
যৌগিক করণী compound surd
যৌগিক ভেদ joint variation
রাশিমালার লেখ graph of an expression
লগারিদ্‌ম logarithm
লগারিদ্‌ম শ্রেণী logarithmic series
লেখ graph
শুদ্ধ মান absolute value
শুদ্ধ করণী pure surd
শ্রেণী series
সচল sliding
সদৃশ করণী like or similar surd
সমবায় combination
সমমূলীয় করণী equiradical surd
সমানুপাতিক অংশসম্পর্কীয় তথ্য principle of proportional parts
সমান্তর-মধ্যক arithmetic mean
সমান্তর শ্রেণী বা প্রগতি arithmetic series ; arithmetical progression
সমীকরণের লেখ graph of an equation
সরল করণী simple surd
সরল সহ-সমীকরণ simultaneous equations of the first degree
সংযোগ নিয়ম associative law
সাধারণ অন্তর common difference
সাধারণ পদ general term
সূচক index
সূচকতত্ত্ব theory of indices
সূচক সমীকরণ exponential equation
স্থানাঙ্ক co-ordinate
স্বাভাবিক সংখ্যা natural numbers

উচ্চ-মাধ্যমিক বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা ও বিভাজ্যতা
(Remainder Theorem and Divisibility)

1·1. সংজ্ঞা।

গণিতে অনেক সময় আমাদিগকে বীজগণিতীয় অক্ষর-সংবলিত রাশিমালা ব্যবহার করিতে হয়। এই অক্ষরগুলি সংখ্যা নির্দেশ করে। কতক ক্ষেত্রে এই সংখ্যাগুলির মান নির্দিষ্ট বা অপরিবর্তনীয়। আবার, কতক ক্ষেত্রে ইহাদের মান পরিবর্তনশীল, অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা হইতে পারে। উদহরণস্বরূপ, আমরা যদি r অক্ষর দ্বারা কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দেশ করি, তবে πr^2 উহার ক্ষেত্রফল। এখানে ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের ক্ষেত্রে r-এর মান ভিন্ন ভিন্ন, কিন্তু π একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা। এই সূত্রে নিম্নে কতকগুলি সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

চল (Variable) :

যে সকল রাশির মান গাণিতিক কার্যকলাপে পরিবর্তিত হয় এবং যাহা ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা দ্বারা সূচিত করা যায়, সেই সকল রাশিকে চলরাশি বা সংক্ষেপে **'চল'** (variable) বলে। চলরাশিকে সাধারণতঃ ইংরাজী বর্ণমালার শেষের অক্ষর x, y, z প্রভৃতির দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ধ্রুবক (Constant) :

আবার, যে সকল রাশির মান গাণিতিক কার্যকলাপে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যায় নিবদ্ধ থাকে এবং উহার কোন পরিবর্তন ঘটে না, সেই সকল রাশিকে **'ধ্রুবক'** (constant) বলে। নির্দিষ্ট সংখ্যা ব্যতীত অন্যান্য ধ্রুবকরাশি সাধারণতঃ ইংরাজী বর্ণমালার আদ্যক্ষর a, b, c, ... প্রভৃতি দ্বারা নির্দেশ করা হইয়া থাকে।

অপেক্ষক (Function)

x, y, ... প্রভৃতি এক বা একাধিক চলরাশি-নির্দেশক অক্ষরযুক্ত রাশিমালাকে ঐ চল বা চলগুলির **অপেক্ষক** (function) বলে। বলা বাহুল্য, প্রত্যেক

অপেক্ষকের মান উহার অন্তর্গত চল বা চলগুলির উপর নির্ভরশীল। যথা, $5x^3-3x^2+7x-2$ রাশিমালা x-এর অপেক্ষক এবং $3x^2-7xy+5y^2$ রাশিমালা x এবং y-এর অপেক্ষক।

একটিমাত্র চল x-এর অপেক্ষককে $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ প্রভৃতি যে কোন একটি চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। অনুরূপভাবে, x, y-এর অপেক্ষককে $f(x, y)$, $F(x, y)$, $\phi(x,y)$ প্রভৃতি চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। যথা,

$$f(x)=3x^2+2x+1$$
$$F(x, y)=4x^3+3x^2y-2xy^2+y^3-5 \text{ ইত্যাদি।}$$

x-চলের যদি আমরা কোন নির্দিষ্ট মান দিই, ধর 2, তবে x-এর উপর নির্ভরশীল কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর অনুরূপ মান সাধারণতঃ $f(x)$ অপেক্ষকে x-এর পরিবর্তে 2 বসাইলে পাওয়া যাইবে, এবং অপেক্ষকের এই মান সংক্ষেপে $f(2)$ দ্বারা সূচিত হয়।

যদি $f(x)=ax^2+bx+c$ হয়,
তবে $f(2)=a.2^2+b.2+c=4a+2b+c$ হইবে
এবং $f(a)=aa^2+ba+c$ হইবে।

মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক (Rational and Integral Algebraic Function or Polynomial) :

কোন চলরাশির অপেক্ষকের বিভিন্ন পদে চলরাশির ঘাতের সূচকগুলি যদি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা (positive integer) হয় (বিভিন্ন পদে ধ্রুবক সহগ অবশ্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে), তবে সেই অপেক্ষককে চলরাশিটির **মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক** (rational and integral algebraic function, বা polynomial) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $3x^2-7x+8$, $8x^7-6x^5+23x^2-9x+5$, $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, ইত্যাদি রাশিমালা x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক। শেষোক্ত রাশিমালায় n অবশ্য অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা, এবং a_1, a_2,… প্রভৃতি সহগগুলি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবক নির্দেশ করে। ইহাই x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকের সাধারণ রূপ।

1·2. x চলরাশির কোন এক মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে $x-a$ এই দ্বিপদরাশি দ্বারা ভাগ করিয়া অতীব প্রয়োজনীয় এক তথ্য পাই। প্রথমে

আমরা x চলরাশির কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক px^3+qx^2+rx+s কে $x-a$ দ্বারা সাধারণ প্রণালীতে ভাগ করি।

$$\begin{array}{l} x-a\,)\; px^3+qx^2+rx+s\;(\; px^2+(ap+q)x+(pa^2+qa+r) \\ \qquad\quad \underline{px^3-apx^2} \\ \qquad\quad (ap+q)x^2+rx \\ \qquad\quad \underline{(ap+q)x^2-a(ap+q)x} \\ \qquad\quad (pa^2+qa+r)x+s \\ \qquad\quad \underline{(pa^2+qa+r)x-a(pa^2+qa+r)} \\ \qquad\qquad\qquad pa^3+qa^2+ra+s \end{array}$$

এখানে লক্ষণীয় যে ভাজ্য 'x'-এর যে অপেক্ষক, ভাগশেষ 'a'-এর সেই অপেক্ষক এবং ভাগকার্য না করিয়া ভাজ্যে শুধু x চলের পরিবর্তে a বসাইয়া আমরা x-নিরপেক্ষ এই ভাগশেষ নির্ণয় করিতে পারি। অর্থাৎ $f(x)$ যদি x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক হয়, তবে $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ $f(a)$ হইবে। ভাজ্য x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক এবং ভাজক $x-a$ আকারের হইলে ভাগশেষ নির্ণয়ে এই নিয়ম সকল সময়েই প্রযোজ্য। বিশদরূপে এই প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিবার পূর্বে আমরা কয়েকটি মূলদ অখণ্ড x-অপেক্ষককে $x-a$ আকারের ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া এই নিয়মের সত্যতা প্রতিপন্ন করিব।

$5x^2-7x+10$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে উপরোক্ত নিয়মে ভাগশেষ $=5.2^2-7.2+10=16$ এবং সাধারণ প্রণালীতে $5x^2-7x+10$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে আমরা একই ভাগশেষ 16 পাই।

$$\begin{array}{l} x-2\,)\; 5x^2-7x+10\;(\; 5x+3 \\ \qquad\quad \underline{5x^2-10x} \\ \qquad\qquad 3x+10 \\ \qquad\qquad \underline{3x-\ 6} \\ \qquad\qquad\quad 16 \end{array}$$

আবার, $3x^3+7x^2-2x+3$ কে $x+3$ দ্বারা ভাগ করিলে, যেহেতু $x+3=x-(-3)$, অতএব পূর্ব্বোক্ত নিয়মানুসারে ভাগশেষ হওয়া উচিত

$$\begin{aligned} &3(-3)^3+7.(-3)^2-2.(-3)+3 \\ &\quad=-81+63+6+3=-9\,; \end{aligned}$$

এবং সাধারণ প্রণালীতে ভাগ করিয়া আমরা একই ভাগশেষ −9 পাই।

$$\begin{array}{r|l} x+3 & 3x^3+7x^2-2x+3 \;(\,3x^2-2x+4 \\ & \underline{3x^3+9x^2} \\ & \quad -2x^2-2x \\ & \quad \underline{-2x^2-6x} \\ & \qquad 4x+3 \\ & \qquad \underline{4x+12} \\ & \qquad\quad -9 \end{array}$$

উপরের প্রদর্শিত কার্যাবলী হইতে আমরা অতিপ্রয়োজনীয় ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা পাই। এক্ষণে আমরা তাহার আলোচনা করিব।

1·3. ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem).

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে x − a দ্বারা ভাগ করিলে ভাজ্যে অর্থাৎ ঐ অপেক্ষকে x-এর স্থলে a লিখিলে অপেক্ষকের যে মান পাওয়া যায়, তাহাই ভাগশেষ হইবে।

অর্থাৎ x-চলের একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক

$f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ হইবে

$$f(a)\equiv p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots+p_{n-1}a+p_n.$$

প্রমাণ। প্রদত্ত x-অপেক্ষককে $x-a$ দ্বারা ভাগ কর যতক্ষণ না x-নিরপেক্ষ একটি ভাগশেষ পাওয়া যায়।

মনে কর, Q ভাগফল এবং R, x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ।

তাহা হইলে

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv Q(x-a)+R.$$

যেহেতু, ইহা একটি অভেদ, ইহাতে x-এর যে-কোন মান বসাইলে ইহা সিদ্ধ হইবে।

সুতরাং, এই অভেদে $x=a$ এই মান বসাইলে

$$p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}a+p_n=Q\times 0+R=R,$$

যেহেতু ভাগশেষ R x-বর্জিত।

ইহা হইতে প্রতীয়মান হয় যে, x-সংবলিত কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে a লিখিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ সহজেই পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে $px+q$ জাতীয় দ্বিপদরাশি ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ নির্ণয় করিতে হইলে, $px+q=0$ করিয়া x-এর যে মান $-q/p$ পাওয়া যায়, প্রদত্ত অপেক্ষকে x-এর পরিবর্তে সেই মান বসাইলে x-নিরপেক্ষ নির্ণেয় ভাগশেষ পাওয়া যাইবে।

[প্রমাণ ঠিক উপরের ন্যায়।]

আবার, প্রদত্ত রাশিমালা $f(x)$, $x-a$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইলে ভাগশেষ অর্থাৎ $f(a)$ '0' শূন্য হইবে। এই ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা হইতে আমরা নিম্নলিখিত অপর একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা পাই।

1·4. বিভাজ্যতা বা গুণনীয়ক উপপাদ্য (Divisibility or Factor Theorem).

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকে x-এর মান a ধরিলে যদি অপেক্ষকের মান 0 [শূন্য] হয়, তবে x − a ঐ অপেক্ষকের একটি গুণনীয়ক হইবে অর্থাৎ অপেক্ষকটি x − a দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $5x^3-3x^2-11x-6$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য, কারণ, ঐ রাশিমালায় $x=2$ বসাইয়া নির্ণেয় ভাগশেষ

$$5.2^3-3.2^2-11.2-6=0.$$

সাধারণভাবে ভাগ করিয়াও ইহার সত্যতা প্রমাণ করা যায়। ঐরূপ, $x^4-8x^3-33x^2+8x+24$এর $x+3$ একটি উৎপাদক হইবে, কারণ, $x=-3$ [$x+3=0$ ধরিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে এই রাশিমালার মান

$$(-3)^4-8(-3)^3-33(-3)^2+8(-3)+24=0.$$

কিংবা, $6x^3-7x^2-10x+21$, $2x+3$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য, কারণ, $x=-\frac{3}{2}$ [$2x+3=0$ ধরিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে $6x^3-7x^2-10x+21$এর মান $6(-\frac{3}{2})^3-7(-\frac{3}{2})^2-10(-\frac{3}{2})+21=0$ হয়।

নিম্নে গুণনীয়ক উপপাদ্য হইতে সহজে প্রাপ্ত বীজগণিতের কয়েকটি অতি প্রয়োজনীয় ফলাফল প্রদত্ত হইল।

1·5. (A) n যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (*positive integer*) **হইলে x^n-y^n সর্বদাই $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।**

কারণ, $x^n - y^n$ রাশিমালাতে x এর মান $= y$ বসাইলে,

$$x^n - y^n = y^n - y^n = 0.$$

n এর মান যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে ইহা সর্বদাই সত্য।

বস্তুতঃ,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

ইহা সহজেই $x^n - y^n$ কে $x - y$ দ্বারা ভাগ করিয়া, অথবা দক্ষিণপক্ষ সরল করিয়া প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)\ ;$$
$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3),$$ ইত্যাদি।

(B) n যে-কোন ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা (*even positive integer*) **হইলে $x^n - y^n$ সর্বদাই $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।**

কারণ, $x = -y$ [$x + y = 0$ হইতে প্রাপ্ত] বসাইলে $x^n - y^n$ এর মান $= (-y)^n - y^n = y^n - y^n = 0$, যদি n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয়।

বস্তুতঃ এক্ষেত্রে

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

দক্ষিণ পক্ষ সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y),$$
$$x^4 - y^4 = (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। n অযুগ্ম (*odd*) হইলে, $(-y)^n - y^n = -y^n - y^n \neq 0.$

অতএব, এক্ষেত্রে $x^n - y^n$, $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

যথা, $x^3 - y^3$ অথবা $x^5 - y^5$ ইত্যাদি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

(C) n কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

(i) **যখন n অযুগ্ম** (*odd*), **$x^n + y^n$ এর $x + y$ উৎপাদক হইবে ;**

(ii) যখন n যুগ্ম (*even*), $x^n + y^n$ রাশিমালা $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

কারণ, $x = -y$ [$x + y = 0$ করিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে

$x^n + y^n$ এর মান $= (-y)^n + y^n$

n অযুগ্ম হইলে ইহা $= -y^n + y^n = 0.$

কিন্তু n যুগ্ম হইলে $(-y)^n + y^n = y^n + y^n \neq 0.$

বস্তুতঃ, n অযুগ্ম হইলে

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

দক্ষিণ পক্ষ সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$ ইত্যাদি।

(D) n যে-কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, $x^n + y^n$ কোন ক্ষেত্রেই $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

কারণ, $x = y$ বসাইলে, $x^n + y^n = y^n + y^n \neq 0.$

1·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If* $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$, *find* $f(0)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-x)$ *and* $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

এক্ষেত্রে x এর মান বসাইয়া

$$f(0) = 6.0^2 - 5.0 + 1 = 1.$$

$$f(-2) = 6.(-2)^2 - 5(-2) + 1 = 35.$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 6.(\tfrac{1}{2})^2 - 5(\tfrac{1}{2}) + 1 = 0.$$

$$f(-x) = 6.(-x)^2 - 5(-x) + 1 = 6x^2 + 5x + 1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 6.\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1$$

$$= \frac{6 - 5x + x^2}{x^2} \text{ i.e. } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2}.$$

Ex. 2. *If* $f(x)=b\cdot\frac{x-a}{b-a}+a\cdot\frac{x-b}{a-b}$, *show that*

$$f(a)+f(b)=f(a+b).$$

এখানে x এর মান বসাইয়া,

$$f(a)=b\cdot\frac{a-a}{b-a}+a\cdot\frac{a-b}{a-b}=a,$$

$$f(b)=b\cdot\frac{b-a}{b-a}+a\cdot\frac{b-b}{a-b}=b,$$

এবং $f(a+b)=b\cdot\frac{a+b-a}{b-a}+a\cdot\frac{a+b-b}{a-b}$

$$=\frac{b^2}{b-a}+\frac{a^2}{a-b}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a\cdot$$

$\therefore\ f(a)+f(b)=f(a+b).$

Ex. 3. *If* $f(x)=3x^2+4x-5$ *and* $F(x)=x+\frac{1}{x}$, *show that*

$$f(1)=F(1).$$

$$f(x)=3x^2+4x-5.\quad\therefore\quad f(1)=3.1^2+4.1-5=2.$$

আবার, $F(x)=x+\frac{1}{x}\cdot$ $\qquad\therefore\quad F(1)=1+1=2.$

$$\therefore\quad f(1)=F(1).$$

Ex. 4. *If* $f(x)=2x^2-3x-2$ *and* $\phi(x)=3x^2-5x+1$, *find the value of* :

(i) $f(0)+\phi(0)$, (ii) $f(1)-\phi(-2)$ *and* (iii) $\phi(x+1)-f(x-1)$.

$f(x)=2x^2-3x-2$ এবং $\phi(x)=3x^2-5x+1$.

সুতরাং, (i) $f(0)+\phi(0)=2.0^2-3.0-2+3.0^2-5.0+1$

$$=-2+1=-1.$$

(ii) $f(1)-\phi(-2)=2.1^2-3.1-2-\{3(-2^2)-5.(-2)+1\}$

$$=2-3-2-(12+10+1)$$

$$=-3-23=-26.$$

(iii) $\phi(x+1)-f(x-1)$

$$=3(x+1)^2-5(x+1)+1-\{2(x-1)^2-3(x-1)-2\}$$

$$=3(x^2+2x+1)-5x-5+1-\{2(x^2-2x+1)-3x+3-2\}$$
$$=3x^2+6x+3-5x-5+1-2x^2+4x-2+3x-3+2$$
$$=x^2+8x-4.$$

Ex. 5. *If* $f(x, y)=\frac{x^5-y^5}{x-y}$ *when* $x \neq y$, *and* $f(x, y)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ *when* $x=y$*, *show that*

$$f(a, a)=5f(a, -a).$$

এক্ষেত্রে, $f(a, -a)=\frac{a^5-(-a)^5}{a-(-a)}=\frac{a^5+a^5}{a+a}=\frac{2a^5}{2a}=a^4,$

এবং যখন $x=a$, $y=a$, অর্থাৎ $x=y$, তখন প্রদত্ত সংজ্ঞানুসারে

$$f(a, a)=a^5+a^3.a+a^2.a^2+a.a^3+a^4=5a^4.$$
$$\therefore \quad f(a, a)=5f(a, -a).$$

Ex. 6. *If* $x-p$ *be the H. C. F. of* x^2+ax+b *and* $x^2+a'x+b'$, *show that* $p=\frac{b'-b}{a-a'}$.

যদি $x-p$, x^2+ax+b এবং $x^2+a'x+b'$ উভয় রাশিমালার গ. সা. গু. হয়, তবে উভয় রাশিমালাই $x-p$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

$\therefore \quad p^2+ap+b=0$ ... ... (i)

এবং $p^2+a'p+b'=0.$ ... ... (ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া $(a-a')p+b-b'=0$

$$\therefore \quad p=\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Ex. 7. *If* $4x^3-3x^2-24x-9$ *and* $8x^3-2x^2-53x-c$ *leave the same remainder when divided by* $x-3$, *find the value of c.*

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা অনুসারে, $4x^3-3x^2-24x-9$ কে $x-3$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ

$$=4.3^3-3.3^2-24.3-9=0\ ;$$

---

* ইহা লক্ষণীয় যে, যখন $x=y$, তখন $\frac{x^5-y^5}{x-y}$ এর মান হয় $\frac{0}{0}$, এবং ইহা অর্থহীন ; অতএব, সেক্ষেত্রে $f(x, y)=\frac{x^5-y^5}{x-y}$ সংজ্ঞা দেওয়া যায় না।

আবার, $8x^3 - 2x^2 - 53x - c$ কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করিলে

$$\text{ভাগশেষ} = 8.3^3 - 2.3^2 - 53.3 - c = 39 - c$$

∴ উভয় ক্ষেত্রে ভাগশেষ সমান হইলে,

$$39 - c = 0. \quad \therefore \quad c = 39.$$

Ex. 8. *If n be a positive integer, show that* $4^{5n} - 5^{4n}$ *is always divisible by* 3, 7 *and* 19, *and by* 17 *and* 97 *when n is an even positive integer.*

$$4^{5n} - 5^{4n} = (4^5)^n - (5^4)^n = 1024^n - 625^n.$$

আমরা জানি $1024^n - 625^n$ সর্বদা $1024 - 625$ অর্থাৎ 399 দ্বারা বিভাজ্য। এক্ষণে, $399 = 3.7.19$.

∴ $4^{5n} - 5^{4n}$ সতত 3, 7 এবং 19 দ্বারা বিভাজ্য।

n ধনাত্মক যুগ্মরাশি হইলে, $x^n - y^n$, $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য।

∴ n ধনাত্মক যুগ্মরাশি হইলে

$4^{5n} - 5^{4n}$ অর্থাৎ $1024^n - 625^n$, $1024 + 625$ অর্থাৎ 1649 দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু, $1649 = 17.97$.

∴ n একটি ধনাত্মক যুগ্মসংখ্যা হইলে $4^{5n} - 5^{4n}$, 17 এবং 97 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 9. *Find the continued product of* 11, 101 *and* 10001.

মনে কর, $P = 11 \times 101 \times 10001$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad (10-1)P &= (10-1) \times (10+1) \times (100+1)(10000+1)\\ &= (10^2 - 1) \times (10^2 + 1) \times (10^4 + 1)\\ &= (10^4 - 1) \times (10^4 + 1) = 10^8 - 1\ ;\end{aligned}$$

অর্থাৎ $9P = 99999999 \quad \therefore \quad P = 11111111$

$$\therefore \quad 11 \times 101 \times 10001 = 11111111.$$

Ex. 10. *If n is a positive integer, show that* $1 - x - x^n + x^{n+1}$ *is always exactly divisible by* $1 - 2x + x^2$.

এখানে দেখা যায় যে, $x = 1$ বসাইলে (n অখণ্ড ধন-সংখ্যা হইলে) প্রদত্ত রাশিমালার মান হয় $1 - 1 - 1 + 1 = 0$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালার $x - 1$ বা $1 - x$ একটি উৎপাদক।

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিমালা $= 1 - x - x^n + x^{n+1}$

$$= (1-x) - x^n(1-x) = (1-x)(1-x^n).$$

$\therefore$ $(1-x)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক।

আবার, $1 - x^n$ রাশিমালা, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, $(1-x)$ দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $(1-x)^2$ অর্থাৎ $1 - 2x + x^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

Ex. 11. *If* $x^n + py^n + qz^n$ *is exactly divisible by* $x^2 - (ay+bz)x + abyz$, *show that* $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} + 1 = 0$.

$$x^2 - (ay+bz)x + abyz = (x-ay)(x-bz) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

মনে কর, $x^n + py^n + qz^n = f(x)$. $\cdots$ (ii)

এক্ষণে, $f(x)$, $x^2 - (ay+bz)x + abyz$ অর্থাৎ $(x-ay((x-bz)$ দ্বারা বিভাজ্য। $\therefore$ $f(ay) = 0$.

সুতরাং, (ii) হইতে $a^n y^n + py^n + qz^n = 0$,

বা, $y^n(a^n+p) + qz^n = 0$, বা, $\frac{y^n}{z^n} = -\frac{q}{a^n+p}$. $\cdots$ (iii)

আবার, $f(bz) = 0$, [$\because$ (ii), (i) দ্বারা বিভাজ্য]

সুতরাং (ii) হইতে, $b^n z^n + py^n + qz^n = 0$,

বা $z^n(b^n+q) + py^n = 0$, বা $\frac{y^n}{z^n} = -\frac{b^n+q}{p}$ $\cdots\cdot$ (iv)

সুতরাং, (iii) ও (iv) হইতে $\frac{q}{a^n+p} = \frac{b^n+q}{p}$,

বা, $(a^n+p)(b^n+q) = pq$,

বা, $pb^n + qa^n + a^n b^n + pq = pq$,

বা $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} + 1 = 0$, [$a^n b^n$ দ্বারা ভাগ করিয়া].

Ex. 12. *Find for what values of* l *and* m *will* $8x^3 + lx^2 - 27x + m$ *be an integral multiple of* $2x^2 - x - 6$?

মনে কর, $f(x) = 8x^3 + lx^2 - 27x + m$.

এক্ষণে, ভাজক $2x^2-x-6=(x-2)(2x+3)$.

$f(x)$, $2x^2-x-6$ এর অখণ্ড গুণিতক হইতে হইলে $f(x)$ অবশ্যই $2x^2-x-6$ অর্থাৎ $x-2$ এবং $2x+3$ উভয়ের দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইবে।

$\therefore$ $f(x)$ কে $x-2$ এবং $2x+3$ দ্বারা ভাগ করিলে উভয় ক্ষেত্রেই ভাগশেষ 0 শূন্য হইবে।

(1) $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে,

ভাগশেষ $=f(2)=8.2^3+l.2^2-27.2+m=0$.

$\therefore\ 64+4l-54+m=0$, বা, $4l+m+10=0$. $\cdots$ (i)

(2) যেহেতু $2x+3=2(x+\frac{3}{2})=2\{x-(-\frac{3}{2})\}$, $f(x)$, $2x+3$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইলে ইহা $x-(-\frac{3}{2})$ দ্বারাও বিভাজ্য হইবে।

$\therefore\ f(-\frac{3}{2})=8.(-\frac{3}{2})^3+l.(-\frac{3}{2})^2-27.(-\frac{3}{2})+m=0$,

বা, $-27+\dfrac{9l}{4}+\dfrac{81}{2}+m=0$, বা, $9l+4m+54=0$. $\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) সমীকরণ সমাধান করিয়া আমরা পাই

$l=2$ এবং $m=-18$.

Ex. 13. *If a number is divisible by 9, show that the sum of its digits is divisible by 9.*

মনে কর, প্রদত্ত সংখ্যাটি $(n+1)$-সংখ্যক অঙ্কবিশিষ্ট (of $\overline{n+1}$ digits) এবং একক, দশক প্রভৃতি স্থানীয় অঙ্কগুলি যথাক্রমে $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$.

তাহা হইলে সংখ্যাটি $p_n10^n+p_{n-1}10^{n-1}+p_{n-2}10^{n-2}+\cdots+p_2.10^2+p_1.10+p_0$ এই আকারে লেখা যায়।

$\therefore$ সংখ্যাটিকে আমরা 10 এর অপেক্ষকরূপে মনে করিতে পারি।

ধর, $f(10)=p_n.10^n+p_{n-1}.10^{n-1}+p_{n-2}.10^{n-2}+\cdots+p_2.10+p_0$

এক্ষণে, $f(10)$ কে 9 অর্থাৎ $(10-1)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হইবে $f(1)$ অর্থাৎ এই রাশিমালাতে 10 এর স্থলে 1 লিখিলে $f(1)$ পাওয়া যাইবে।

$\therefore\ f(1)=p_n.1^n+p_{n-1}.1^{n-1}+p_{n-2}.1^{n-2}+\cdots+p_2.1^2+p_1.1+p_0.$

$=p_n+p_{n-1}+p_{n-2}+\cdots+p_2+p_1+p_0.$

এখন $p_0, p_1, p_2, \ldots$ প্রভৃতি অঙ্কগুলির সমষ্টি 0 অথবা 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে প্রদত্ত সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

কিন্তু, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ প্রভৃতি অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা।

স্নতরাং, তাহাদের সমষ্টি কখনও 0 শূন্য হইতে পারে না। অতএব, $p_0+p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n$, 9 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 14. *If in a polynomial in x, the sum of the coefficients be zero, the polynomial has a factor $(x-1)$. If the sum of the coefficients of odd powers of x be equal to the sum of the coefficients of the even powers of x together with the free term, the polynomial has a factor $(x+1)$.*

x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকের সাধারণ আকার

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0.$$

[এখানে 'n' ধনাত্মক ধ্রুবক-সংখ্যা, এবং সহগ $a_n, a_{n-1}, \cdots$ গুলি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবক-সংখ্যা অথবা ইহাদের কতকগুলি '0' হইতে পারে]

$(x-1)$ দ্বারা অপেক্ষকটিকে ভাগ করিলে ভাগশেষ-উপপাদ্য অনুসারে অপেক্ষকে x-এর মান 1 বসাইয়া ভাগশেষ পাই

$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0.$$

অতএব, এই ভাগশেষ (অর্থাৎ সহগগুলির সমষ্টি) শূন্য হইলে $(x-1)$, অপেক্ষকের একটি উৎপাদক হইবে। আবার, অপেক্ষকে $x=-1$ বসাইলে, উহার মান n যুগ্ম হইলে, $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots-a_1+a_0$, এবং n অযুগ্ম হইলে, $-a_n+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots-a_1+a_0$ হয়।

$$\therefore\quad a_n+a_{n-2}+\cdots=a_{n-1}+a_{n-3}+\cdots$$

$$\text{বা,}\quad (a_n+a_{n-2}+\cdots)-(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots)^{*}=0$$

হইলে, n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক না কেন, অপেক্ষককে $(x+1)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 0 হইবে, অর্থাৎ $(x+1)$, অপেক্ষকের একটি উৎপাদক হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $3x^9+17x^8-2x^6+41x^5+41x^4-89x^2-15x+4$ এর $(x-1)$ একটি উৎপাদক ;

$23x^6+19x^5-2x^4-9x^3+18x+7$ এর $(x+1)$ একটি উৎপাদক ; ইত্যাদি।

---

* x-নিরপেক্ষ a_0 পদটি সর্বদাই x এর যুগ্ম ঘাতের সহগগুলির যোগফলের সহিত থাকিবে।

Examples I

1. If $f(x) \equiv 2x^2 - x + 1$ and $\phi(x) \equiv x^3 - 3x + 1$, find the value of (i) $f(1) + \phi(-1)$, (ii) $f(0) + \phi(0)$ and (iii) $f(-2) - \phi(0)$.

2. If $y = f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, show that $f(y) = -\dfrac{3x-2}{4x-11}$.

3. If $x - a$ is the H. C. F. of $qx^2 + 2x + p$ and $qx^2 + x + r$, show that $a = r - p$ and $q(r-p)^2 + 2r - p = 0$.

4. If $x + 3$ is the H. C. F. of $3ax^3 + 5x + 2p$ and $3ax^2 + 3x + p + 6$, find the values of p and a.

5. If $ax^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + ax^2 - bx - a$ is divisible by $x + 1$, show that $d = a + 2b + c$.

6. If n is a positive integer, show that $11^n - 1$ is completely divisible by 10.

7. If n be an even positive integer, show that $4^{3n} - 6^{2n}$ is a multiple of 100.

8. If n be any positive integer, prove that $5^{2n} - 1$ is always divisible by 24.

9. Show that $7^{2n} - 1$ is divisible by both 16 and 24, when n is any positive integer.

10. Show that $19^n = 18(19^{n-1} + 19^{n-2} + \cdots + 1) + 1$, when n is any positive integer.

11. For what value of m will $a^m - x^m$ be divisible both by $a^n + x^n$ and $a^n - x^n$ exactly, when n is a positive integer ?

12. If $x^3 + px + r$ and $3x^2 + p$ have a common factor, prove that $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{r^2}{4} = 0$.

13. Find l and m in order that $2x^3 - (2l+1)x^2 + (l+m)x + m$ may be exactly divisible by $2x^2 - x - 3$.

14. Use the Remainder Theorem to prove that $(b+c)(c+a)(a+b)$ is a factor of $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.

15. If m is a positive integer, show that $81^m.121^m - 1$ is divisible by 100.

16. Show that the following expressions are divisible by $(a-b)(b-c)(c-a)$:

(i) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

(ii) $a^7b^7(a-b)^{43}+b^7c^7(b-c)^{43}+c^7a^7(c-a)^{43}$.

(iii) $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$.

17. Show that each of the binomials $a-b$, $b-c$, $c-a$ and $x-y$ is a factor of the expression $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay) -(ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$.

18. (i) If the sum of the digits of a number be divisible by 3, prove that the number itself is divisible by 3.

(ii) In any number, if the difference between the sum of the digits in the odd places and the sum of the digits in the even places be zero, or is a multiple of 11, show that the number itself is divisible by 11.

ANSWERS

1. (i) 5. (ii) 2. (iii) 10. **4.** $a=-\frac{1}{15}$, $p=\frac{24}{5}$.

11. m is an even multiple of n. **13.** $l=-1$, $m=-3$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

দুরূহ উৎপাদক (Harder Factors)

2·1. বীজগণিতে রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় একটি অতি প্রয়োজনীয় বিষয়।

a^2-b^2, $a^3 \pm b^3$, $x^2+(a+b)x+ab$ এর মত সহজ আকারের রাশিমালাকে কি প্রকারে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হয় তাহার সহিত ছাত্রগণ পূর্বেই পরিচিত হইয়াছে। সেগুলির বিস্তারিত আলোচনা না করিয়া বর্তমানে আমরা অপেক্ষাকৃত দুরূহ রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

এখানে উৎপাদক-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়মের উল্লেখ অপ্রাসঙ্গিক হইবে না। অঙ্ক-সমাধানে সহায়তার জন্য বীজগণিতে অনেক আদর্শ সূত্র আছে। তন্মধ্যে যে সূত্রগুলি উৎপাদক নির্ণয়ে প্রয়োজন আমরা সেই সকল সূত্রের সাহায্য লই। উৎপাদক উপপাদ্যের (Factor Theorem) সাহায্যে আমরা কোন রাশিমালাকে পরীক্ষা করিয়া উহার উৎপাদক নির্ণয় করিতে পারি। ইহা ছাড়াও বিবিধ কৌশল সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশিমালাকে কোন আদর্শ সূত্রের আকারে পরিণত করিয়া উহার উৎপাদক আমরা নির্ণয় করিতে পারি।

2·2. প্রথমে $\mathbf{a^2-b^2}$ আকারবিশিষ্ট কয়েকটি রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ-প্রণালী দেখানো হইল।

Ex. 1. Factorise $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= \{2(ab+cd)\}^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &= \{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\\ &\qquad \{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\\ &= \{(a^2+b^2+2ab)-(c^2+d^2-2cd)\}\\ &\qquad \{(c^2+d^2+2cd)-(a^2+b^2-2ab)\}\\ &= \{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}\\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)\\ &\qquad (c+d-a+b).\end{aligned}$$

এই অঙ্কটি সরাসরি দুইটি পূর্ণবর্গের অন্তরফলরূপে থাকায় উপরোক্ত সূত্রের প্রয়োগে সহজেই রাশিমালাদ্বয়কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা গিয়াছে। কিন্তু

কোন কোন স্থলে রাশিমালা দুই বর্গের অন্তরফলরূপে দেওয়া না থাকিলেও দুই বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল।

Ex. 2. Resolve the following expressions into factors.

(i) $6x^2-x-15$. (ii) x^4+4. (iii) $x^4+x^2y^2+y^4$.
(iv) a^4+8a^2-48.

(i) $6x^2-x-15=6\left(x^2-\dfrac{x}{6}-\dfrac{5}{2}\right)$

$=6\{x^2-2.x.\frac{1}{12}+(\frac{1}{12})^2-(\frac{1}{12})^2-\frac{5}{2}\}$
$=6\{(x+\frac{1}{12})^2-(\frac{19}{12})^2\}=6(x+\frac{1}{12}+\frac{19}{12})(x+\frac{1}{12}-\frac{19}{12})$
$=6(x+\frac{5}{3})(x-\frac{3}{2})=(3x+5)(2x-3)$.

(ii) $x^4+4=x^2+2^2=(x^2+2)^2-4x^2$

[$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ সূত্র সাহায্যে]

$=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

(iii) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

(iv) $a^4+8a^2-48=a^4+2.a^2.4+4^2-4^2-48$
$=(a^2+4)^2-8^2$
$=(a^2+4+8)(a^2+4-8)$
$=(a^2+12)(a^2-4)$
$=(a^2+12)(a+2)(a-2)$.

2·3. $a^3\pm b^3$ আকারযুক্ত রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

(i) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$
$=(2x+3y)\{(2x)^2-2x.3y+(3y)^2\}$
$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

(ii) $a^6+\dfrac{b^6}{27}=(a^2)^3+\left(\dfrac{b^2}{3}\right)^3$

$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2-a^2\cdot\frac{b^2}{3}+\left(\frac{b^2}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^4-\frac{a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{9}\right)$$

$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2+2a^2.\frac{b^2}{3}+\left(\frac{b^2}{3}\right)^2-a^2b^2\right\}$$
$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)^2-(ab)^2\right\}$$
$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right).$$

(iii) $64x^6-1=(8x^3)^2-1=(8x^3+1)(8x^3-1)$
$$=\{(2x)^3+1\}\{(2x)^3-1\}$$
$$=(2x+1)(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1).$$

(iv) $x^3+6x^2+12x-56=x^3+3.x^2.2+3.x.2^2+2^3-64$
$$=(x+2)^3-4^3$$
$$=(x+2-4)\{(x+2)^2+(x+2).4+4^2\}$$
$$=(x-2)(x^2+8x+28).$$

2·4. পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয় (Determination of factors by trial).

আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে গুণনীয়ক-বিষয়ক উপপাদ্যে দেখিয়াছি যদি x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x-এর স্থলে a বসাইলে রাশিমালার মান 0 শূন্য হয়, তবে ঐ রাশিমালা $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য অর্থাৎ $x-a$, উহার একটি উৎপাদক হইবে। এই উপপাদ্যের সাহায্যে পরীক্ষা দ্বারা আমরা বহু ক্ষেত্রে রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে পারি। নিম্নের উদাহরণ হইতে বিষয়টি পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইবে।

Ex. *Resolve the following expressions into factors :—*

(i) x^3-7x+6. (ii) $x^3-2x^2-23x+60$.
(iii) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18$.

(i) x^3-7x+6.

এই রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে 1 বসাইলে ইহা
$$=1^3-7.1+6=1-7+6=0.$$

অতএব গুণনীয়ক-বিষয়ক উপপাদ্যের সাহায্যে $x-1$ এই রাশিমালার একটি গুণনীয়ক বা উৎপাদক হইবে। এখন, এই রাশিমালার পদগুলি এইরূপে বিন্যস্ত করিতে হইবে, যেন পর পর দুইটি পদের মধ্যে $x-1$ সাধারণ (common) থাকে।

$$
\begin{aligned}
x^3-7x+6 &= x^3-x^2+x^2-x-6x+6\\
&= x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)\\
&= (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)\{x^2+3x-2x-6\}\\
&= (x-1)\{x(x+3)-2(x+3)\}\\
&= (x-1)(x-2)(x+3).
\end{aligned}
$$

(ii) $x^3-2x^2-23x+60.$

পরীক্ষা দ্বারা আমরা দেখিতে পাই x-এর মান 3 ধরিলে, রাশিমালার মান 0 শূন্য হয়। অতএব, $x-3$ এই রাশিমালার একটি উৎপাদক।

$$
\begin{aligned}
x^3-2x^2-23x+60 &= x^3-3x^2+x^2-3x-20x+60\\
&= x^2(x-3)+x(x-3)-20(x-3)\\
&= (x-3)(x^2+x-20)\\
&= (x-3)(x^2-4x+5x-20)\\
&= (x-3)\{x(x-4)+5(x-4)\}\\
&= (x-3)(x-4)(x+5).
\end{aligned}
$$

(iii) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18.$

উপরোক্ত রাশিমালায় $x=-1$ বসাইলে রাশিমালাটি 0 শূন্য হয়। সুতরাং, $x-(-1)$ অর্থাৎ $x+1$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক।

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad x^4+3x^3-7x^2-27x-18 &= x^4+x^3+2x^3+2x^2\\
&\qquad -9x^2-9x-18x-18\\
&= x^3(x+1)+2x^2(x+1)-9x(x+1)-18(x+1)\\
&= (x+1)(x^3+2x^2-9x-18)\\
&= (x+1)\{x^2(x+2)-9(x+2)\}\\
&= (x+1)(x+2)(x^2-9)\\
&= (x+1)(x+2)(x+3)(x-3).
\end{aligned}
$$

দ্রষ্টব্য। এই নিয়মে x-যুক্ত কোন রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে পরীক্ষার জন্য আমরা প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে যে মান বসাই তাহা অবশ্যই প্রদত্ত রাশিমালার x-বর্জিত পদের এক গুণনীয়ক হইবে। মনে কর, x-বর্জিত পদের একটি গুণনীয়ক যদি a হয়, তবে প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে a অথবা $-a$ বসাইয়া পরীক্ষা করিতে হইবে।

2·5. রাশিমালার অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উৎপাদক নির্ণয়।

দুই বা ততোধিক অক্ষরবিশিষ্ট সমমাত্র রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয়ে এই নিয়ম প্রযুক্ত হয়।

Ex. 1. *Resolve* $a^2-6b^2-6c^2-13bc-ca+ab$ *into factors.*

প্রদত্ত রাশিমালা 'a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হয়

$$\begin{aligned}
&a^2+a(b-c)-(6b^2+13bc+6c^2)\\
&=a^2+a(b-c)-(6b^2+9bc+4bc+6c^2)\\
&=a^2+a(b-c)-\{3b(2b+3c)+2c(2b+3c)\}\\
&=a^2+a(b-c)-(2b+3c)(3b+2c)\\
&=a^2+a\{(3b+2c)-(2b+3c)\}-(2b+3c)(3b+2c)\\
&=a^2+a(\alpha-\beta)-\alpha\beta, \text{ যখন } 3b+2c=\alpha,\ 2b+3c=\beta.\\
&=a(a+\alpha)-\beta(a+\alpha)=(a+\alpha)(a-\beta)\\
&=(a+3b+2c)(a-2b-3c).
\end{aligned}$$

Ex. 2. *Resolve* $6a^2+7ab+2b^2+11ac+7bc+3c^2$ *into factors.*

a, b, c অক্ষরযুক্ত এই রাশিমালাকে পর পর a, b, c এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া তিন রকমে ইহার উৎপাদক নির্ণয় করিব।

প্রথমতঃ 'a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

$$\begin{aligned}
&=6a^2+a(7b+11c)+(2b^2+7bc+3c^2)\\
&=6a^2+a(7b+11c)+(2b^2+6bc+bc+3c^2)\\
&=6a^2+a(7b+11c)+\{2b(b+3c)+c(b+3c)\}\\
&=6a^2+a(7b+11c)+(b+3c)(2b+c)\\
&=6a^2+a\{3(b+3c)+2(2b+c)\}+(b+3c)(2b+c)\\
&=3a(2a+b+3c)+(2b+c)(2a+b+3c)\\
&=(2a+b+3c)(3a+2b+c).
\end{aligned}$$

দ্বিতীয়তঃ, 'b'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

$$\begin{aligned}
&=2b^2+7b(a+c)+(6a^2+11ac+3c^2)\\
&=2b^2+7b(a+c)+(6a^2+9ac+2ac+3c^2)\\
&=2b^2+7b(a+c)+3a(2a+3c)+c(2a+3c)
\end{aligned}$$

S.C.E R T., West Bengal
Date 28-3-85
Acc. No 3212

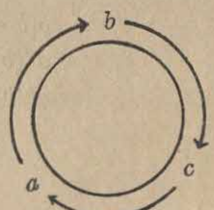
$$= 2b^2 + 7b(a+c) + (2a+3c)(3a+c)$$
$$= 2b^2 + b\{2(2a+3c) + (3a+c)\} + (2a+3c)(3a+c)$$
$$= 2b(b+2a+3c) + (3a+c)(b+2a+3c)$$
$$= (b+2a+3c)(2b+3a+c).$$

তৃতীয়তঃ, 'c'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

$$= 3c^2 + c(11a+7b) + (6a^2+7ab+2b^2)$$
$$= 3c^2 + c(11a+7b) + (6a^2+3ab+4ab+2b^2)$$
$$= 3c^2 + c(11a+7b) + 3a(2a+b) + 2b(2a+b)$$
$$= 3c^2 + c(11a+7b) + (2a+b)(3a+2b)$$
$$= 3c^2 + c\{3(3a+2b) + (2a+b)\} + (2a+b)(3a+2b)$$
$$= 3c(c+3a+2b) + (2a+b)(c+3a+2b)$$
$$= (c+3a+2b)(3c+2a+b).$$

2·6. চক্রক্রম (Cyclic Order).

পার্শ্বচিত্রে প্রদর্শিতরূপে a, b, c অক্ষর তিনটি বৃত্তের পরিধির উপরে সাজাইয়া লিখ। এখন, a হইতে স্বরু করিয়া তীরচিহ্ন-নির্দিষ্ট দিকে অগ্রসর হইলে অক্ষর তিনটি abc এই ক্রমে পাওয়া যায়। তদ্রূপ, b ও c হইতে আরম্ভ করিয়া তীরচিহ্নিত দিকে রওনা হইলে ঐ অক্ষর তিনটি যথাক্রমে bca ও cab ক্রমে পাওয়া যায়। a, b, c অক্ষরত্রয় কোন রাশিমালায় এইরূপভাবে বিন্যস্ত হইলে ঐ বিন্যাসকে চক্রক্রম (Cyclic order) বলে।



নিম্নে প্রদত্ত রাশিমালাগুলিতে a, b, c অক্ষরত্রয় চক্রক্রমে বিন্যস্ত (i) $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$; (ii) $a+b$, $b+c$, এবং $c+a$; (iii) $a^2(b-c)$, $b^2(c-a)$ এবং $c^2(a-b)$; (iv) $a^2+b^2-c^2$, $b^2+c^2-a^2$ এবং $c^2+a^2-b^2$ প্রভৃতি।

বীজগণিতে 'চক্রক্রমের' প্রয়োজনীয়তা খুব বেশী। চক্রক্রমে বিন্যস্ত রাশিমালার একটি পদ জানা থাকিলে অপর পদগুলি অনায়াসে লেখা যায়। সেইজন্য বীজগণিতে কোন রাশিমালা অক্ষরগুলির কি ক্রমে সাধারণতঃ লেখা হইয়া থাকে শিক্ষার্থীদের সেইদিকে বিশেষ মনোযোগ দেওয়া দরকার। $bc+ca+ab$ রাশিমালার পদবিন্যাস লক্ষ্য করিলে দেখিতে পাইবে a-বর্জ্জিত পদ প্রথমে

00570 LIBRARY 30 MAR 1965
S.C.E.R.T., West Bengal Library

অবস্থিত এবং চক্রক্রমে অক্ষরগুলি পরিবর্তিত করিয়া অর্থাৎ a কে b, b কে c এবং c কে a তে পরিবর্তিত করিয়া একের পর এক অপর দুই পদ পাওয়া যায়। সেইরূপ, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ রাশিমালাকে লক্ষ্য করিলে একই প্রকারের পদবিন্যাস পরিলক্ষিত হইবে। কেননা, $a^2(b-c)$ পদের অক্ষর-গুলিতে চক্রক্রমে পরিবর্তন সাধন করিয়া অর্থাৎ a-এর স্থলে b, b-এর স্থলে c এবং c-এর স্থলে a লিখিয়া আমরা $b^2(c-a)$ পদ পাই এবং আর একবার অক্ষরগুলি চক্রক্রমে পরিবর্তন করিলে আমরা তৃতীয় পদ পাই।

চক্রক্রমে অবস্থিত তিন অক্ষর a, b, c-যুক্ত কোন রাশিমালায় $b-c$ একটি পদ হইলে অপর দুইপদ যথাক্রমে $c-a$ এবং $a-b$ হইবে। কোনও ক্ষেত্রে $b-c$, $a-c$ এবং $a-b$ এই তিনটি পদ থাকিলে দ্বিতীয় পদ $a-c$ চক্রক্রমে নাই। ইহাকে চক্রক্রমে আনিতে হইলে a এবং c কে একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিয়া তৎপূর্বে একটি বিয়োগ-চিহ্ন দিতে হইবে। যথা, $a-c = -(c-a)$.

$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ আকারে লিখিত যে সমস্ত রাশিমালাতে a, b, c এর ঘাতগুলি পরস্পর সমান সেগুলির প্রত্যেকটিই 0 শূন্য হইবে। যথা,

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$
$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0$$
$$a^3(b^3-c^3)+b^3(c^3-a^3)+c^3(a^3-b^3)=0$$

....

ইত্যাদি।

2·7. সূত্র (A). $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc}$
$$=\mathbf{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$$
$$=\mathbf{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}.$$

প্রমাণ। $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)-3abc$$
$$=(a+b+c)\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\} -3bc(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}.$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

দ্রষ্টব্য। যদি $\mathbf{a+b+c=0}$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, অর্থাৎ $\mathbf{a^3+b^3+c^3=3abc}$.

এই সূত্রের সাহায্যে আমরা $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Resolve into factors*

(i) $p^3-8q^3-r^3-6pqr$.

(ii) x^6+7x^3-8.

(iii) $14a^3-4b^3+9a^2b$.

(i) $p^3-8q^3-r^3-6pqr$

$$= p^3+(-2q)^3+(-r)^3-3.\ p.(-2q).(-r)$$

$$= \{p+(-2q)+(-r)\}\{p^2+(-2q)^2+(-r)^2-(-2q)(-r)-(-r).p-p(-2q)\}$$

$$= (p-2q-r)(p^2+4q^2+r^2-2qr+rp+2pq).$$

(ii) x^6+7x^3-8

$$= x^6+x^3-2^3+6x^3$$

$$= (x^2)^3+x^3-2^3-3.x^2.x.(-2)$$

$$= (x^2+x-2)(x^4+x^2+4-x^3+2x^2+2x)$$

$$= (x+2)(x-1)(x^4-x^3+3x^2+2x+4).$$

(iii) $14a^3-4b^3+9a^2b$

$$= \frac{1}{2}(28a^3-8b^3+18a^2b)$$

$$= \frac{1}{2}\{27a^3+a^3+(-2b)^3-3.3a.a.(-2b)\}$$

$$= \frac{1}{2}(3a+a-2b)(9a^2+a^2+4b^2-3a^2+6ab+2ab)$$

$$= \frac{1}{2}(4a-2b)(7a^2+8ab+4b^2)$$

$$= (2a-b)(7a^2+8ab+4b^2).$$

2·8. সূত্র (B). $\mathbf{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}$
$$\equiv bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$
$$\equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$, $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$ এবং $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$ রাশিমালা তিনটি যে পরস্পর সমান, তাহা প্রত্যেকটিকে সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়। অতএব, উপরের সূত্রের প্রথমটির প্রমাণ দিলেই যথেষ্ট হইবে।

প্রমাণ। $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$
['a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

দ্রষ্টব্য। উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে $b=-c$ প্রভৃতি বসাইয়া প্রদত্ত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। [§ 2·10, তৃতীয় পদ্ধতি দেখ।]

2·9. সূত্র (C). $\mathbf{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}$
$$\equiv bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$$
$$\equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

প্রমাণ। $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$$=a^2b+a^2c+abc+b^2c+ab^2+abc+ac^2+bc^2+abc$$
$$=a(ab+ac+bc)+b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)$$
$$=(bc+ca+ab)(a+b+c).$$

অনুসিদ্ধান্ত। $\mathbf{(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(bc+ca+ab)(a+b+c)}$

এবং $\mathbf{(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=(b+c)(c+a)(a+b).}$

উপরের সূত্র দুইটি হইতে এই অনুসিদ্ধান্ত সহজেই প্রমাণিত হয়।

2·10. সূত্র (D). $\mathbf{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$ .... (i)

$\mathbf{\equiv bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$ .... (ii)

$\mathbf{\equiv -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}}$ (iii)

$\mathbf{= -(b-c)(c-a)(a-b).}$

সরল করিয়া সহজেই দেখা যায় যে, (i), (ii) এবং (iii) রাশিমালা তিনটি পরস্পর সমান। অতএব, ইহার একটি লইয়া সূত্রটি নিম্নে প্রমাণ করা হইল।

প্রমাণ। প্রথম পদ্ধতি। $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

['a'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c+a-b)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b)$

$=(b-c)(a^2-b^2)-(a-b)(b^2-c^2)$

$=(b-c)(a-b)(a+b-b-c)$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

তৃতীয় পদ্ধতি। যদি আমরা রাশিমালা

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$-তে .... (i)

$b=c$ বসাই, তবে ইহা 0 হইবে।

∴ উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্য (Factor Theorem) অনুসারে $b-c$ ইহার একটি উৎপাদক হইবে এবং অনুরূপ-ভাবে $c-a$ এবং $a-b$-ও এই রাশিমালার উৎপাদক হইবে। এক্ষণে, (i) একটি তৃতীয় ক্রমের রাশিমালা, সুতরাং, ইহার তিনটি মাত্র উৎপাদক থাকিতে পারে।

$\therefore\quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\equiv k(b-c)(c-a)(a-b)$ (ii)
এখানে k একটি a, b, c নিরপেক্ষ সংখ্যা অর্থাৎ a, b, c এর যে-কোন মান হইলে k এর মান সতত অপরিবর্তিত থাকিবে।

(ii) এর দুইদিকে a^2 এর সহগ তুলনা করিয়া আমরা পাই $k=-1$.

$\therefore\quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

অন্য প্রকারেও k এর মান নির্ণয় করা যায়। যেহেতু, k এর মান a, b, c এর মান-নিরপেক্ষ, a, b, c এর যে-কোন তিনটি নির্দিষ্ট মান বসাইয়া আমরা k এর মান নির্ণয় করিতে পারি। ধর, $a=0, b=1, c=2$ তাহা হইলে (ii) এর বামপক্ষের মান -2 হইবে এবং ডানপক্ষের মান $2k$ হইবে। $\therefore$ পূর্বের ন্যায় $k=-1$ পাওয়া যাইবে।

2·11. সূত্র (E). $\mathbf{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$
$\mathbf{=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}$.

$$\begin{aligned}
&a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
&=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3\\
&=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)\\
&\qquad\qquad\text{['a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]}\\
&=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}\\
&=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)\\
&=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}\\
&=(b-c)(a-b)\{a(a+b)-bc-c^2\}\\
&=(b-c)(a-b)(a^2-c^2+ab-bc)\\
&=(b-c)(a-b)\{(a^2-c^2)+b(a-c)\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)(a+c+b)\\
&=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).
\end{aligned}$$

§ 2·10 এর তৃতীয় পদ্ধতির ন্যায় এক্ষেত্রেও উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, $b-c$, $c-a$ এবং $a-b$ প্রদত্ত রাশিমালার উৎপাদক হইবে। যেহেতু প্রদত্ত রাশিমালা চারিমাত্রার, অতএব, বাকি উৎপাদক একমাত্রাবিশিষ্ট $la++mb+nc$ আকারের হইবে। এখন পূর্বের ন্যায় a, b, c র যে-কোন তিনপ্রস্থ মান বসাইয়া $l=m=n=-1$ পাওয়া যাইবে।

2·12. সূত্র (F). $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
$=3(b+c)(c+a)(a+b).$

প্রমাণ। $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$$=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$$
$$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2\}-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)\{3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc\}-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)\{3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc-b^2+bc-c^2\}$$
$$=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)$$
$$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$=3(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

দ্রষ্টব্য। উৎপাদক-উপপাদ্য সাহায্যে $b=-c$ প্রভৃতি বসাইয়াও সূত্র (F) পাওয়া যাইতে পারে।

2·13. সূত্র (G). $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$$

['a'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}.$$

[মধ্য-বন্ধনীর অন্তর্গত অংশ 'b'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{-c(a^2-b^2)-ab(a-b)\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

2·14. সূত্র (H). $\mathbf{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$
$\mathbf{=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).}$

প্রমাণ।

বাম পক্ষ $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$
$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$
$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$
$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$
$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)$
= দক্ষিণ পক্ষ।

2·15. বিবিধ সমাধান।

Ex. 1. *Find the factors of* $a^9-64a^3-a^6+64$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3(a^6-64)-(a^6-64)$
$=(a^6-64)(a^3-1)$
$=(a^3+8)(a^3-8)(a^3-1)$
$=(a+2)(a^2-2a+4)(a-2)(a^2+2a+4)$
$(a-1)(a^2+a+1).$

Ex. 2. *Factorise* $a(a+1)x^2+(a+b)xy-b(b-1)y^2$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2x^2-b^2y^2+ax^2+(a+b)xy+by^2$
$=(ax+by)(ax-by)+(ax+by)(x+y)$
$=(ax+by)(ax-by+x+y)$
$=(ax+by)\{(a+1)x-(b-1)y\}.$

Ex. 3. *Factorise* $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$.

$x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz=x^2-2xz-(y^2-4yz+3z^2)$
$=x^2-2xz-(y-3z)(y-z)$
$=x^2+x\{(y-3z)-(y-z)\}-(y-3z)(y-z)$
$=x^2+x(y-3z)-x(y-z)-(y-3z)(y-z)$
$=x\{x+y-3z)-(y-z)(x+y-3z)$
$=(x+y-3z)(x-y+z).$

Ex. 4. *Resolve* $(x+1)(x+2)(2x-3)(2x-5)+12$ *into factors.* [*C. U.* 1941]

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+1)(2x-3)\}\{(x+2)(2x-5)\}+12$
$=(2x^2-x-3)(2x^2-x-10)+12$
$=(a-3)(a-10)+12$ [$2x^2-x$-কে a ধরিয়া]
$=a^2-13a+30+12=a^2-13a+42$
$=(a-6)(a-7)$
$=(2x^2-x-6)(2x^2-x-7)$ ['a'-এর মান বসাইয়া]
$=(2x^2-4x+3x-6)(2x^2-x-7)$
$=(x-2)(2x+3)(2x^2-x-7).$

এখানে চারিটি বন্ধনীর অন্তর্গত চারিটি উৎপাদকের দুইটি দুইটি করিয়া এমনভাবে লওয়া হইল, যেন লব্ধ দুই গুণফলে x^2 এবং x-এর সাংখ্য সহগ দুইটি সমান হয়।

Ex. 5. *Factorise* $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+3.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+1\right)$
$=\frac{a+b+c}{b}+\frac{b+c+a}{a}+\frac{b+a+c}{c}$
$=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$

Ex. 6. *Simplify :*

$$\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{-\{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$=\frac{-\{-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$=bc+ca+ab.$

Ex. 7. *Resolve* $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ *into factors.*

$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y),$
[$x=a^2$, $y=b^2$ এবং $z=c^2$ লিখিলে]
$=-(y-z)(z-x)(x-y)$
$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$
$=-(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)(a+b)(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$

Ex. 8. *Resolve* $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$ *into factors.*

ধর, $(x+a)=p$, $x+b=q$ এবং $x+c=r$;

$\therefore\ p-q=x+a-x-b=a-b$, $q-r=x+b-x-c=b-c$

এবং $r-p=x+c-x-a=c-a.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=p^2(q-r)+q^2(r-p)+r^2(p-q)$
$=-(q-r)(r-p)(p-q)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

বিকল্প পদ্ধতি। $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$
$=(x^2+2ax+a^2)(b-c)+(x^2+2bx+b^2)(c-a)$
$+(x^2+2cx+c^2)(a-b)$
$=x^2(b-c+c-a+a-b)+2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=x^2\times 0+2x\times 0-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

Ex. 9. *Factorise* $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3.$

মনে কর, $a=x(y-z)$, $b=y(z-x)$ এবং $c=z(x-y)$

$\therefore\ a+b+c=x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0.$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc.$

অর্থাৎ $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$=3.x(y-z).y(z-x).z(x-y)$
$=3xyz(y-z)(z-x)(x-y).$

Ex. 10. *Factorise* $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3.$

মনে কর, $y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c.$

$\therefore\ a+b+c=y+z+z+x+x+y=2(x+y+z).$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশিমালা} = \{2(x+y+z)\}^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 - (x+y)^3$$
$$= (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$
$$= 3(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$= 3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

Ex. 11. *If* $2s = x+y+z$, *show that* $(s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3xyz = s^3$.

এখানে $2s = x+y+z$. $\therefore 3s = x+y+z+s$

বা, $(s-x)+(s-y)+(s-z) = s$ [পক্ষান্তর করিয়া]

উভয় পক্ষের ঘন করিয়া

$$\{(s-x)+(s-y)+(s-z)\}^3 = s^3.$$

$$\text{বাম পক্ষ} = (s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3\{(s-y)+(s-z)\}\{(s-z)+(s-x)\}\{(s-x)+(s-y)\}$$
$$= (s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3(2s-y-z)(2s-z-x)(2s-x-y)$$
$$= (s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3xyz.$$
$$\therefore (s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3xyz = s^3.$$

Ex. 12. *Factorise* $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1$.

$$x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1$$
$$= (x^4+1) - (5x^3+5x) - 12x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - 2x^2 - 5x(x^2+1) - 12x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - 5x(x^2+1) - 14x^2$$
$$= a^2 - 5ax - 14x^2 \quad [\, x^2+1 = a \text{ লিখিয়া} \,]$$
$$= a^2 - 7ax + 2ax - 14x^2$$
$$= a(a-7x) + 2x(a-7x) = (a-7x)(a+2x)$$
$$= (x^2+1-7x)(x^2+1+2x) = (x^2-7x+1)(x+1)^2.$$

দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে প্রথম ও শেষপদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সহগগুলি সমান। এরূপ ক্ষেত্রে সাধারণতঃ সমান সহগ-বিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র সংযুক্ত করিয়া লিখিতে হয়।

Examples II

Resolve into factors :

1. (i) $x^2+x-132$. (ii) $x^2-7x-44$.
(iii) $(a+b)^2-11c(a+b)-42c^2$. (iv) $18x^2-51xy+35y^2$.
(v) $6(a^2+2b)^2+7(a^4-4b^2)-20(a^2-2b)^2$.

2. (i) $4m^2-(n+p)^2$. (ii) $16-(a-b)^2$.
(iii) $4(3a-7b)^2-(2a-3b)^2$. (iv) $(x-5y)^2-(5x+1)^2$.
(v) $45x^2-125z^6$.

3. (i) a^4+64. (ii) x^4+4y^4. (iii) $4x^4+81$. (iv) x^4-16.

4. (i) x^4+2x^2+9. (ii) a^4+3a^2+4. (iii) a^4+2a^2-3.
(iv) x^8+81x^4+6561.

5. (i) $x^4-3x^2y^2+y^4$. (ii) $m^4+12m^2n^2+64n^4$.
(iii) $4a^4-21a^2b^2+b^4$. (iv) $x^4-2x^2y^2-63y^4$.

6. (i) $x^6-16x^4+2x^3+1$. (ii) $2(cd-xy)+x^2+y^2-c^2-d^2$.
(iii) $9x^2-24xy-4p^2-q^2+4pq+16y^2$.

7. (i) $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$.
(ii) $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$.
(iii) $(1-y^2)(1+x)^2-(1-x^2)(1+y)^2$,
(iv) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$.

8. (i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$.
(ii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$.
(iii) $(x+4)(x+6)(x-5)(x-7)-504$.
(iv) $(2x-1)(2x+5)(3x+2)(3x-7)-34$.
(v) $4x(x+1)(3x+2)(3x-1)-15$.
(vi) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

9. (i) $375x^3+3$. (ii) $729-a^3$. (iii) $1-343x^3$.
(iv) $(2c+d)^3+343$. (v) $8x^3+(y-2x)^3$.

10. (i) x^6-64. (ii) $64x^6+729$. (iii) $216x^3-\frac{y^3}{27}$.

(iv) $\frac{125}{a^3b^3}-1$. (v) $\frac{x^3}{512}-\frac{64}{x^3}$. (vi) $x^7-16x^3+x^4-16$.

11. (i) $a^3-b^3-c^3-3abc$. (ii) $8a^3+27b^3-c^3+18abc$.
(iii) $x^9+x^6-3x^5+1$. (iv) $x^9-6x^4+8x^3+1$.

12. (i) $2x^2+3y^2+4z^2+5xy+6zx+7yz$.
(ii) $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$.
(iii) $4x^2-3y^2-9z^2+12yz-4xy$.

13. Find the factors of the following expressions by inspection :
(i) x^3-3x^2+4. (ii) $2x^3-9x^2+23x-16$.
(iii) $x^3-11x^2+36x-36$. (iv) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.
(v) $x^4-9x^2+4x+12$. (vi) $x^4-11x^3+44x^2-76x+48$.
(vii) $x^4+15x^3+70x^2+120x+64$.

14. Factorise :
(i) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$.
(ii) $x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4$.
(iii) $a^4+4a^3b-10a^2b^2+4ab^3+b^4$.

15. Resolve the following expressions into factors :
(i) $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.
(ii) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.
(iii) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.
(iv) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc$.
(v) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.
(vi) $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.
(vii) $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$.
(viii) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.
(ix) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$
$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.
(x) $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2b)^3$.
(xi) $(2y-x)^3+(2x-y)^3-(x+y)^3$.
(xii) $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz$.

16. Prove that
(i) $(1+xy)(1+xz)(y-z)+(1+yz)(1+yx)(z-x)$
$+(1+zx)(1+zy)(x-y)=(y-z)(z-x)(x-y)$.

(ii) $a^2x + b^2y + c^2z = (x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$, if $a^2 = x^2 - yz$, $b^2 = y^2 - zx$ and $c^2 = (z^2 - xy)$.

(iii) $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + 3(y+z)(z+x)(x+y) = 0$, if $x+y+z+w=0$.

17. If $2s = a+b+c$, show that

(i) $(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

(ii) $2(s-a)(s-b)(s-c) + a(s-b)(s-c) + b(s-c)(s-a) + c(s-a)(s-b) = abc$.

(iii) $(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 - 3(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

18. If $a+b+c=0$, prove that

(i) $(2a-b)^3 + (2b-c)^3 + (2c-b)^3 = 3(2a-b)(2b-c)(2c-a)$.

(ii) $\dfrac{a^2}{2a^2+bc} + \dfrac{b^2}{2b^2+ca} + \dfrac{c^2}{2c^2+ab} = 1$.

19. Simplify :

(i) $\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$.

(ii) $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$.

20. If $x = b+c-a$, $y = c+a-b$ and $z = a+b-c$, show that $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^2 - 3abc)$.

ANSWERS

1. (i) $(x+12)(x-11)$. (ii) $(x+4)(x-11)$. (iii) $(a+b+3c)(a+b-14c)$. (iv) $(3x-5x)(6x-7y)$. (v) $(7a^2-6b)(14b-a^2)$.

2. (i) $(2m+n+p)(2m-n-p)$. (ii) $(4+a-b)(4-a+b)$. (iii) $(4a-11b)(8a-17b)$. (iv) $(5y-6x-1)(4x+5y+1)$. (v) $5(3x+5z^3)(3x-5z^3)$.

3. (i) $(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$. (ii) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$. (iii) $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$. (iv) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

4. (i) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$. (ii) $(a^2+a+2)(a^2-a+2)$. (iii) $(a-1)(a+1)(a^2+3)$. (iv) $(x^4+9x^2+81)(x^4-9x^2+81)$.

5. (i) $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$.
(ii) $(m^2+2mn+8n^2)(m^2-2mn+8n^2)$.
(iii) $(2a^2+5ab+b^2)(2a^2-5ab+b^2)$.
(iv) $(x-3y)(x+3y)(x^2+7y^2)$.

6. (i) $(x^3+4x^2+1)(x^3-4x^2+1)$. (ii) $(x-y+c-d)(x-y-c+d)$.
(iii) $(3x-4y+2p-q)(3x-4y-2p+q)$.

7. (i) $(xy+ab)(ay^2+b^2x)$. (ii) $(1-ax)(1-ax-cx^2)$.
(iii) $2(1+x)(1+y)(x-y)$. (iv) $(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$.

8. (i) $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$. (ii) $(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$.
(iii) $(x+2)(x-3)(x+7)(x-8)$.
(iv) $(2x+1)(3x-1)(6x^2+x-36)$.
(v) $(6x^2+4x+3)(6x^2+4x-5)$.
(vi) $(x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120)$.

9. (i) $3(5x+1)(25x^2-5x+1)$. (ii) $(9-a)(a^2+9a+81)$.
(iii) $(1-7x)(1+7x+49x^2)$.
(iv) $(2c+d+7)(4c^2+4cd+d^2-14c-7d+49)$.
(v) $y(12x^2-6xy+y^2)$.

10. (i) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
(ii) $(4x^2+9)(16x^4-36x^2+81)$.
(iii) $\left(6x-\frac{y}{3}\right)\left(36x^2+2xy+\frac{y^2}{9}\right)$.
(iv) $\left(\frac{5}{ab}-1\right)\left(\frac{25}{a^2b^2}+\frac{5}{ab}+1\right)$.
(v) $\left(\frac{x}{8}-\frac{4}{x}\right)\left(\frac{x^2}{64}+\frac{1}{2}+\frac{16}{x^2}\right)$.
(vi) $(x+1)(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^2-x+1)$.

11. (i) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2-bc+ca+ab)$.
(ii) $(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab)$.
(iii) $(x-1)^2(x^3+x^2+1)(x^4+x^3+2x^2+2x+1)$.
(iv) $(x^3+2x+1)(x^6-2x^4-x^3+4x^2-2x+1)$.

12. (i) $(2x+3y+4z)(x+y+z)$. (ii) $(a-3b+c)(a+b-3c)$.
(iii) $(2x-3y+3z)(2x+y-3z)$.

13. (i) $(x+1)(x-2)^2$.
(ii) $(x-1)(2x^2-7x+16)$. (iii) $(x-2)(x-3)(x-6)$.
(iv) $(x-1)^2(x+3)^2$. (v) $(x+1)(x+3)(x-2)^2$.
(vi) $(x-2)^2(x-3)(x-4)$. (vii) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$.

14. (i) $(x-1)^2(x^2+1)$. (ii) $(x^2-xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$.
(iii) $(a-b)^2(a^2+6ab+b^2)$.

15. (i) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

(ii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

(iii) $(b+c)(c+a)(a+b)$.

(iv) $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

(v) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

(vi) $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$.

(vii) $3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)$. (viii) $24abc$.

(ix) $2abc$. (x) $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

(xi) $-3(2x-y)(2y-x)(x+y)$. (xii) $(x+y+z)^3$.

19. (i) $a+b+c$. (ii) 2.

তৃতীয় অধ্যায়

সূচকতত্ত্ব (Laws of Indices)

3·1. প্রাথমিক বীজগণিতে $a \times a$ কে a^2, $a \times a \times a$ কে a^3 প্রভৃতি দ্বারা সূচিত হইয়াছে। সেইরূপ m কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a \times a \times a \times \cdots$ (m-সংখ্যক গুণনীয়ক) এর গুণফলকে a^m রূপে লেখা হয়।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে এক বা একাধিক বার সেই সংখ্যা বা রাশিদ্বারা পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ সংখ্যা বা রাশির **ঘাত** বা **শক্তি** (Power) বলে। যথা, $2 \times 2 \times 2$ এর গুণফলটি '2' এই সংখ্যার তৃতীয় ঘাত এবং ইহা 2^3 রূপে লিখিত হয়; অথবা $3x \times 3x \times 3x \times 3x$ এর গুণফল $3x$ রাশির চতুর্থ ঘাত, এবং ইহাকে $(3x)^4$ রূপে লেখা হয়। এক্ষেত্রে সংখ্যা বা রাশির মাথায় লিখিত 3 বা 4 সংখ্যা পূর্বের সংখ্যা বা রাশির ঘাতের **সূচক** (Index) নামে অভিহিত।

সাধারণভাবে, 'n' যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে $a \times a \times a \times \cdots$ (n-সংখ্যক গুণনীয়ক) $= a^n$, এবং ইহা a রাশির n-ঘাত, এবং 'n' ইহার সূচক।

এখানে উল্লেখযোগ্য যে, 'a' কে a^1 রূপে কল্পনা করা হয়, অর্থাৎ ইহার সূচক 1.

সূচকের এই সংজ্ঞা-অনুসারে (অখণ্ড ধনাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে) আমরা কয়েকটি মৌলিক সূচক-সম্বন্ধীয় নিয়ম নিম্নে প্রমাণ করিব।

3·2. I. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}.$$

প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a^m = a \times a \times a \times \cdots$ m-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$a^n = a \times a \times a \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$\therefore\ a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots$ m-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times a \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a \times a \times a \times \cdots$ $(m+n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$. [সংজ্ঞানুসারে]

অনুসিদ্ধান্ত। যদি m, n, p অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}.$$

প্রমাণ। $(a^m \times a^n) \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$;

ঐরূপ, $m, n, p, q, \cdots$ অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots = a^{m+n+p+q+\cdots}$$

II. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং m > n হইলে,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

প্রমাণ। $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a \times a \times a \times \cdots m\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times \cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$

$= a \times a \times a \times \cdots (m-n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$.

[হরের 'n'-সংখ্যক 'a' লবের n-সংখ্যক 'a' র সহিত কাটিয়া গিয়া লবে $(m-n)$-সংখ্যক a পড়িয়া রহিল।]

III. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

প্রমাণ। $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots$ (n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a^{m+m+m+\cdots}$ (n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত) [I এর অনুসিদ্ধান্ত]

$= a^{m \times n} = a^{mn}$.

IV. n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^n \times b^n = (ab)^n.$$

প্রমাণ। $a^n \times b^n = (a \times a \times a \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= ab \times ab \times ab \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (ab)^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a^n \times b^n \times c^n \times \cdots = (abc\cdots)^n$.

3·3. উপরের চারিটি নিয়ম প্রতিষ্ঠিত করিতে আমরা সূচকগুলিকে অখণ্ড ধনসংখ্যা ধরিয়া লইয়াছি। এখন m যদি অখণ্ড ঋণরাশি হয়, ধরা যাক, -3; তবে উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে a^{-3} র কোন ব্যাখ্যা করা সম্ভবপর হইবে না অর্থাৎ উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে a এর -3 বার ক্রমিক গুণফল বাহির করিতে হইবে—যাহা অর্থহীন। সূচক যদি শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলেও উপরোক্ত সংজ্ঞায় একই অসুবিধা দেখা দিবে। সুতরাং, এক্ষণে a^m এর

সূচক 'm', শূন্য বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হইলে a^m এর সংজ্ঞা নির্ধারণ না করিয়া আমরা আর অগ্রসর হইতে পারি না। এই সকল ক্ষেত্রে উপরের নিয়ম I, অর্থাৎ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এর সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গতি রাখিয়া a^m এর এমন সংখ্যা দিতে হইবে, যাহা সহজে বোধগম্য হয়। অতএব, সূচক 'm' ও 'n' শূন্য, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ যাহাই হউক না কেন আমরা ধরিয়া লইব $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

(i) a^o এর সংজ্ঞা নির্ধারণ :

যেহেতু m এবং n যাহাই হউক না কেন $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ধরা হইয়াছে, অতএব, $m = o$ বসাইয়া $a^o \times a^n = a^{o+n} = a^n$.

$$\therefore \quad a^o = \frac{a^n}{a^n} = 1. \qquad [\, a \neq 0 \text{ ধরিয়া} \,]$$

অর্থাৎ 'a' র শূন্য ভিন্ন যে-কোন মানের জন্য, $\mathbf{a^o = 1.}$

(ii) $a^{\frac{p}{q}}$ এর সংজ্ঞা নির্ধারণ (p এবং q ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) :

যেহেতু আমরা ধরিয়া লইয়াছি যে, m এবং n ভগ্নাংশ হইলেও নিয়ম I কার্যকরী হইবে, অতএব, ধরা যাক

$$m = \frac{p}{q},\ n = \frac{p}{q} \text{ এবং } a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}.$$

অতএব, $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}}.$

এই ভাবে $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \cdots$ q-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots \text{ } q\text{-সংখ্যক পদ}}$$

অর্থাৎ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p$; $\therefore$ $a^{\frac{p}{q}}$, a^p এর q-তম মূল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $p = 1$ ধরিলে আমরা পাই $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$;

$\therefore$ $a^{\frac{1}{q}}$, 'a' এর q-তম মূল, অর্থাৎ $\mathbf{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. আবার পূর্বের ন্যায়

$a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots$ p-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots \text{ p-সংখ্যক পদ}} = a^{\frac{1}{q}\cdot p} = a^{\frac{p}{q}},$$

$$\text{অর্থাৎ } \left(\mathbf{a}^{\frac{1}{q}}\right)^{\mathbf{p}} = \mathbf{a}^{\frac{p}{q}}$$

সুতরাং, $a^{\frac{1}{p}}$কে p তম ঘাতে উন্নীত করিলে $a^{\frac{p}{q}}$ পাওয়া যাইবে।

এখানে একটি লক্ষণীয় বিষয় হইল যে, q-তম মূল বলিতে যদি সংখ্যার চিহ্নবর্জিত বীজটির কথা না ধরা যায়, তবে $(a^p)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ নাও হইতে পারে। যেমন, $(a^4)^{\frac{1}{2}} = \pm a^2$. কিন্তু $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^4 = +a^2$.

(iii) $\mathbf{a^{-n}}$ এর সংজ্ঞা নির্ধারণ, (n ধনসংখ্যা) :

পূর্বেকার ন্যায় যেহেতু m, n ঋণাত্মক হইলেও $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

অতএব, $m = -n$ বসাইয়া $a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

$$\text{অর্থাৎ, } \quad \mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

3·4. দেখা যাইতেছে যে, নিয়ম I কে ধরিয়া লইলে $a^{\frac{p}{q}}$, a^0, এবং a^{-n} এর অর্থ নির্ধারণ করা যায়। এখন এই সকল রাশির এই সকল অর্থ ধরিলেও বাকি তিনটি নিয়ম

II $a^m \div a^n = a^{m-n}$

III $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

IV $(ab)^n = a^n b^n$

সহজেই প্রমাণ করা যায়।

তাহা হইলে, এখন হইতে m এবং n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ, যাহাই হউক না কেন, উপরের I, II, III, IV সূচক নিয়ম চারিটি সর্বক্ষেত্রে প্রয়োগ করিব (যদি 'a' র মানের কোন অসঙ্গতি না থাকে)*।

নিম্নে এই চারিটি নিয়মের প্রয়োগের কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

3·5. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the value of* $\dfrac{2a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 6a^{-\frac{7}{3}}}{3a^{-\frac{5}{3}} \times 4a^{\frac{3}{2}}}$.

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{2 \times 6}{3 \times 4} \cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

* যথা, $a = -4$ হইলে, $a^{\frac{1}{2}}$ অর্থহীন হইবে।

Ex. 2. *Simplify* $(x^a y^{-b})^3 \times (x^3 y^2)^{-a}$.

প্রদত্ত রাশি $= x^{3a} y^{-3b} \times x^{-3a} y^{-2a} = x^{3a-3a} \times y^{-3b-2a}$

$$= x^0 y^{-(2a+3b)} = \frac{1}{y^{2a+3b}}.$$

Ex. 3. *Find the value of* $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Ex. 4. *Express in a simplified form :*

(i) $\sqrt[3x]{a^3} \div \sqrt[x]{a^2}$;

(ii) $\sqrt[3]{ab^{-1}c^{-2}} \times (a^{-1}b^{-2}c^{-4})^{-\frac{1}{6}}$.

(i) প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{3}{3x}} \div a^{\frac{2}{x}} = \dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{a^{\frac{2}{x}}} = a^{\frac{1}{x}-\frac{2}{x}} = a^{-\frac{1}{x}}$.

(ii) প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}}$

$$= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \times b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times c^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}} \times b^0 \times c^0 = a^{\frac{1}{2}}.$$

Ex. 5. *Multiply* $7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1$ by $3x^{\frac{1}{3}} + 1$.

$$\begin{array}{r} 7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ 3x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ \hline 21x - 6x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} \\ + 7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ \hline 21x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1 \end{array}$$

Ex. 6. *Divide* $a^{\frac{3n}{2}} - a^{-\frac{3n}{2}}$ *by* $a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}$.

ভাগফল $= \left\{\left(a^{\frac{n}{2}}\right)^3 - \left(a^{-\frac{n}{2}}\right)^3\right\} \div \left(a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}\right)$

$$= \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 + \left(a^{\frac{n}{2}}\right)\left(a^{-\frac{n}{2}}\right) + \left(a^{-\frac{n}{2}}\right)^2$$

$$= a^n + 1 + a^{-n}.$$

Ex. 7. *Find the square of* $x^{2^{n-1}}$ *and hence find the product* $\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)$.

$$\left(x^{2^{n-1}}\right)^2 = x^{2^{n-1}\times 2} \qquad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$$
$$= x^{2^{n-1+1}} = x^{2^n}.$$

আবার

$$\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right) = \left(x^{2^{n-1}}\right)^2 - \left(y^{2^{n-1}}\right)^2$$
$$= x^{2^n} - y^{2^n}.$$

Ex. 8. *Simplify* $\left\{\dfrac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\sqrt{3.3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$. [*S. F. 1958*]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left\{\frac{(3^2)^{n+\frac{1}{4}}.3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{n}{2}}}{3\,.\,3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{\frac{3^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}}{3^{1-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left\{3^{\left(2n+1+\frac{n}{2}\right)-\left(1-\frac{n}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{n}} = (3^{3n})^{\frac{1}{n}} = 3^3 = 27.$$

Ex. 9. *Show that* $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}} = 1.$

$$\text{বাম পক্ষ} = \sqrt[bc]{x^{b-c}} \times \sqrt[ca]{x^{c-a}} \times \sqrt[ab]{x^{a-b}}$$
$$= x^{\frac{b-c}{bc}} \times x^{\frac{c-a}{ca}} \times x^{\frac{a-b}{ab}}$$
$$= x^{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} = x^0 = 1.$$

Ex. 10. *Simplify* $\dfrac{(bc)^{b-c}\,(ca)^{c-a}\,(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}\,b^{c-a}\,c^{a-b})^{-1}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{b^{b-c}\times c^{b-c}\times c^{c-a}\times a^{c-a}\times a^{a-b}\times b^{a-b}}{a^{-(b-c)}\times b^{-(c-a)}\times c^{-(a-b)}}$$
$$= \frac{b^{b-c+a-b}\times c^{b-c+c-a}\times a^{c-a+a-b}}{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}}$$
$$= \frac{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}}{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}} = 1.$$

Ex. 11. *If* $a=b^x$, $b=c^y$ *and* $c=a^z$, *show that* $xyz=1$.

এখানে, $a=b^x=(c^y)^x=c^{xy}=(a^z)^{xy}=a^{xyz}$.

$\therefore\ a=a^{xyz}.\qquad \therefore\ xyz=1.$

Ex. 12. *If* $x^y=y^x$, *show that* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$, *and if* $x=2y$, *prove that* $y=2$.

যেহেতু, $x^y=y^x$, $\therefore\ y^{x/y}=x$ [উভয় পক্ষের y-তম মূল লইয়া]

$\therefore\ \dfrac{1}{y^{x/y}}=\dfrac{1}{x}$, অথবা $\dfrac{x^{x/y}}{y^{x/y}}=\dfrac{x^{x/y}}{x}$

[উভয় পক্ষকে $x^{x/y}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x/y}=x^{\frac{x}{y}-1}.$

এক্ষণে যদি $x=2y$ হয়, তবে $\dfrac{x}{y}=2$

অতএব, $(2)^2=x^{2-1}.\qquad \therefore\ 4=x.$

কিন্তু $x=2y,\qquad \therefore\ 2y=4.\qquad \therefore\ y=2.$

Ex. 13. *If* $2^{x+3}+2^{x+1}=320$ *find the value of* x.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $2^x.2^3+2^x.2=320$,

অথবা, $2^x(2^3+2)=320$, অথবা, $2^x.10=320$.

$\therefore\ 2^x=32=2^5.\qquad \therefore\ x=5.$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরে প্রদর্শিত সমীকরণের ন্যায় সূচকে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত সমীকরণগুলিকে "সূচক সমীকরণ" (Exponential Equation) বলে।

Ex. 14. *If* $x=3+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$, *prove that*

$$x^3-9x^2+18x-12=0.$$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $x-3=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}.\quad \therefore\ (x-3)^3=\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3.$

$$\therefore\ x^3-9x^2+27x-27=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=3^2+3+3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(x-3)$$

$$=12+9(x-3).$$

$\therefore\ x^3-9x^2+18x-12=0.$

Examples III

1. Express with positive indices :

(i) $2x^{-\frac{1}{2}}$. (ii) $5x^{-\frac{2}{5}}$. (iii) $3x^{-2}a^{-3}$.

(iv) $\dfrac{1}{5x^{-\frac{1}{4}}}$. (v) $\dfrac{\sqrt[4]{a^b}}{a^c}$. (vi) $\dfrac{x^2y^{-3}}{z^5}$.

(vii) $\dfrac{3a^{-3}x^2}{5y^2b^{-3}}$. (viii) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^{-3}}}$. (ix) $a^{-2}x^{-\frac{1}{2}} \div a^{-3}$.

(x) $\sqrt[4]{a^{-3}} \div \sqrt[5]{a^7}$.

2. Express with radical sign and positive indices.

(i) $x^{-\frac{3}{5}}$. (ii) $4x^{-\frac{1}{3}}$. (iii) $\dfrac{1}{5x^{\frac{1}{5}}}$. (iv) $\dfrac{2}{a^{-\frac{3}{4}}}$.

(v) $x^{-\frac{3}{2}} \div 2a^{-\frac{1}{2}}$. (vi) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$. (vii) $\sqrt[a]{x^3} \div \sqrt[2a]{x^5}$.

(viii) $\sqrt[3]{a^{-x}} \div \sqrt[3]{a^{-2x}}$. (ix) $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt{a^{-3}}$. (x) $\dfrac{3a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}}$.

3. Find the value of :

(i) $32^{\frac{2}{5}}$. (ii) $(16)^{-\frac{3}{4}}$. (iii) $\sqrt{36^{-3}}$.

(iv) $\sqrt[3]{(125)^{-1}}$. (v) $243^{\frac{3}{5}}$. (vi) $(\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$.

(vii) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{32}{243}\right)^{-8}}$. (viii) $\left(\dfrac{243^{\frac{1}{5}}}{343^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$. (ix) $\dfrac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} \times \dfrac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$.

Simplify and express with positive indices :

4. (i) $\left(\dfrac{27x^3}{8a^{-6}}\right)^{-\frac{2}{3}}$. (ii) $\left\{\sqrt[4]{\left(x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^3}\right\}^{-\frac{2}{3}}$.

(iii) $\left\{x^{\frac{1}{n}} \times \sqrt[n]{x^{-\frac{2}{n}}}\right\}^{\frac{n}{n-2}}$.

5. (i) $\sqrt[6]{a^4x^6} \times (a^{\frac{2}{3}}x^{-1})^2 \div (a^{-2}x)^{-1}$.

(ii) $\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y\sqrt[3]{x}}$.

6. (i) $\left(a^{-\frac{1}{2}}x^3\sqrt{ax^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(ii) $\frac{b}{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{ac^{-1}}\times\frac{\sqrt[3]{c^4}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$.

7. (i) $\left(\frac{a^{-3}}{b^{-\frac{2}{3}}c^{-1}}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[6]{b^3}}{a^2c^{-1}}\right)^{-2}$.

(ii) $\left(\sqrt[7]{\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-3}}{x^{\frac{1}{2}}a^{-3}}}\times\sqrt[9]{\frac{a^{\frac{4}{5}}x^{-\frac{2}{7}}}{xa^{-1}}}\right)$.

Simplify :

8. $(a^{n^2-1})^{\frac{n}{n+1}}+\frac{\sqrt[n]{a^{2n}}}{a}-\left(a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{n^2-1}-\frac{\sqrt{a^{2n}}}{a^{n-1}}$.

9. $\left\{\frac{x^{m-n}}{\sqrt[n]{x^{n^2-mn}}}\times x^{2(n-m)}\right\}^{r}$.

10. (i) $\left(x^{1+\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{p+q}}\div\sqrt[q]{\frac{x^{2p}}{(x^{-1})^{-p}}}$. (ii) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\left(\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{6}}}\right)^2\div\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Express in Simplest form

11. (i) $\left(8^{\frac{2}{3}}+4^{\frac{3}{2}}\right)\times16^{-\frac{3}{4}}$. (ii) $\left\{\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^4$.

12. (i) $\frac{2^{n+4}-2\times2^{n+1}}{2^{n+2}\times3}$. (ii) $\frac{2^n\times(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\times2^{n-1}}\times\frac{1}{4^{-n}}$.

13. (i) $\frac{3^{2n+4}-7.3^{2n+2}}{2\times3^{n+1}}$. (ii) $\frac{3^n-8.3^{n-2}}{3^n-3^{n-1}}$.

14. (i) $\frac{\left\{9^n.3^2\times\frac{1}{3^{-n}}\right\}-27^n}{3^{3n}\times8}$. (ii) $\left\{\frac{4^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2.2^m}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$.

[*C.U. 1947*]

15. $\frac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. 16. $\frac{2^a.(2^{a-1})^a}{2^{a+1}.2^{a-1}}.\left\{\frac{8^{a/3}}{4}\right\}^{-a}$.

17. $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^{p}\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q}}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p}\left(q-\frac{1}{p}\right)^{q}}$.

18. $\dfrac{\left\{\left(a^{m}\right)^{\frac{1}{r}}\left(a^{q}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^{n}}\left(\sqrt[m]{b}\right)^{r}\right\}^{mq}} \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{q}\right\}^{r}$.

19. Express as a whole number

$$(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{(8)^{-\frac{2}{3}}}+\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{4^{-\frac{2}{3}}}.$$

20. Write down the value of

(i) $(x^{\frac{1}{2}}-3)(x^{\frac{1}{3}}-3)$. (ii) $(x^{m}-y^{n})(x^{-m}+y^{-n})$.

(iii) $\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)^{3}$.

(iv) $(5x^{a}y^{b}-3x^{-a}y^{-b})(4x^{a}y^{b}+5x^{-a}y^{-b})$.

(v) $\left\{(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}\right\}^{2}$.

Show that :

21. $\sqrt{x^{-1}y}\times\sqrt{y^{-1}z}\times\sqrt{z^{-1}x}=\sqrt{xyz}$.

22. $\left(\dfrac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{a}\times\left(\dfrac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{b}\times\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{c}=1$.

23. $(x^{a})^{b-c}\times(x^{b})^{c-a}\times(x^{c})^{a-b}=1$.

24. $\left(\dfrac{x^{l}}{x^{m}}\right)^{l+m}\times\left(\dfrac{x^{m}}{x^{n}}\right)^{m+n}\times\left(\dfrac{x^{n}}{x^{l}}\right)^{n+l}=1$.

25. $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{z-x}}\times\left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}=1$.

26. $\left(\dfrac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\dfrac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{\frac{1}{ab}}=1$.

27. $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{b}}{x^{c}}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^{c}}{x^{a}}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^{a}}{x^{b}}}=1$.

28. $\left(\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{1}{ab}}=1$.

29. $\left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n}\times\left(\dfrac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l}\times\left(\dfrac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}=1.$

30. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}=1.$

31. $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m}\times\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}=1.$

32. $\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\dfrac{1}{x^{a-b}+1+x^{c-b}}+\dfrac{1}{x^{a-c}+x^{b-c}+1}=1.$

33. If $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$, $c=xy^{r-1}$, show that
$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1.$$

34. If $a=x^{q+r}y^p$, $b=x^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$, show that
$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1.$$

35. If $a^x=b^y=c^z$ and $b^2=ac$, prove that
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}.$$

36. If $m=a^x$, $n=a^y$, $a^2=(m^y n^x)^z$, show that
$$xyz=1.$$

37. If $\left(\dfrac{y}{z}\right)^a\left(\dfrac{z}{x}\right)^b\left(\dfrac{x}{y}\right)^c=1$, prove that
$$\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}}=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$$

38. Simplify $\sqrt[10]{a^8\sqrt{a^8\sqrt{a^{-8}}}}$.

39. Prove that

(i) if $x=3^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}$, then $x^4-16x^2+4=0$.

(ii) if $x=1+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$, then $x^3-3x^2-3x-1=0$.

40. (i) If $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\times\sqrt[3]{z}=0$, prove that $(x+y+z)^3=27xyz$.

(ii) If $a\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[3]{x}+c=0$, show that
$$a^3x^2+b^3x+c^3=3abcx.$$

(iii) If $x=\sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3}+a\}}-\sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3}-a\}}$, show that $x^3+3bx-2a=0$.

41. Find the product of

(i) $\left(x^{\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{3}}\right)\times\left(x^{\frac{1}{3}}+1-x^{-\frac{1}{3}}\right)$.

(ii) $\left(2-x^{\frac{1}{2}}+x\right)\times\left(2+x^{\frac{1}{2}}+x\right)$.

(iii) $(a^{x}+2+3a^{-x})\times(a^{x}-2+3a^{-x})$.

(iv) $\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}+2\right)\times\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}+3\right)$.

(v) $\left(x+x^{\frac{3}{2}}+x^{2}\right)\times\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)$.

42. Divide

(i) $\left(x^{\frac{4}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}y\right)$ by $\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}\right)$.

(ii) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right).\left(x^{\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}\right)$ by $\left(x^{\frac{2}{3}}+4+4x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

(iii) $\left(x-7x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)$ by $x^{\frac{1}{2}}\left(x-5\sqrt{x}-14\right)$.

43. Solve :

(i) $3^{x}+81=10.3^{x}$. (ii) $7.2^{x+1}-8.2^{x-2}=12$.

(iii) $4^{x+1}+4^{x-1}=17$. (iv) $9^{x+1}=3^{2x+1}+4374$.

(v) $ba^{x-2}=ab^{x-2}\ (a\neq b)$.

44. (i) If $a^{3}=b^{4}$, prove that $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{4}}$.

(ii) If $(a^{n^3})^{n}=(a^{3^n})^{3}$, prove that $\left(n^{4}\right)^{\frac{1}{n+1}}=3$.

45. Show that, if

$$(1-x^{3})^{\frac{1}{3}}(y-z)+(1-y^{3})^{\frac{1}{3}}(z-x)+(1-z^{3})^{\frac{1}{3}}(x-y)=0,$$

and x, y, z are all unequal, then

$$(1-x^{3})(1-y^{3})(1-z^{3})=(1-xyz)^{3}.$$

ANSWERS

1. (i) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$; (i) $\frac{5}{x^{\frac{2}{5}}}$; (iii) $\frac{3}{x^{2}a^{3}}$; (iv) $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{4}}$;

(v) $a^{\frac{1}{4}b-c}$; (vi) $\frac{x^{2}}{y^{3}z^{5}}$; (vii) $\frac{3x^{2}b^{3}}{5a^{3}y^{2}}$; (viii) $\frac{1}{5}x^{\frac{3}{5}}$;

(ix) $\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}}$; (x) $\frac{1}{a^{\frac{43}{20}}}$.

2. (i) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; (ii) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; (iii) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x}}$; (iv) $2\sqrt[4]{a^3}$;
(v) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x^3}}$; (vi) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; (vii) $\sqrt[2a]{x}$; (viii) $\sqrt[3]{a^x}$;
(ix) $\sqrt[6]{a^{13}}$; (x) $\frac{3}{\sqrt{a}}$.

3. (i) 4; (ii) $\frac{1}{8}$; (iii) $\frac{1}{216}$; (iv) $\frac{1}{5}$; (v) 27;
(vi) $\frac{2}{3}$; (vii) $\frac{6561}{256}$; (viii) $\frac{7}{3}$; (ix) 16.

4. (i) $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x^2a^4}$; (ii) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{4}}}$; (iii) x.

5. (i) 1; (ii) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. 6. (i) x; (ii) c.

7. (i) $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; (ii) $a^{\frac{7}{10}}/x^{\frac{9}{14}}$. 8. 0. 9. 1.

10. (i) 1; (ii) $(xy)^{\frac{13}{12}}$. 11. (i) $\frac{3}{2}$; (ii) $\sqrt[3]{2}$.

12. (i) 1; (ii) 2^{n^2}. 13. (i) 3^{n+1}; (ii) $\frac{1}{6}$.

14. (i) 1; (ii) 8. 15. $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b}$. 16. 1. 17. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$.

18. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$. 19. 11. 20. (i) $x^{\frac{5}{6}}-3x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+9$.
(ii) $\frac{x^m}{y^m}-\frac{y^m}{x^m}=(x^{2m}-y^{2m})/(x^my^m)$. (iii) $\frac{1}{27}a-a^{-1}+a^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}$.
(iv) $20x^{2a}y^{2b}+13-15x^{-2a}y^{-2b}$. (v) $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$. 38. a.

41. (i) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1-x^{-\frac{2}{3}}$; (ii) $4+3x+x^2$; (iii) $a^{2x}+2+9a^{-2x}$;
(iv) $x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+6+x^{-\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}$; (v) $x^{3/2}-x^3$.

42. (i) $x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-2y^{\frac{1}{3}})$; (ii) $x^{\frac{2}{3}}-2$; (iii) 1.

43. (i) 2; (ii) 0. (iii) 1; (iv) 3; (v) 3.

চতুর্থ অধ্যায়

উদ্‌ঘাতন (Involution)

4·1. উদ্‌ঘাতন।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে সেই সংখ্যা বা রাশির দ্বারা এক বা একাধিকবার উপর্যুপরি গুণ করিয়া ইহার দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি যে-কোন ঘাত নির্ণয়-কার্যের সাধারণ নাম উদ্‌ঘাতন (Involution)। সরাসরি গুণন দ্বারা সবসময়েই কোন সংখ্যা বা রাশির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি যে-কোন ঘাত নির্ণয় বা উদ্‌ঘাতন সম্পন্ন করা যায়। একপদ রাশির যে-কোন ঘাত নির্ণয়কার্য পূর্ববর্তী সূচকতত্ত্ব অধ্যায়েই আলোচিত হইয়াছে।

দুই বা ততোধিক একপদ রাশির গুণনকার্যে গুণফলের চিহ্ন-সংক্রান্ত নিয়মের এখানে উল্লেখ অপ্রাসঙ্গিক হইবে না। ঋণাত্মক বা ধনাত্মক যে-কোন একপদ রাশিকে **যুগ্ম ঘাতে** উন্নীত করিলে **লব্ধ গুণফল সতত ধনাত্মক** হইবে এবং ইহাকে **অযুগ্ম ঘাতে** উন্নীত করিলে **রাশিটি যে চিহ্নবিশিষ্ট লব্ধ গুণফল সেই চিহ্নবিশিষ্ট** হইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

$$(x^2)^5 = x^{2\times 5} = x^{10}. \qquad (2x)^4 = 2^4 \times x^4 = 16x^4.$$

$$(-2x)^6 = (-2)^6 \times x^6 = 64x^6.$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \times (a^2)^3 = -27a^6.$$

$$(-2x^2yz)^2 = (-2)^2.(x^2)^2.(y)^2.(z)^2 = 4x^4y^2z^2.$$

$$\left(\frac{3ab^2}{4x^2y}\right)^3 = \frac{3^3.a^3.(b^2)^3}{4^3.(x^2)^3.y^3} = \frac{27a^3b^6}{64x^6y^3} \text{ ইত্যাদি।}$$

4·2. দ্বিপদ রাশির ঘাতের বিস্তৃতি।

এখন $(x+y)$ এই দ্বিপদ রাশিকে বিভিন্ন ঘাতে উন্নীত করিয়া যে সকল বিস্তৃতি পাওয়া যায় সেগুলি পর্যবেক্ষণ করিয়া যে সমস্ত বিশেষত্ব আমরা দেখিতে পাই, তাহা আমরা আলোচনা করিব। এতন্মধ্যে $(x+y)^2$ এবং $(x+y)^3$ এই দুইটির বিস্তৃতির সহিত শিক্ষার্থীরা পূর্বেই পরিচিত হইয়াছে। নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলি আমরা সরাসরি পর পর গুণ করিয়া পাই।

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2.$
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.$
$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$
$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6.$
$(x+y)^7 = x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5$
$+7xy^6+y^7$; ইত্যাদি।

পরবর্তী এক অধ্যায়ে আরও সাধারণভাবে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (*Binomial Theorem*) আলোচিত হইয়াছে ; যথা,

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n. \quad [\text{n অখণ্ড ধনরাশি}]$$

ইহার সূচক nএর স্থলে 2, 3, 4,···· প্রভৃতি সংখ্যা বসাইয়া উপরের বিস্তৃতিগুলি সহজেই পাওয়া যায়।

উপরের বিস্তৃতিগুলি হইতে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হই :

(i) $(x+y)$ এর যে কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(x+y)$ এর ঘাতের সূচকসংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী।

যথা, $(x+y)^6$ এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা 7 ; $(x+y)^{10}$ এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা 11 ; ইত্যাদি।

(ii) বিস্তৃতির প্রথম পদ y-বর্জিত এবং শেষ পদ x-বর্জিত, এবং এই দুই পদে x এবং y এর ঘাতের সূচক, $(x+y)$ কে যে ঘাতে উন্নয়ন করা হইতেছে, তাহার সূচকের সমান। বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি পরবর্তী প্রত্যেক পদে x এর ঘাতের সূচক 1 করিয়া কমিতেছে, এবং y এর ঘাতের সূচক 1 করিয়া বাড়িতেছে। সুতরাং, বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে x ও y এর ঘাতের সূচকসমষ্টি সর্বদাই সমান, এবং উহা $(x+y)$ যে ঘাতে উন্নীত হইতেছে, তাহার সূচকের সমান।

সূচকতত্ত্ব হইতে আমরা জানি যে, $a^0=1$, সুতরাং, প্রথম এবং শেষ পদে y এবং x এর ঘাতের সূচক 0 কল্পনা করিয়া লইতে পারি।

(iii) বিস্তৃতির প্রথম এবং শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সাংখ্য সহগগুলি পরস্পর সমান।

(iv) বিস্তৃতির প্রথম (ও শেষ) পদের সহগ 1. দ্বিপদ রাশির ঘাত-উন্নয়নের সূচক n (অখণ্ড ধনরাশি) হইলে [অর্থাৎ $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে] দ্বিতীয় (ও শেষ হইতে দ্বিতীয়) পদের সাংখ্য-সহগ n হইবে। দ্বিতীয় পদের সহগ n এবং x এর ঘাতের সূচক $(n-1)$ গুণ করিয়া, দ্বিতীয় পদের অবস্থিতি-নির্দেশক সংখ্যা, অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। সেইরূপ তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ এবং সেই পদের xএর ঘাতের সূচকসংখ্যা গুণ করিয়া গুণফলকে 3 (অর্থাৎ তৃতীয় পদের স্থান-নির্দেশক সংখ্যা) দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। এইরূপ পর পর সাংখ্য-সহগগুলি নির্ণয় করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ $(x+y)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা হইবে 9. প্রথম ও শেষ পদ যথাক্রমে x^8 এবং y^8. উপরের নিয়মানুসারে দ্বিতীয় পদে সাংখ্য-সহগ 8, xএর ঘাত 7 এবং yএর ঘাত 1, অর্থাৎ পদটি $8x^7y$. তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ হইবে $\frac{8\times 7}{2}$ বা 28, xএর ঘাত 6 এবং yএর ঘাত 2, অর্থাৎ তৃতীয় পদ $28x^6y^2$. সেইরূপ চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ $\frac{28\times 6}{3}$ বা 56, অর্থাৎ পদটি হইবে $56x^5y^3$. পঞ্চম পদের সাংখ্য-সহগ $\frac{56\times 5}{4}$ বা 70, এবং পদটি $70x^4y^4$. পরবর্তী পদগুলিতে (প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সাংখ্যসহগগুলি সমান হওয়ায়) সাংখ্য-সহগগুলি যথাক্রমে 56, 28, 8 এবং 1 হইবে। সুতরাং,

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

এখানে লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক পদে x এবং y এর ঘাতের সূচকসমষ্টি 8.

4·3. উপরের অনুচ্ছেদে $(x+y)$এর ঘাতের বিস্তৃতি নির্ণয়ের যে নিয়ম দেওয়া হইল, তাহাতে x এবং y এর পরিবর্তে যে-কোন পদ বসাইলেও উহা প্রযোজ্য হইবে, এবং এই পদ দুইটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন সহগ যুক্ত হইতে পারে।

এইরূপে y এর পরিবর্তে $-y$ বসাইয়া পাই

$$(x-y)^5 = x^5 + 5x^4(-y) + \frac{5\times 4}{2}\cdot x^3(-y)^2 + \frac{5\times 4\times 3}{2.3}x^2(-y)^3 + \frac{5\times 4\times 3\times 2}{2.3.4}x(-y)^4 + (-y)^5$$
$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^6 - y^5.$$

এখানে দ্রষ্টব্য যে পদগুলি পর পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত, অযুগ্ম পদগুলি ধনাত্মক, এবং যুগ্ম পদগুলি ঋণাত্মক।

আর একটি উদাহরণস্বরূপ, মনে করি $(2a-3b^2)^4$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে $2a$ কে x এবং $-3b^2$ কে y কল্পনা করিয়া, নিয়মানুসারে

$$(2a-3b^2)^4=(2a)^4+4.(2a)^3(-3b^2)+\frac{4\times3}{2}\cdot(2a)^2(-3b^2)^2$$
$$+\frac{4\times3\times2}{2.3}\cdot(2a).(-3b^2)^3+(-3b^2)^4$$
$$=16a^4-96a^3b^2+216a^2b^4-216ab^6+81b^8.$$

দ্রষ্টব্য। এখানে বিস্তৃতির শেষপ্রাপ্ত আকারে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরস্থ সহগগুলি সমান নয়, বা প্রত্যেক পদে a এবং bর ঘাতের সূচকসমষ্টিও সমান নয়। প্রকৃতপক্ষে § 4·2 তে প্রদত্ত নিয়মগুলি পদ দুইটির সহগ 1 এবং ঘাত 1 হইলে প্রযোজ্য। অন্যান্য ক্ষেত্রে উপরের উদাহরণের ন্যায় পদ দুইটিকে x এবং y কল্পনা করিয়া নিয়মানুযায়ী বিস্তৃতি লিখিয়া সরল করিতে হইবে।

4·4. ত্রিপদ ও বহুপদ রাশির বর্গ নির্ণয়।

দ্বিপদ রাশির বর্গ-নির্ণয়ের সূত্র $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$ এর সাহায্যে নিম্নলিখিতরূপে ত্রিপদ বা বহুপদ বিশিষ্ট রাশিমালার বর্গ নির্ণয় করিতে পারি। ত্রিপদ রাশিসমষ্টির ক্ষেত্রে উহাদের মধ্যে দুইটি পদকে বন্ধনী-চিহ্নের মধ্যে লইয়া একটি রাশি কল্পনা করিয়া উপরের সূত্র সাহায্যে তিন পদের সমষ্টি বা অন্তরফলের বর্গ নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$\mathbf{(a+b+c)^2}=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b).c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.}$$

সেইরূপ, $(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

অনুরূপভাবে,
$$(a+b+c+d+e+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\cdots+2ab+2ac+2ad+2ae+\cdots$$

$$+2bc+2bd+2be+\cdots$$
$$+2cd+2ce+\cdots+2de+\cdots$$

অর্থাৎ যে-কোন পদসমষ্টির বর্গ

= প্রত্যেক পদের বর্গসমূহের সমষ্টি

\+ প্রত্যেক পদের সহিত পরবর্তী প্রত্যেক পদের গুণফল-সমূহের সমষ্টির দ্বিগুণ।

এখানে a, b, c ইত্যাদির পরিবর্তে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সহগযুক্ত যে কোনও পদ বসাইলেও এই সূত্র প্রযোজ্য হইবে।

উদাহরণ 1.
$$\begin{aligned}(a-b-c)^2 &= \{a+(-b)+(-c)\}^2\\ &= a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)\\ &\qquad +2a(-c)+2(-b)(-c)\\ &= a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc.\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $(3x-4y^2+2z^3-w)^2$
$$\begin{aligned}&=(3x)^2+(-4y^2)^2+(2z^3)^2+(-w)^2\\ &\quad +2(3x)(-4y^2)+2(3x)(2z^3)+2(3x)(-w)\\ &\quad +2(-4y^2)(2z^3)+2(-4y^2)(-w)+2(2z^3)(-w)\\ &=9x^2+16y^4+4z^6+w^2-24xy^2+12xz^3-6xw\\ &\qquad -16y^2z^3+8y^2w-4z^3w.\end{aligned}$$

4·5. ত্রিপদ রাশির ঘন।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে [§ 2·12 অনুসিদ্ধান্ত] দেখানো হইয়াছে যে,
$$\begin{aligned}\mathbf{(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}\\ =a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)\\ +3c^2(a+b)+6abc.\end{aligned}$$

এই সূত্রে a, b, c-র পরিবর্তে যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সহগযুক্ত পদ বসাইয়া যে-কোন ত্রিপদ রাশির ঘন নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ।
$$\begin{aligned}(2p-3q+4r)^3 &= (2p)^3+(-3q)^3+(4r)^3+3(2p)^2(-3q+4r)\\ &\quad +3(-3q)^2(2p+4r)+3(4r)^2(2p-3q)\\ &\quad +6(2p)(-3q)(4r)\\ &= 8p^3-27q^3+64r^3-36p^2q+48p^2r+54pq^2\\ &\quad +108q^2r+96pr^2-144qr^2-144pqr.\end{aligned}$$

4·6. বিবিধ উদাহরণ।

Ex. 1. *Raise to the indicated powers :*

(i) $(2x^3y)^5$. (ii) $\left(-\dfrac{2x^3}{3y}\right)^8$. (iii) $\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(i) $(2x^3y)^5=(2)^5.(x^3)^5.(y)^5=32x^{15}y^5$.

(ii) $\left(-\dfrac{2x^3}{3y}\right)^8=\dfrac{(-2)^8(x^3)^8}{(3)^8(y)^8}=\dfrac{256x^{24}}{6561y^8}$.

(iii) $\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3=\dfrac{(-3)^3(x^5)^3}{(5)^3(a^3)^3}=-\dfrac{27x^{15}}{125a^9}$.

Ex. 2. *Expand* $(3x-2a^2)^4$.

$$\begin{aligned}(3x-2a^2)^4&=(3x)^4+4.(3x)^3(-2a^2)+\frac{4\times3}{2}(3x)^2(-2a^2)^2\\&\quad+\frac{4\times3\times2}{2\times3}(3x)(-2a^2)^3+(-2a^2)^4\\&=81x^4-216x^3a^2+216x^2a^4-96xa^6+16a^8.\end{aligned}$$

Ex. 3. *Expand* $(x-y)^6$.

এখানে বিস্তৃতির 7টি পদ, এবং নিয়মানুসারে প্রথম চারটি পদের সাংখ্য সহগ 1, 6, $\dfrac{6\times5}{2}$, $\dfrac{6\times5\times4}{2\times3}$ অর্থাৎ 1, 6, 15, 20, এবং যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সহগগুলি সমান, অতএব, শেষ তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ যথাক্রমে 15, 6 এবং 1.

$$\begin{aligned}\therefore\quad (x-y)^6&=x^6+6x^5(-y)+15x^4(-y)^2+20x^3(-y)^3\\&\quad+15x^2(-y)^4+6x(-y)^5+(-y)^6\\&=x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4\\&\quad-6xy^5+y^6.\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। নিয়মানুসারে সাংখ্যসহগগুলির অর্ধেক বাহির করিলে অপরগুলি সহজেই লেখা যায়।

এই সূত্রে § 4·2 তে প্রদত্ত দ্বিপদ রাশির 2 হইতে 7 পর্যন্ত ঘাতের বিস্তৃতির সাংখ্য-সহগগুলি লক্ষণীয়।

Ex. 4. *Expand* $(1+x)^4(1-x)^4$ *in ascending powers of* x.

এখানে $(1+x)^4(1-x)^4=\{(1+x)(1-x)\}^4=(1-x^2)^4$

$$=1^4+4.1^3.(-x^2)+6.1^2.(-x^2)^2+4.1.(-x^2)^3+(-x^2)^4$$
$$=1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8.$$

Ex. 5. *Expand* $(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)^2$ *and arrange in descending powers of* x

এখানে $1-4x+6x^2-4x^3+x^4$
$$=1+4(-x)+6(-x)^2+4(-x)^3+(-x)^4$$
$$=(1-x)^4=(x-1)^4$$
$$\therefore\ (1-4x+6x^2-4x^3+x^4)^2=\{(x-1)^4\}^2=(x-1)^8$$
$$=x^8+8x^7(-1)+28x^6(-1)^2+56x^5(-1)^3+70x^4(-1)^4$$
$$+56x^3(-1)^5+28x^2(-1)^6+8x(-1)^7+(-1)^8$$
$$=x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3+28x^2-8x+1.$$

দ্রষ্টব্য। অষ্টম ঘাতের বিস্তৃতির সহগগুলির জন্য § 4·2 তে প্রদত্ত দৃষ্টান্ত দেখ।

Ex. 6. *If* $x=3$, $y=2$, *show that*
$$x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6=1.$$

প্রদত্ত বাম পক্ষের রাশিমালা
$$=x^6+6x^5(-y)+15x^4(-y)^2+20x^3(-y)^3$$
$$+15x^2(-y)^4+6x(-y)^5+(-y)^6$$
$$=(x-y)^6=(3-2)^6 \qquad [\,x=3 \text{ এবং } y=2 \text{ হইলে}\,]$$
$$=1^6=1.$$

Ex. 7. *Find the sum of the coefficients in the expansion of* $(x+y)^7$.

যেহেতু $(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+\cdots\cdots$

এই বিস্তৃতি একটি অভেদ, এবং x ও y এর সকল মানেই প্রযোজ্য, x এবং y এর প্রত্যেকটির মান 1 বসাইলে বাম পক্ষ হয় $2^7=128$, এবং দক্ষিণ পক্ষ সহগগুলির যোগফলে পরিণত হয়।

$\therefore$ সহগগুলির নির্ণেয় যোগফল $=128$.

Ex. 8. *Find the value of* $100-108x+54x^2-12x^3+x^4$, *when* $x=3-\sqrt[4]{2}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^4-4.x^3.3+6.x^2.3^2-4.x.3^3+3^4+19$
$$=(x-3)^4+19=(-\sqrt[4]{2})^4+19=2+19=21.$$

Examples IV

1. Raise to indicated powers :

(i) $(-3x^2)^5$. (ii) $(-4ab^3)^6$. (iii) $\left(\frac{3ab^3}{2x^2y}\right)^3$.

2. Find the squares of :

(i) $-3pq^2r^3$. (ii) $-\frac{5ab^2}{3}$. (iii) $\frac{5x^2yz^3}{3a^2b}$.

(iv) $-\frac{7}{9p^3q^2x}$. (v) $\frac{2m^2n^3}{3p^4q^{-2}}$.

3. Find the cubes of :

(i) $4a^4$. (ii) $-6m^3n^2$. (iii) $-\frac{1}{3mn^3}$.

(iv) $5c^5d^{-2}$. (v) $-\frac{9k^3l^2m^2n}{7x^5y^4z^3}$.

4. Expand :

(i) $(a+2b)^4$. (ii) $(3x^2-2y^3)^3$. (iii) $(1-2x)^7$.

(iv) $(1-a^2)^6$. (v) $(x^2+2)^5$. (vi) $(3a^2-2b^2)^5$.

(vii) $\left(\frac{x^2}{3}-3x\right)^4$. (viii) $(ax+by)^4+(ax-by)^4$.

5. Find the squares of :

(i) $x-2y+z$. (ii) x^2-x+1. (iii) $k^2+l^2-m^2$.

(iv) $a-\frac{b}{4}+\frac{c}{2}$. (v) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^2$. (vi) $x+2y-a+3b$.

(vii) $m+n+p-2q$. (viii) $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$.

6. Simplify $(1+3x+2x^2)^2+(1-3x+2x^2)^2$.

7. Expand :

(i) $(a+2b-3c)^3$. (ii) $(1-3x+2x^2)^3$.

8. Expand in ascending powers of x :

(i) $(1-6x+12x^2-8x^3)^3$.

(ii) $(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)^2$.

9. Expand :

(i) $(a+b)^5(a-b)^5$. (ii) $(ax+by)^4(ax-by)^4$.

10. Expand in ascending powers of x :

(i) $(1-x)^3(1+x+x^2)^3$.

(ii) $(1-x+x^2)^3(1+x+x^2)^3$.

11. Find the value of :

(i) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6xz+12yz$,

when $x=1$, $y=2$, $z=3$.

(ii) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$, when $x=2+\sqrt{5}$.

(iii) $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$, when $x=3$.

(iv) $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$,

when $x=3$, $y=2$.

12. Show that $1-4x+10x^2-12x^3+9x^4=\frac{4}{9}$, if $x=\frac{1}{3}$.

13. Show that :

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

14. Find the sum of the numerical coefficients of the terms in the expansions of :

(i) $(l-m)^6$. (ii) $(l-2m)^6$. (iii) $(2x+3y)^5$.

(iv) $(4a-3b)^4$. (v) $(1-3x+2x^2)^2$.

15. Find the value of

$32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x$, when $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{5}$.

ANSWERS

1. (i) $-243x^{10}$. (ii) $4096a^6b^{18}$. (iii) $\frac{27a^3b^9}{8x^6y^3}$.

2. (i) $9p^2q^4r^6$. (ii) $\frac{25}{9}a^2b^4$. (iii) $\frac{25x^4y^2z^6}{9a^4b^2}$.

(iv) $\frac{49}{81p^6q^4x^2}$. (v) $\frac{4m^4n^6q^4}{9p^8}$.

3. (i) $64a^{12}$. (ii) $-216m^9n^6$. (iii) $-\frac{1}{27m^3n^9}$.

(iv) $\frac{125c^{15}}{d^6}$. (v) $-\frac{729k^9l^6m^6n^3}{343x^{15}y^{12}z^9}$.

4. (i) $a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4$.

(ii) $27x^6-54x^4y^3+36x^2y^6-8y^9$.

(iii) $1-14x+84x^2-280x^3+560x^4-672x^5+448x^6-128x^7$.

(iv) $1-6a^2+15a^4-20a^6+15a^8-6a^{10}+a^{12}$.

(v) $x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32$.

(vi) $243a^{10}-810a^8b^2+1080a^6b^4-720a^4b^6+240a^2b^8-32b^{10}$.

(vii) $\frac{1}{81}x^8-\frac{4}{9}x^7+6x^6-36x^5+81x^4$.

(viii) $2a^4x^4+12a^2b^2x^2y^2+2b^4y^4$.

5. (i) $x^2+4y^2+z^2-4xy+2xz-4yz$.

(ii) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

(iii) $k^4+l^4+m^4+2k^2l^2-2k^2m^2-2l^2m^2$.

(iv) $a^2+\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}ab+ac-\frac{1}{4}bc$.

(v) $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x+\frac{19}{4}x^2-\frac{15}{2}x^3+\frac{25}{4}x^4$.

(vi) $x^2+4y^2+a^2+9b^2+4xy-2xa+6xb-4ya+12yb-6ab$.

(vii) $m^2+n^2+p^2+4q^2+2mn+2mp-4mq+2np-4nq-4pq$.

(viii) $1+4x+10x^2+20x^3+25x^4+24x^5+16x^6$.

6. $2(1+13x^2+4x^4)$.

7. (i) $a^3+8b^3-27c^3+6a^2b-9a^2c+12ab^2-36b^2c+27ac^2+54bc^2-36abc$.

(ii) $1-9x+33x^2-63x^3+66x^4-36x^5+8x^6$.

8. (i) $1-18x+144x^2-672x^3+2016x^4-4032x^5+5376x^6-4608x^7$
$+2304x^8-512x^9$.

(ii) $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$.

9. (i) $a^{10}-5a^8b^2+10a^6b^4-10a^4b^6+5a^2b^8-b^{10}$.

(ii) $a^8x^8-4a^6x^6b^2y^2+6a^4x^4b^4y^4-4a^2x^2b^6y^6+b^8y^8$.

10. (i) $1-3x^3+3x^6-x^9$.

(ii) $1+3x^3+6x^4+7x^6+6x^8+3x^{10}+x^{12}$.

11. (i) 144. (ii) 25. (iii) 64. (iv) 0.

14. (i) 0. (ii) 1. (iii) 3125. (iv) 1. (v) 0.

15. 248.

পঞ্চম অধ্যায়

করণী (Surds)

5·1. সংজ্ঞা।

কোন সংখ্যাকে যদি দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে সেই সংখ্যাকে **মূলদ সংখ্যা** (rational number) বলে। যথা, $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{8}{1}, -\frac{7}{3}, \sqrt{4}, \sqrt{\frac{16}{25}}, 3{\cdot}146, 5{\cdot}2\dot{7}$, ইত্যাদি।

প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যা, যেমন 3 বা 7, বা -8 কে $\frac{3}{1}, \frac{7}{1}, \frac{-8}{1}$ ভাবে লেখা যায়, কাজেই এগুলি মূলদ সংখ্যা। $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ বা $-\frac{4}{5}$, কাজেই ইহাও মূলদ। $3{\cdot}146 = \frac{3146}{1000}$, অথবা $5{\cdot}2\dot{7} = \frac{527-52}{90} = \frac{475}{90}$, কাজেই এগুলিও মূলদ ; অর্থাৎ সসীম দশমিক সংখ্যা বা আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলিও মূলদ সংখ্যা।

যে সকল সংখ্যা বাস্তব অথচ মূলদ নয়, (অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না) সেই সংখ্যাগুলিকে **অমূলদ সংখ্যা** (irrational number) বলা হয়। যেমন, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{\frac{3}{8}}, \pi, e$, প্রভৃতি। এই সংখ্যাগুলির দশমিকে যে-কোন স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করা যাইতে পারে, কিন্তু ঐ দশমিক কখনই সসীম হইবে না, অথচ আবৃত্তও হইবে না, কাজেই প্রকৃত মান কখনই মূলদ সংখ্যারূপে পাওয়া যাইবে না।

যদি কোন রাশির কোন নির্দিষ্ট মূল সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা অর্থাৎ কোন মূলদ সংখ্যারূপে প্রকাশ করা সম্ভবপর না হয়, তবে ঐ মূল নির্ণয় সংবলিত সংখ্যাকে **করণী** (surd) বলে। যথা, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[7]{80}$ ইত্যাদি।

সংজ্ঞা হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান যে, **প্রকৃত করণী মাত্রেই অমূলদ সংখ্যা** [যদিও প্রত্যেক অমূলদ সংখ্যাই করণী নয় ; যথা, $\pi, e, \log_{10}2$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু করণী নয়]।

যেমন, $\sqrt{2}$; আমরা এমন কোন মূলদ সংখ্যা পাইতে পারি না, যাহার বর্গ 2. সেইরূপ, এমন কোন মূলদ সংখ্যা নাই যাহার ত্রিঘাত 16 হইবে। কিন্তু $\sqrt{16}$ বা $\sqrt[3]{27}$ বা $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ প্রভৃতি করণীর আকারের হইলেও প্রকৃত করণী নয়, কারণ এই সকল ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট মূলগুলি মূলদ সংখ্যা ($\pm 4, 3, \frac{2}{3}$) রূপে নির্ণয় করা যায়।

কোন বীজগণিতীয় রাশির কোন মূলাকর্ষক সংখ্যাকে সাধারণতঃ আমরা করণী বলিব। যেমন, $\sqrt{a}, \sqrt[3]{x}, \sqrt{y^{-3}}, \sqrt[5]{z^3}$, ইত্যাদি। এইসব বীজগণিতীয় রাশির মান সাধারণভাবে নির্ণেয় নয়। যদিও a বা x এর বিশেষ মানে (যথা, $a=25$ বা $x=8$ হইলে) $\sqrt{a}$ বা $\sqrt[3]{x}$ করণী নয়, তাহা হইলেও a বা x ইত্যাদির নির্দিষ্ট মানের কোন উল্লেখ না থাকিলে সাধারণতঃ এগুলি করণী বলিয়াই ধরা হয়। আবার $\sqrt{a^2}$ বা $\sqrt[3]{x^3}$ ইত্যাদি করণী বলিয়া গণ্য হয় না।

5·2. শুদ্ধ-করণী (Pure surds) ও মিশ্র করণী (Mixed surds)।

যে সকল করণীর সহিত কোন মূলদ সহগ থাকে না, তাহাদিগকে **শুদ্ধ করণী** (Pure surd) বা **পূর্ণ করণী** (Complete surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{24}$ ইত্যাদি।

করণীর সহিত মূলদ সহগ থাকিলে তাহাকে **মিশ্র করণী** (Mixed surds) বলা হয়। যথা, $2\sqrt{3}, \frac{5}{7}\sqrt[3]{5}, -9\sqrt[7]{2}$ ইত্যাদি।

একটি মিশ্র করণীকে সর্বদাই একটি শুদ্ধ করণীর আকারে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$,

বা, $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}\times 3}=\sqrt[3]{\frac{24}{125}}$; ইত্যাদি।

অনুরূপ ভাবে, কোন কোন ক্ষেত্রে একটি শুদ্ধ করণীকে মিশ্র করণীতে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

যেমন, $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$,

বা, $\sqrt[4]{192}=\sqrt[4]{2^4\times 4\times 3}=2\sqrt[4]{12}$; ইত্যাদি।

যখন কোন করণীকে মিশ্র আকারে প্রকাশ করা যায় না, কিংবা মিশ্র আকারে প্রকাশ করার পর আর কোন মূলদ উৎপাদক করণীর ভিতর হইতে বাহিরে আনা যায় না, এইরূপ আকারকে **করণীর সরলতম আকার** বলা হয়।

5·3. করণীর ক্রম (Order of a Surd)।

করণীর মূলাকর্ষক সূচক সংখ্যার দ্বারা করণীর **ক্রম** (order) সূচিত করা হয়। যেমন, $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[n]{a}$ প্রভৃতি যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও n-তম ক্রমের করণী।

দ্বিতীয় ক্রমের (second order) করণীকে সচরাচর **দ্বিঘাত করণী** (quad-

ratic surds) বলা লয়। সেইরূপ তৃতীয় ক্রমের (third order) করণীকে **ত্রিঘাত করণী** (cubic surds), চতুর্থ ক্রমের (fourth order) করণীকে **চতুর্ঘাত করণী** (biquadratic surds) ইত্যাদি বলা হইয়া থাকে।

সমমূলীয় করণী (Equiradical Surds)।

দুইটি করণীর মূলাকর্ষকসূচক সংখ্যা যদি সমান হয়, অর্থাৎ করণী দুইটী যদি একই ক্রমের হয়, তবে করণী দুইটিকে সমমূলীয় করণী বলে।

যেমন, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $x^{\frac{3}{2}}$ ইত্যাদি সমমূলীয় (দ্বিতীয় ক্রমের) করণী। $\sqrt[3]{18}$ ও $a^{\frac{1}{3}}$ সমমূলীয়। কিন্তু $\sqrt{3}$ ও $\sqrt[3]{5}$ ভিন্নমূলীয়।

ভিন্নমূলীয় করণীকে সমমূলীয়-করণ।

যে-কোন দুই বা ততোধিক ভিন্নমূলীয় করণীকে সহজেই সমমূলীয় করণীরূপে লেখা যাইতে পারে। যথা, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$ অর্থাৎ $5^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}}$ বস্তুতঃ ভিন্নমূলীয় করণী। ইহাদের সূচকসংখ্যার হরগুলি 2, 3, 4 এর ল. সা. গু. স্পষ্টই 12. অতএব,

$$5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15625}$$

$$4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}.$$

এক্ষেত্রে তিনটি করণীকেই 12 ক্রমের করণীরূপে প্রকাশ করা হইল।

বিভিন্নক্রমের করণীর তুলনা।

দুই বা ততোধিক ভিন্নমূলীয় করণীর মধ্যে তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় করিতে হইলে করণীগুলিকে **পূর্ণ** ও **সমমূলীয়** করিয়া লওয়া প্রয়োজন। যথা, $\sqrt{21}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, প্রভৃতির মানের ক্রম স্থির করিতে হইলে,

[∵ এক্ষেত্রে করণীগুলির ক্রম যথাক্রমে 2, 2 এবং 3, এবং এগুলির ল. সা. গু. 6,]

$$\sqrt{21} = 21^{\frac{1}{2}} = 21^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{21^3} = \sqrt[6]{9261}$$

$$3\sqrt{3} = \sqrt{3^2.3} = \sqrt{27} = 27^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{27^3} = \sqrt[6]{19683}$$

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{40} = 40^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{40^2} = \sqrt[6]{1600}$$

শেষের আকার হইতে স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে যে, এই তিনটি করণীর মধ্যে $3\sqrt{3}$ বৃহত্তম, $\sqrt{21}$ তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, এবং $2\sqrt[3]{5}$ ক্ষুদ্রতম।

5·4. সরল ও যৌগিক করণী (Simple Surds and Compound Surds)।

একপদবিশিষ্ট করণীকে **সরল করণী** (Simple surd) বলে, যেমন, $\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{3}{7}\sqrt[5]{8}$, $a\sqrt[3]{x}$, ইত্যাদি।

সদৃশ করণী (like or similar surds).

দুই বা ততোবিধ সরল করণী যদি একই অমূলদ গুণনীয়ক-বিশিষ্ট হয়, বা উহাদের একই অমূলদ গুণনীয়ক-বিশিষ্ট করণীতে পরিবর্তিত করা সম্ভব হয়, তবে সেই সকল করণীকে **সদৃশ করণী** বলে।

ইহা না হইলে করণীগুলিকে **অসদৃশ করণী** (dissimilar surds) বলা হয়।

যেমন, $\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$ ইত্যাদি সদৃশ করণী। এখানে $\sqrt{2}$ সাধারণ অমূলদ উৎপাদক।

আবার $5\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$ ইত্যাদিও সদৃশ করণী; কারণ $\sqrt{12}=\sqrt{2^2.3}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times 3}=4\sqrt{3}$. এক্ষেত্রে $\sqrt{3}$ সাধারণ অমূলদ উৎপাদক।

সেইরূপ $3\sqrt[3]{5}$, $7\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{320}$ ইত্যাদি সদৃশ করণী, কারণ $7\sqrt[3]{40}=7\sqrt[3]{2^3.5}=14\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}=\sqrt[3]{4^3.5}=4\sqrt[3]{5}$। এক্ষেত্রে $\sqrt[3]{5}$ সাধারণ অমূলদ উৎপাদক।

$3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{3}$ ইত্যাদি অসদৃশ করণী, কারণ ইহাদের অমূলদ উৎপাদক ভিন্ন ভিন্ন।

যৌগিক করণী (Compound surds).

যদি দুই বা ততোধিক করণী, কিম্বা একটি মূলদ সংখ্যা ও এক বা একাধিক করণী, যোগ বা বিয়োগ চিহ্নের দ্বারা পরস্পরের সহিত যুক্ত থাকে, তাহা হইলে এই পদসমষ্টিকে **যৌগিক করণী** (compound surd) বলে।

যথা, $7+2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}+7\sqrt{5}$, $2+\sqrt[3]{3}-\sqrt{7}$, $\sqrt{5}-2\sqrt[3]{2}+10\sqrt[4]{11}$, ইত্যাদি যৌগিক করণী। ইহার মধ্যে প্রথম দুইটি দুইপদবিশিষ্ট, এবং শেষোক্ত দুইটি তিনপদবিশিষ্ট।

দুইপদবিশিষ্ট করণীকে **দ্বিপদ করণী** (Binomial surds) বলা হয়। যথা, $3+5\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}-7\sqrt{6}$, $8-\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $5+2\sqrt{3}+\frac{1}{7}\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}-5\sqrt[3]{7}+4\sqrt[4]{9}$ প্রভৃতি, ত্রিপদ করণী (trinomial surds) ; ইত্যাদি।

দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী (Binomial quadratic surds)-এর ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট করণী বা করণী দুইটি দ্বিঘাত করণী হইতে হইবে। যেমন, $2+3\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$, ইত্যাদি।

দুইটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী যদি মাত্র সংযোগ-চিহ্নে ভিন্ন হয়, অর্থাৎ যদি পদ দুইটি একই থাকে, এবং মধ্যবর্তী সংযোগ-চিহ্ন একটিতে + এবং অপরটিতে − হয়, তবে করণী দুইটির একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** (conjugate) বা **পূরক** (complementary) করণী বলে।

যেমন, $5+2\sqrt{3}$ এবং $5-2\sqrt{3}$ পরস্পর অনুবন্ধী দুইটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী।

সেইরূপ $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$,
$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{a}-2\sqrt{b}$,
$m+\sqrt{n}$ এবং $m-\sqrt{n}$

ইত্যাদি পরস্পর অনুবন্ধী।

5·5. করণীর যোগ ও বিয়োগ।

কতকগুলি **সদৃশ করণীর** যোগ বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইলে, করণীগুলিকে সরলতম আকারে প্রকাশ করিয়া উহাদের মূলদ সহগগুলিকে স্ব স্ব চিহ্নসহ লইয়া বীজগণিতীয় যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে, এবং তাহার সহিত সদৃশ করণীগুলির সাধারণ অমূলদ উৎপাদক বসাইয়া দিতে হইবে।

অসদৃশ করণীর যোগ বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে উহাদের সরলতম আকারে প্রকাশ করিয়া যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন বসাইয়া দিলেই হইবে, উহা আর সরল হইবে না।

কতকগুলি সদৃশ এবং কতকগুলি অসদৃশ করণীর যোগ বা বিয়োগ ফলের ক্ষেত্রে, সমস্তগুলি সরলতম আকারে প্রকাশ করিয়া উহাদের মধ্য হইতে সদৃশগুলি একত্র করিয়া স্ব স্ব চিহ্নসহ যোগ করিয়া দিতে হইবে, অসদৃশগুলি চিহ্নসহ অপরিবর্তিত রহিবে।

উদাহরণ :

(i) $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}=4\sqrt{3^2.7}+5\sqrt{7}-8\sqrt{2^2.7}$
$=4.3\sqrt{7}+5\sqrt{7}-8.2\sqrt{7}$
$=(12+5-16)\sqrt{7}=\sqrt{7}.$

(ii) $\sqrt[3]{432}+9\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}$
$=\sqrt[3]{2^3.3^3.2}+9\sqrt[3]{2^3.2}-2\sqrt[3]{5^3.2}$
$=2.3\sqrt[3]{2}+9.2\sqrt[3]{2}-2.5\sqrt[3]{2}$
$=(6+18-10)\sqrt[3]{2}=14\sqrt[3]{2}.$

(iii) $5\sqrt[3]{-54}+4\sqrt{75}-\sqrt{24}+12\sqrt[3]{2}$
$=5\sqrt[3]{(-3)^3.2}+4\sqrt{5^2.3}-\sqrt{2^2.6}+12\sqrt[3]{2}$
$=5.(-3)\sqrt[3]{2}+4.5\sqrt{3}-2\sqrt{6}+12\sqrt[3]{2}$
$=-15\sqrt[3]{2}+20\sqrt{3}-2\sqrt{6}+12\sqrt[3]{2}$
$=20\sqrt{3}-2\sqrt{6}+(12-15)\sqrt[3]{2}$
$=20\sqrt{3}-2\sqrt{6}-3\sqrt[3]{2}.$

5·6. করণীর গুণন ও ভাগ।

কতকগুলি সরল ও সমমূলীয় করণীর গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলিকে পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিতে হয়।

বিভিন্ন ক্রমের সরল করণীর গুণফল নির্ণয় করিতে, উহাদিগকে সমমূলীয় করিয়া লইয়া উপরের ন্যায় গুণ করিতে হয়।

যৌগিক করণীসমূহের গুণফল নির্ণয় করিতে, বীজগণিতের মিশ্ররাশির গুণনের নিয়মানুসারে করিতে হয়। যথা, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ

(i) $2\sqrt{3}\times 8\sqrt{7}\times 3\sqrt{20}=2\sqrt{3}\times 8\sqrt{7}\times 3.2\sqrt{5}$
$=2.8.3.2.\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}=96\sqrt{3\times 7\times 5}=96\sqrt{105}.$

(ii) $-\sqrt{50}\times\sqrt[3]{-192}\times\sqrt[4]{21}=-\sqrt{5^2.2}\times\sqrt[3]{-4^3.3}\times\sqrt[4]{21}$
$=-5\sqrt{2}\times(-4\sqrt[3]{3})\times\sqrt[4]{21}$
$=-5.2^{\frac{1}{2}}\times(-4.3^{\frac{1}{3}})\times 21^{\frac{1}{4}}=20.2^{\frac{6}{12}}.3^{\frac{4}{12}}.21^{\frac{3}{12}}$
$=20.(2^6.3^4.21^3)^{\frac{1}{12}}=20\sqrt[12]{48009024}.$

(iii) $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})\times(5\sqrt{5}-\sqrt{2})$
$=(2\sqrt{2}\times 5\sqrt{5})+2\sqrt{2}(-\sqrt{2})+\sqrt{5}.(5\sqrt{5})-\sqrt{5}.\sqrt{2}$
$=10\sqrt{10}-2.2+5.5-\sqrt{10}=21+9\sqrt{10}.$

(iv) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}+1)$
$=\{1+(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})\}\{1-(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})\}$
$=1-(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})^2=1-(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{2}})^2$
$=1-(2^{\frac{2}{3}}-2.2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+3)=2.2^{\frac{2}{6}}.3^{\frac{3}{6}}-2^{\frac{2}{3}}-2$
$=2.\sqrt[6]{2^2.3^3}-\sqrt[3]{2^2}-2=2\sqrt[6]{108}-\sqrt[3]{4}-2.$

করণীবিশিষ্ট দুইটি রাশি বা রাশিমালার ভাগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ভাগটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া উপযুক্ত সাধারণ উৎপাদক উপরে ও নীচে বসাইয়া উহার সাহায্যে হরকে মূলদ সংখ্যারূপে প্রকাশ করিয়া লইতে হয়। এই প্রক্রিয়া নিম্নে বর্ণিত হইল।

অবশ্য ভাগটিকে ভগ্নাংশরূপে লিখিয়া যদি লব ও হরের কোন সাধারণ মূলদ বা অমূলদ উৎপাদক থাকে দেখা যায়, তাহা পূর্বেই ভগ্নাংশের ন্যায় কাটিয়া দেওয়া যাইতে পারে।

5·7. করণী-নিরসন প্রক্রিয়া (Rationalisation of surds) :

যদি দুইটি করণীর গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা হয়, তবে প্রত্যেকটিকে অন্য করণীটির **করণী-নিরসক** (বা মূলদীয়) **উৎপাদক** বলে, এবং একটি করণী দেওয়া থাকিলে উহাকে উপযুক্ত করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ সংখ্যায় পরিণত করা প্রক্রিয়াকে **করণী-নিরসন** বলে। করণীর সরলীকরণের বহু ক্ষেত্রে ইহার প্রয়োজন হয়।

যেমন, $3\sqrt{5}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$,
$7\sqrt[3]{2}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক $\sqrt[3]{4}$,
$\sqrt[7]{3}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক $\sqrt[7]{729}$, ইত্যাদি।

কারণ $3\sqrt{5}\times\sqrt{5}=3\times5=15$,
$7\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=7\sqrt[3]{8}=7\sqrt[3]{2^3}=14$
$\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{729}=\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{3^6}=\sqrt[7]{3^7}=3.$

এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, **দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর ক্ষেত্রে অনুবন্ধী করণী ইহার করণী-নিরসক উৎপাদক।**

যথা, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$
$(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})=(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{7})^2$
$=45-28=17.$

দ্রষ্টব্য। অন্যান্য দ্বিপদ বা বহুপদ রাশির করণী-নিরসন, দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল বা ঘনমূল নির্ণয় ইত্যাদি বিষয়, দশম শ্রেণীতে পাঠ্য "অমূলদ রাশি" অধ্যায়ে দেওয়া হইল।

5·8. করণীসম্বন্ধীয় বিবিধ উদাহরণাবলী।

Ex. 1. (i) *Arrange in descending order of magnitude*

$$\sqrt{11},\ \sqrt[4]{51},\ \frac{1}{\sqrt[3]{\cdot 05}}\ \textit{and}\ 2\sqrt{3}.$$

(ii) *Simplify* $2\sqrt{405}-4\sqrt[3]{375}-3\sqrt{125}+4\sqrt[3]{192}$.

(i) এখানে প্রদত্ত করণীগুলির ক্রমের ল. সা. গু. 12, অতএব, সবগুলিকে 12 ক্রমের সম্পূর্ণ করণীতে পরিণত করিতে হইবে।

$$\sqrt{11}=11^{\frac{1}{2}}=11^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{11^6}=\sqrt[12]{1771561}$$

$$\sqrt[4]{51}=\sqrt[12]{51^3}=\sqrt[12]{132651}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cdot 05}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{5}{100}}}=\frac{1}{1/\sqrt[3]{20}}=\sqrt[3]{20}=\sqrt[12]{20^4}=\sqrt[12]{160000}$$

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=12^{\frac{1}{2}}=12^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{12^6}=\sqrt[12]{2985984}.$$

শেষের আকারগুলি তুলনা করিয়া ক্রমনিম্ন মানানুযায়ী সাজাইয়া করণীগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$2\sqrt{3},\ \sqrt{11},\ \frac{1}{\sqrt[3]{\cdot 05}},\ \sqrt[4]{51}.$$

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=2\sqrt{5.9^2}-4\sqrt[3]{3.5^3}-3\sqrt{5.5^2}+4\sqrt[3]{3.4^3}$$
$$=18\sqrt{5}-20\sqrt[3]{3}-15\sqrt{5}+16\sqrt[3]{3}$$
$$=(18\sqrt{5}-15\sqrt{5})-(20\sqrt[3]{3}-16\sqrt[3]{3})$$
$$=3\sqrt{5}-4\sqrt[3]{3}.$$

Ex. 2. (i) *Find the product of* $5\sqrt{5}+4\sqrt{3}$ *and* $\sqrt{80}-\sqrt{12}$.

(ii) *Divide* $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ *by* $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

(i) নির্ণেয় গুণফল $=(5\sqrt{5}+4\sqrt{3})(4\sqrt{5}-2\sqrt{3})$

$$=5.4.\sqrt{5}.\sqrt{5}-4.2.\sqrt{3}.\sqrt{3}-5.2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+4.4.\sqrt{3}.\sqrt{5}$$

$$=20.5-8.3-10\sqrt{15}+16\sqrt{15}$$
$$=76+6\sqrt{15}.$$

(ii) নির্ণেয় ভাগফল $=\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$$=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2+2.3\sqrt{2}.2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{18+12+12\sqrt{6}}{18-12}=\frac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}.$$

Ex. 3. *Rationalise the denominator,*

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}$. (ii) $\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

(i) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{4})-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{5})}$

$$=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{(3+4+2\sqrt{3.4})-5}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{5}}{2(2\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+2-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-1)}{2.\{(2\sqrt{3})^2-1^2\}}$$

$$=\frac{6-\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2-2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2(12-1)}$$

$$=\frac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{22}.$$

(ii) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{y^2\{x-\sqrt{x^2-y^2}\}}{x^2-(\sqrt{x^2-y^2})^2}$

$$=\frac{y^2\{x-\sqrt{x^2-y^2}\}}{x^2-(x^2-y^2)}=x+\sqrt{x^2-y^2}.$$

Ex. 4. *Simplify*

$$\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}.$$ [*H. S. 1961*]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2.2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{18}-3\sqrt{2}-\sqrt{12}}{3-2}$$
$$= 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Ex. 5. *Given* $\sqrt{2}=1{\cdot}4142$, *find to three decimal places the value of*

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$$ [*H. S. 1960, Comp.*]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+1-2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2}{\{(\sqrt{2})^2-1\}^2}$$
$$= (\sqrt{2}+1)^3 = (\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})+1$$
$$= 2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1 = 7+5\sqrt{2} = 7+5\times 1{\cdot}4142$$
$$= 7+7{\cdot}0710 = 14{\cdot}071.$$

Ex. 6. *If* $x=\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$ *and* $y=\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$, *find the value of* $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

x এবং y-এর মান হইতে

$$x+y = \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}} + \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$$
$$= \frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2+(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})^2}{(\sqrt{a+1})^2-(\sqrt{a-1})^2}$$
$$= \frac{2(a+1+a-1)}{(a+1)-(a-1)} = \frac{4a}{2} = 2a;$$
$$xy = \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}} = 1.$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(x+y)^2-xy}{(x+y)^2-3xy} = \frac{4a^2-1}{4a^2-3}.$$

Ex. 7. *If* $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$, *show that* $bx^2-ax+b=0$.

Componendo ও Dividendo-র সাহায্যে

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a-2b}} \text{ or, } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a+2b}{a-2b}.$$

পুনরায় Componendo ও Dividendo-র সাহায্যে

$$\frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a}{4b}. \quad \therefore \quad bx^2-ax+b=0.$$

Ex. 8. *Solve the equations :*

(i) $\sqrt{x+25}=1+\sqrt{x}$.

(ii) $\sqrt{9+2x}-\sqrt{2x}=\dfrac{5}{\sqrt{9+2x}}$.

(iii) $\sqrt{9x-8}=3\sqrt{x+4}-2$.

(i) দুই পক্ষ বর্গ করিয়া, $x+25=1+2\sqrt{x}+x$.

$\therefore \quad 24=2\sqrt{x}$, বা, $\sqrt{x}=12. \quad \therefore \quad x=144$.

(ii) $\sqrt{9+2x}$ দ্বারা দুই পক্ষ গুণ করিয়া,

$9+2x-\sqrt{2x(9+2x)}=5$ বা, $2x+4=\sqrt{4x^2+18x}$.

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $4x^2+16x+16=4x^2+18x$

বা, $-2x=-16. \quad \therefore \quad x=8$.

(iii) দুই পক্ষ বর্গ করিয়া,

$$9x-8=9(x+4)-12\sqrt{x+4}+4.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $12\sqrt{x+4}=48$.

$\therefore \quad \sqrt{x+4}=4$, বা, $x+4=16. \quad \therefore \quad x=12$.

বিকল্প প্রণালী :

এক্ষেত্রে, পক্ষান্তর করিয়া, $3\sqrt{x+4}-\sqrt{9x-8}=2$,

আবার x-এর সকল মানেই

$$(3\sqrt{x+4})^2-(\sqrt{9x-8})^2=9(x+4)-(9x-8)=44.$$

$\therefore$ দ্বিতীয় সমীকরণকে প্রথম দিয়া ভাগ করিলে,

$$3\sqrt{x+4}+\sqrt{9x-8}=22.$$

প্রথমটির সহিত যোগ করিয়া পাই $6\sqrt{x+4}=24$

বা, $\sqrt{x+4}=4. \quad \therefore \quad x+4=16. \quad \therefore \quad x=12$.

দ্রষ্টব্য। এই সমীকরণগুলি শেষ পর্যন্ত সরল সমীকরণে পরিণত হইতেছে। কতক ক্ষেত্রে করণীসংশ্লিষ্ট সমীকরণ শেষ পর্যন্ত দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত হয়। সেরূপ উদাহরণ দ্বিঘাত সমীকরণের অধ্যায়ে দেওয়া হইল।

Ex. 9. *Simplify* $\dfrac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$.

লব ও হরকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া, প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sqrt{52-30\sqrt{3}}}{10-\sqrt{76+10\sqrt{3}}}$.

এক্ষণে $\sqrt{52-30\sqrt{3}}=\sqrt{27+25-2.3\sqrt{3}.5}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+5^2-2.3\sqrt{3}.5}=\sqrt{(3\sqrt{3}-5)^2}$

$=3\sqrt{3}-5.$

আবার $\sqrt{76+10\sqrt{3}}=\sqrt{75+1+2.5\sqrt{3}.1}$.

$=\sqrt{(5\sqrt{3}+1)^2}=5\sqrt{3}+1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{10-(5\sqrt{3}+1)}=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{9-5\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(3\sqrt{3}-5)(9+5\sqrt{3})}{81-75}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{3}\sqrt{3}.$

দ্রষ্টব্য। অনেক ক্ষেত্রেই দেখা যায় যে, একটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীকে চোখে দেখিয়া (আবশ্যকমত কোন মূলদ উৎপাদক দিয়া গুণ করিয়া) সহজেই একটি পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা, $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+1+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$, $3+\sqrt{5}=\frac{1}{2}(5+1+2\sqrt{5})=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2$, ইত্যাদি। এই প্রক্রিয়া করণীর সরলীকরণে বহু সময় প্রয়োজন হয়। সাধারণ ক্ষেত্রে দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়-প্রণালী দশম শ্রেণীতে পাঠ্য "অমূলদ রাশি" অধ্যায়ে দেওয়া হইল।

Examples V

1. Express in simplest form :

   (i) $\sqrt{24}$. (ii) $\sqrt[3]{81}$. (iii) $\sqrt[5]{160}$. (iv) $\sqrt[3]{375a^4b^3}$.

2. Simplify :

   (i) $\sqrt{147}-\sqrt{48}$. (ii) $\sqrt{24}+\sqrt{96}$. (iii) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$.

   (iv) $3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}$. (v) $3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{72}$.

   (vi) $5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$.

3. Simplify :

(i) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{40}$. (ii) $6\sqrt[3]{192}-4\sqrt[3]{375}-2\sqrt[3]{24}$.

(iii) $\sqrt{x^3yz}+\sqrt{xy^3z}+\sqrt{xyz^3}$.

4. Reduce to surds of the same order :

(i) $\sqrt[3]{2}$ and $\sqrt{3}$. (ii) $\sqrt[6]{4}$ and $\sqrt[4]{6}$. (iii) $\sqrt[3]{3}$ and $\sqrt[5]{5}$.

5. Which is greater ?

(i) $\sqrt{3}$ or $\sqrt[3]{4}$. (ii) $\sqrt{3}$ or $\sqrt[3]{6}$. (iii) $\sqrt[3]{9}$ or $\sqrt[4]{16}$.

6. Arrange in descending order of magnitudes :

(i) $\sqrt[6]{3}, \sqrt[8]{2}, \sqrt[24]{80}$. (ii) $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$.

7. Multiply and express in simplest form :

(i) $\sqrt{27}$ by $\sqrt{12}$. (ii) $\sqrt{80}$ by $\sqrt{45}$. (iii) $\sqrt[3]{4}$ by $\sqrt{8}$.

(iv) $4\sqrt{45}$ by $3\sqrt{20}$. (v) $7\sqrt{54}$ by $4\sqrt{20}$.

(vi) $\sqrt[4]{4}$ by $\sqrt[5]{5}$. (vii) $(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})$ by $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})$.

(viii) $(2+\sqrt{6}+\sqrt{10})$ by $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

8. Divide :

(i) $6\sqrt{35}$ by $\sqrt{63}$. (ii) $4\sqrt[3]{81}$ by $2\sqrt[3]{648}$.

(iii) $(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$ by $(7\sqrt{2}-5\sqrt{3})$. (iv) 1 by $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(v) $(3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20})$ by $3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}$.

9. Find the square of :

(i) $5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$. (ii) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$.

(iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$. (iv) $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

(v) $\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}+\sqrt{a-b}$.

10. Express with rational denominator :

(i) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{3}}$. (ii) $\dfrac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$. (iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

(iv) $\dfrac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt[4]{5}}$.

11. Simplify :

(i) $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$. [*H. S. 1962, Comp.*]

(ii) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ [*H. S. 1961, Comp.*]

(iii) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3+\sqrt{5})}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$.

(iv) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$.

(v) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{2})}$.

(vi) $\sqrt{\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{8})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+\sqrt{24}}}$. [*H. S. 1963*]

(vii) $\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}\div(\sqrt{5}+\sqrt{10})$.

(viii) $\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$.

12. Simplify :

(i) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

(ii) $\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{x-\sqrt{x^2-y}}-\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{x+\sqrt{x^2-y}}$.

(iii) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}$.

13. Shew that :

(i) $\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(ii) $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=1$, when $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. Given $\sqrt{3}=1{\cdot}732$, $\sqrt{5}=2{\cdot}236$, calculate the values of

(i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$. (ii) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$.

(iii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, where $x=4+2\sqrt{3}$.

15. If $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ and $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, find the value of

(i) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$. [*H. S. 1960*]

(ii) $x^4+x^2y^2+y^4$.

16. (i) If $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, and $xy=1$, find the value of x^2+xy+y^2.

(ii) If $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ and $ab=1$, find the value of $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$.

(iii) If $x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{1}{y}$, find the value of x^3+y^3.

17. (i) If $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, find the value of

$$x^4-4x^3-4x^2+16x+7.$$

(ii) If $x=2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, find the value of

$$x^3-6x^2+6x-1.$$

(iii) If $x=2+\sqrt{3}$, find the value of

$$x^3-2x^2-7x+2.$$

18. (i) If $x=\frac{n-\sqrt{m^2-4n}}{n+\sqrt{m^2-4n}}$, prove that

$$(m^2-n^2-4n)(x^2+1)+2(m^2+n^2-4n)x=0.$$

(ii) If $x\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$, prove that $x^3-3x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

19. (i) If $\sqrt[3]{(b+c)}+\sqrt[3]{(c+a)}+\sqrt[3]{(a+b)}=0$, show that

$$(a+b+c)^3=9(a^3+b^3+c^3).$$

(ii) If $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{y}+\sqrt{a-y}=\sqrt{z}+\sqrt{a-z}$, shew that $(y-z)(z-x)(x-y)=0$.

20. Solve the equations :

(i) $13-\sqrt[3]{5x-4}=7$. (ii) $\sqrt{5x-1}=2\sqrt{x+3}$.

(iii) $\sqrt{9x^2-11x-5}=3x-2$. (iv) $\sqrt{x+25}=1+\sqrt{x}$.

(v) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=5$. (vi) $\sqrt{9x-8}=3\sqrt{x+4}-2$.

(vii) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{x+3}$.

(viii) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = 2$. (ix) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-11} = 2$.

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}$.

(xi) $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1} = 4 + \dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$.

(xii) $\sqrt{4a+x} = \sqrt{a+x} + 2\sqrt{x-2a}$.

(xiii) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \dfrac{b}{\sqrt{x+a}}$.

(xiv) $\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}} + \dfrac{b}{x} = \sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}} + \dfrac{a}{x}$.

ANSWERS

1. (i) $2\sqrt{6}$. (ii) $3\sqrt[3]{3}$. (iii) $2\sqrt[3]{5}$. (iv) $5ab\sqrt[3]{3a}$.

2. (i) $3\sqrt{3}$. (ii) $6\sqrt{6}$. (iii) $3\sqrt{2}$. (iv) $3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})$.
(v) $-\sqrt{3}$. (vi) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

3. (i) $3\sqrt[3]{5}$. (ii) 0. (iii) $(x+y+z)\sqrt{xyz}$.

4. (i) $\sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{27}$. (ii) $\sqrt[12]{16}, \sqrt[12]{216}$. (iii) $\sqrt[15]{243}, \sqrt[15]{125}$.

5. (i) $\sqrt{3}$. (ii) $\sqrt[3]{6}$. (iii) $\sqrt[3]{9}$.

6. (i) $\sqrt[6]{3}, \sqrt[24]{80}, \sqrt[8]{2}$. (ii) $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$.

7. (i) 18. (ii) 60. (iii) $4\sqrt[6]{2}$. (iv) 360.
(v) $168\sqrt{30}$. (vi) $\sqrt[10]{800}$. (vii) 2. (viii) $4\sqrt{3}$.

8. (i) $2\sqrt{5}$. (ii) 1. (iii) $\frac{1}{23}[173 + 70\sqrt{6}]$.
(iv) $\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2} - \sqrt{6})$. (v) $\frac{2}{3}$.

9. (i) $30(4 + \sqrt{15})$. (ii) $2(a - \sqrt{a^2 - b^2})$. (iii) $2(5 + \sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15})$.
(iv) $2[1 + x^2 - \sqrt{1 + x^2 + x^4}]$.
(v) $2[\sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{(c-a)(a-b} + \sqrt{(a-b)(b-c)}]$.

10. (i) $\dfrac{3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}}{6}$. (ii) $\dfrac{[a + b + \sqrt{b(a+b)}]}{1}$. (iii) $\dfrac{2 + \sqrt{6} + \sqrt{10}}{4}$.
(iv) $\dfrac{2[25 + \sqrt{5} + 5\sqrt[4]{5} - 6\sqrt[4]{125}]}{31}$.

11. (i) $\frac{2}{3}$. (ii) 0. (iii) $\frac{6}{11}(7+\sqrt{5})$. (iv) $\sqrt{2}$.
(v) $2+\sqrt{3}$. (vi) $\sqrt{6}-2$. (vii) 1. (viii) 0.

12. (i) $2x$. (ii) $4\frac{x}{y}\sqrt{x^2-y}$. (iii) $2\frac{a^2}{b^2}$.

14. (i) 2·618. (ii) 3·732. (iii) 3·098.

15. (i) $\frac{15}{13}$. (ii) 195. **16.** (i) 35. (ii) $\frac{4}{3}$. (iii) 1692.

17. (i) 15. (ii) 1. (iii) 0.

20. (i) 44. (ii) 13. (iii) 9. (iv) 144. (v) $\frac{121}{25}$.
(vi) 12. (vii) 1. (viii) $\frac{9}{8}$. (ix) 5. (x) 4.
(xi) $\frac{81}{a}$. (xii) $\frac{153a}{72}$. (xiii) $\frac{b^2+2a^2-2ab}{2(b-a)}$. (xiv) $\frac{ab}{a+b}$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

মূলাকর্ষণ (Evolution)

6·1. মূলাকর্ষণ :

$x^2 = a$ হইলে, x-কে a-র বর্গমূল বলা হয় এবং ইহা $\sqrt{a}$ রূপে লিখিত হয়। সেইরূপ $x^3 = a$ হইলে, x-কে a-র ঘনমূল ($\sqrt[3]{a}$), অথবা $x^4 = a$ হইলে, x-কে a-র চতুর্থ মূল ($\sqrt[4]{a}$) বলা হয়। সাধারণভাবে $x^n = a$ হইলে, x-কে a-র n-তম মূল বলা হইয়া থাকে, এবং ইহা $\sqrt[n]{a}$ রূপে লিখিত হয়।

কোন রাশি বা রাশিমালা (কল্পনা করি a) দেওয়া থাকিলে উহার কোন নির্দিষ্ট মূল-নির্ণয় (অর্থাৎ যে রাশি বা রাশিমালাকে নির্ধারিত ঘাতে উন্নীত করিলে প্রদত্ত রাশি বা রাশিমালা পাওয়া যায় তাহা নির্ণয় করা) প্রক্রিয়াকে **মূলাকর্ষণ** (*Extraction of root or Evolution*) বলা হয়। প্রকৃতপক্ষে ইহা ঘাত উন্নয়ন (Involution) এর বিপরীত প্রক্রিয়া।

একপদবিশিষ্ট রাশির মূল-নির্ণয় :

তৃতীয় (সূচকতত্ত্ব) অধ্যায়ে বলা হইয়াছে যে, $\sqrt[n]{a}$ কে $a^{\frac{1}{n}}$ ভাবে লেখা যায়, এবং সূচকের নিয়মানুযায়ী $(abc\ldots)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}\ldots\ldots$। সুতরাং, একপদবিশিষ্ট রাশির কোনও মূল নির্ণয় করিতে আমরা প্রথমে উহার সাংখ্য-সহগের (যদি থাকে) প্রস্তাবিত মূল স্থির করিয়া পদটির প্রত্যেক উৎপাদকের ঘাতসূচক সংখ্যাকে প্রস্তাবিত মূল-নির্দেশক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিব। এইরূপে নির্ণীত উৎপাদক-গুলির গুণফল নির্ণেয় মূল হইবে। যথা,

$\sqrt[3]{343a^6b^3c^9}$ নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে সাংখ্য-সহগ 343-এর ঘনমূল 7, এবং ইহার অপর তিনটি উৎপাদক a^6, b^3, c^9 এর ঘাতসূচক সংখ্যা 6, 3, 9 কে মূল-নির্দেশক সংখ্যা 3 দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা তিনটি উৎপাদক a^2, b, c^3 পাই।

$$\therefore \quad \sqrt[3]{343a^6b^3c^9} = (343a^6b^3c^9)^{\frac{1}{3}} = 7a^2bc^3.$$

অনুরূপভাবে, $\sqrt[4]{81x^5y^8z^3} = 3x^{\frac{5}{4}}y^2z^{\frac{3}{4}}$,

এবং $\sqrt{\dfrac{121a^4}{256x^8}} = \dfrac{11a^2}{16x^4}$.

মূলের চিহ্ন :

এখানে একটি কথা মনে রাখা আবশ্যক। a^n এর ঘাত n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে a^n এর চিহ্ন a-র যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে, কিন্তু n যুগ্ম সংখ্যা হইলে a-র চিহ্ন '+' বা '−' যাহাই হউক না কেন, a^n এর চিহ্ন '+' হইবে, অর্থাৎ $(\pm a)^n = +a^n$ হইবে। সুতরাং, কোন রাশির অযুগ্ম-তম মূলের চিহ্ন ঐ রাশির যাহা চিহ্ন তাহার সহিত এক হইবে, কিন্তু কোন ধনাত্মক* রাশির যুগ্ম-তম মূল বাহির করিতে হইলে ঐ মূল নির্ণয় করিয়া উহার অগ্রে '±' চিহ্ন বসাইতে হইবে, কারণ উভয় চিহ্ন-সম্বলিত মূলকে নির্ধারিত যুগ্ম ঘাতে উন্নীত করিলে প্রদত্ত ধনাত্মক রাশি পাওয়া যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ, প্রকৃতপক্ষে,

$$\sqrt[3]{343a^6b^3c^9} = 7a^2bc^3, \quad \sqrt[5]{-32x^5y^2} = -2xy^{\frac{2}{5}},$$

$$\sqrt[4]{81x^5y^8z^3} = \pm 3x^{\frac{5}{4}}y^2z^{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt{\frac{121a^4}{256x^8}} = \pm\frac{11a^2}{16x^4},$$

$\sqrt{a^2-2ab+b^2} = \pm(a-b)$, ইত্যাদি।

এখন হইতে এই অধ্যায়ের বর্গমূল (বা যে-কোন যুগ্ম-তম মূল) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে কোন কোন স্থলে, বিশেষতঃ উত্তরমালায় আমরা '±' চিহ্ন উহ্য রাখিব। কিন্তু ছাত্রগণের উত্তর লিখিবার সময় ঐ ক্ষেত্রে '±' চিহ্ন বসানোই উচিত। যদি ঐরূপ ক্ষেত্রে নির্ণীত মূল একাধিক পদ-সম্বলিত হয়, তবে ঐ রাশিমালাকে একটি বন্ধনীর মধ্যে রাখিয়া উহার অগ্রে '±' চিহ্ন বসাইতে হইবে।

অতঃপর আমরা একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

6·2. একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় :

একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল সাধারণতঃ দুইপ্রকারে নির্ণয় করা যায়, (A) রাশিমালাকে পূর্ণবর্গের আকারে পরিণত করিয়া, এবং (B) পরে বর্ণিত সাধারণ নিয়মানুযায়ী।

---

* ঋণাত্মক রাশির যুগ্মতম মূল অবাস্তব হইবে।

(A) রাশিমালাকে পূর্ণবর্গরূপে সাজাইয়া বর্গমূল নির্ণয়ঃ

আমরা সূত্র সাহায্যে বা গুণ করিয়া দ্বিপদ, ত্রিপদ প্রভৃতি রাশির বর্গ স্থির করিতে পারি। এইরূপ কোন বর্গরাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে একটু মনোযোগ সহকারে পর্যবেক্ষণ করিয়া আমরা ইহাকে সাজাইয়া সূত্রানুযায়ী বর্গাকারে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয় করিতে পারি। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

Ex. 1. *Find the square root of*

(i) $9a^2 - 30ab + 25b^2$.

(ii) $\frac{36a^2}{25b^2} + \frac{48a}{5b} + 16$.

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $= (3a)^2 - 2.3a.5b + (5b)^2 = (3a - 5b)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(3a - 5b)$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা $= \left(\frac{6a}{5b}\right)^2 + 2 \cdot \frac{6a}{5b} \cdot 4 + 4^2$

$$= \left(\frac{6a}{5b} + 4\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(\frac{6a}{5b} + 4\right)$.

S. C. E. R. T., West Bengal Library Calcutta 25/3, B. C. Road

Ex. 2. *Find the square root of*

$x^4 - 2x^3 + \frac{1}{16} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. [*S. F. Additional, 1956*]

সূত্র অনুসারে আমরা জানি যে দ্বিপদ রাশির বর্গের তিনটি পদ এবং ত্রিপদ রাশির বর্গ ছয়টিপদবিশিষ্ট। এখানে প্রদত্ত রাশিমালা পাঁচটিপদবিশিষ্ট হওয়ায়, যদি ইহা পূর্ণবর্গ হয়, তবে সম্ভবতঃ ইহা ত্রিপদ রাশির বর্গ, এবং ছয়টি পদের দুইটি সরলীকৃত হইয়া একটিতে পরিণত হইয়াছে। এই দৃষ্টিতে দেখিলে, প্রদত্ত রাশিমালাকে x-এর ক্রমনিম্ন ঘাতে সাজাইয়া পাই

$$x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}. \quad \ldots \text{(i)}$$

ইহার প্রথম পদ x^2 এর বর্গ, এবং শেষ পদ $\pm\frac{1}{4}$ এর বর্গ। অতএব, প্রদত্ত রাশিমালার বর্গমূল সম্ভবতঃ $x^2 + kx \pm \frac{1}{4}$ আকারের হইবে, যেখানে অজ্ঞাত k আমাদের বাহির করিতে হইবে যাহাতে $(x^2 + kx \pm \frac{1}{4})^2$ প্রদত্ত রাশিমালার সহিত মিলিয়া যায়। এই ত্রিপদ রাশির বর্গের দ্বিতীয় পদ (x^3-বিশিষ্ট) প্রদত্ত

রাশিমালার দ্বিতীয় পদের সহিত তুলনা করিয়া $k=-1$ পাই, এবং x-এর সহগ তুলনা করিয়া মূলের শেষ পদে '+' চিহ্ন পাই। অতএব, সম্ভবতঃ নির্ণেয় বর্গমূলটি $x^2-x+\frac{1}{4}$ হইবে, উপরোক্তরূপ বিশ্লেষণ করিয়া আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই। এখন এই দৃষ্টিভঙ্গীতে (i)-কে আমরা নিম্নরূপে সাজাইয়া পূর্ণবর্গের আকারে পরিণত করিতে পারি।

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(x^4+2.x^2.\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16})-2.(x^2+\tfrac{1}{4}).x+x^2$$
$$=(x^2+\tfrac{1}{4})^2-2(x^2+\tfrac{1}{4}).x+x^2$$
$$=\{(x^2+\tfrac{1}{4})-x\}^2=(x^2-x+\tfrac{1}{4})^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(x^2-x+\frac{1}{4})$.

দ্রষ্টব্য। অনেক ক্ষেত্রেই উপরের ন্যায় পর্যবেক্ষণ করিয়া আগে বিশ্লেষণ করিয়া লইলে প্রদত্ত রাশিমালাকে পূর্ণবর্গের আকারে সাজাইতে সুবিধা হয়।

Ex. 3. *Find the square root of*
$$4x^4+9y^4+13x^2y^2-6xy^3-4x^3y.$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(2x^2)^2+(3y^2)^2+2.2x^2.3y^2-2(2x^2+3y^2).xy+x^2y^2$$
$$=(2x^2+3y^2)^2-2(2x^2+3y^2).xy+x^2y^2$$
$$=(2x^2+3y^2-xy)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^2-xy+3y^2)$.

Ex. 4. *Extract the square root of*

$$x^4+\frac{1}{x^4}-8\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+14.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}-2\right)-8\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+16$

$$=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2-2.\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right).4+4^2$$
$$=\left(x^2-\frac{1}{x^2}-4\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}-4\right)$.

Ex. 5. *Find the square root of*

(i) $a^2+2ab+b^2+\frac{2}{a-b}+\frac{1}{a^4-2a^2b^2+b^4}$.

(ii) $(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+2(a^4+b^4)$.

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $=(a+b)^2+2.(a+b)\cdot\frac{1}{(a+b)(a-b)}+\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$

$$=(a+b)^2+2.(a+b)\cdot\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$$

$$=\left(a+b+\frac{1}{a^2-b^2}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(a+b+\frac{1}{a^2-b^2}\right)$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+(a^2+b^2)^2$$
$$-(a^2+b^2)^2+2(a^4+b^4)$$
$$=\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$$
$$=(2ab)^2+a^4+b^4-2a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4$$
$$=(a^2+b^2)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(a^2+b^2)$.

(B) বর্গমূল-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম ঃ

কোন রাশির বর্গমূল যখন পর্যবেক্ষণ দ্বারা সহজে নির্ণয় করা যায় না, তখন নিম্নে বর্ণিত সাধারণ নিয়মানুসারে প্রার্থিত বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। সকল বীজগণিতীয় রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রেই সাধারণতঃ এই নিয়ম প্রযোজ্য। কিন্তু বর্গমূল-নির্ণয়ের ব্যাপারে সর্বদা এই নিয়ম প্রয়োগ না করিয়া যতদূর সম্ভব পর্যবেক্ষণ দ্বারা পূর্বোক্ত উপায়ে বর্গমূল-নির্ণয় সমধিক প্রশস্ত।

এই সাধারণ নিয়ম পাটীগণিতের বর্গমূল-নির্ণয়ের নিয়মের অনুরূপ। নিয়মটি বর্ণনা করিবার পূর্বে ইহার বিশ্লেষণের জন্য আমরা x-সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশি ax^2+bx+c-এর বর্গ নির্ণয় করিয়া তাহা হইতে কি প্রকারে উহার মূল ax^2+bx+c পাওয়া যায়, তৎসম্বন্ধে প্রথমে আলোচনা করিব। সাধারণ নিয়মানুসারে রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে প্রত্যেকস্থলেই রাশিটিকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম অথবা উর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজাইতে হয়।

ax^2+bx+c-এর বর্গ আমরা নিম্নলিখিতরূপে তিনটি অংশে বিভক্ত করিয়া লিখি

$$(ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bcx$$
$$= (ax^2)^2+(2ax^2+bx).bx+(2ax^2+2bx+c)c \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

যেহেতু (1), ax^2+bx+c-এর বর্গ, সুতরাং ax^2+bx+c (1)-এর বর্গমূল। তিনটি অংশে ভাগ করিয়া (1)-কে যেরূপভাবে লেখা হইয়াছে, তাহা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে মূলের (অর্থাৎ বর্গমূলের) প্রথম পদ ax^2, বর্গরাশি (1)-এর প্রথম পদ $(ax^2)^2$এর বর্গমূল। বর্গরাশি (1) হইতে ax^2এর বর্গ a^2x^4 বিয়োগ করিলে আমরা প্রথম ভাগশেষ $(2ax^2+bx).bx+(2ax^2+2bx+c)c$ পাই। ইহার প্রথমাংশ $(2ax^2+bx).bx$ পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, এই অংশ মূলের প্রথমপদ ax^2এর দ্বিগুণ $2ax^2$, এবং মূলের দ্বিতীয় পদ bxএর সমষ্টি $2ax^2+bx$ কে মূলের দ্বিতীয় পদ bx দ্বারা গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফল। সুতরাং এখন যদি মূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ $2ax^2$ এর সহিত মূলের দ্বিতীয় পদ bx যোগ করিয়া $2ax^2+bx$কে একটি ভাজকরূপে লইয়া প্রাপ্ত ভাজককে মূলের দ্বিতীয় পদ bx দ্বারা গুণ করি, তবে আমরা বর্গরাশি (1)-এর দ্বিতীয় অংশ $(2ax^2+bx)bx$ পাই। এই গুণফল প্রথম ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিলে আমরা দ্বিতীয় ভাগশেষরূপে (1)-এর তৃতীয় অংশ $(2ax^2+2bx+c)c$ পাই। পরীক্ষা করিলে আমরা দেখিতে পাই, এই অংশ মূলের প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টির দ্বিগুণ $2ax^2+2bx$ এবং মূলের তৃতীয় পদের সমষ্টি $2ax^2+2bx+c$কে মূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল। সুতরাং পূর্বের ন্যায় $2ax^2+2bx+c$কে ভাজকরূপে ধরিয়া ইহাকে মূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা যদি আমরা গুণ করি, তবে আমরা বর্গরাশি (1)-এর তৃতীয় অংশ অর্থাৎ দ্বিতীয় ভাগশেষ পাই। সুতরাং এই গুণফল দ্বিতীয় ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিলে আর কোন ভাগশেষ থাকিবে না এবং আমরা বর্গমূলরূপে ax^2+bx+c পাইব।

ইহা হইতেই আমরা বর্গমূল-নির্ণয়ের নিম্নে বর্ণিত সাধারণ সূত্রে উপনীত হই।

কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে,

(1) প্রথমতঃ, আমরা প্রদত্ত রাশিকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম বা ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে সাজাই।

(2) শক্তির ক্রমানুসারে সাজান প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের বর্গমূল প্রার্থিত **বর্গমূলের প্রথম পদ।** এই পদের বর্গ প্রদত্ত রাশি হইতে বিয়োগ করিয়া

আমরা প্রথম ভাগশেষ পাই। এই ভাগশেষ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশির বাকি সমস্ত পদ নামাইতে হয় না। বীজগণিতের সাধারণ ভাগের মত প্রয়োজনবোধে পদ নামান হয়।

(3) মূলের প্রথম পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাজকের প্রথম পদরূপে উপরিলিখিত প্রথম ভাগশেষের বামদিকে আমরা বসাই। এই পদ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল মূল এবং ভাজকের সহিত যুক্ত করি। ইহা **মূলের দ্বিতীয় পদ**। ইহা দ্বারা ভাজককে গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া এবং প্রদত্তরাশির বাকি পদগুলি প্রয়োজনমত নামাইয়া আমরা নূতন ভাগশেষ স্থির করি।

(4) পূর্বের ন্যায় মূলের প্রথম দুই পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া নূতন ভাগশেষের বামদিকে নূতন ভাজকরূপে স্থাপন করি। ভাজকের এই দুই পদের প্রথমটির দ্বারা উক্ত ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফল মূল এবং ভাজকের সহিত যুক্ত করি। ইহাই **মূলের তৃতীয় পদ**। ভাজক এবং ইহার গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া পরবর্তী ভাগশেষ স্থির করি। কোন ভাগশেষ না থাকিলে প্রাপ্তমূলই নির্ণেয় বর্গমূল হইবে।

যতক্ষণ পর্যন্ত কোন ভাগশেষ থাকিবে, ততক্ষণ পর্যন্ত এই নিয়ম পুনঃ পুনঃ প্রয়োগ করিতে হইবে।

প্রদত্ত রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইলে, অর্থাৎ ইহার নির্ণেয় বর্গমূল থাকিলে, এই নিয়ম প্রয়োগের শেষ অবস্থায় ভাগশেষ থাকিবে না।

নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Find the square root of the following expressions :*

(i) $4x^6-12x^4+28x^3+9x^2-42x+49$.

(ii) $4(x^{\frac{3}{2}}+4x^{-\frac{3}{2}})-12(x^{\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{3}{4}})+25$.

(i)

$$\begin{array}{l|l}
 & 4x^6-12x^4+28x^3+9x^2-42x+49\ (\,2x^3-3x+7 \\
 & 4x^6 \\
\hline
4x^3-3x & -12x^4+28x^3+9x^2 \\
 & -12x^4 \qquad\qquad +9x^2 \\
\hline
4x^3-6x+7 & 28x^3-42x+49 \\
 & 28x^3-42x+49 \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(2x^3-3x+7)$.

নিয়মের ব্যাখ্যা ঃ

এখানে প্রদত্ত রাশিমালা, x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজানই আছে। ইহার প্রথম পদ $(4x^6)$ এর বর্গমূল $(2x^3)$ নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ। ইহা ভাগফলের স্থানে বসাইলাম, এবং ইহার বর্গ ভাজ্যের প্রথম পদ হইতে বিয়োগ করিয়া ভাজ্যের পরবর্তী (প্রয়োজনবোধে) তিনটি পদ প্রথম ভাগশেষের স্থলে নামান হইল।

এক্ষণে মূলের প্রাপ্ত প্রথম পদের দ্বিগুণ করিয়া $(4x^3)$ ভাজকের প্রথম পদরূপে বসাইলাম। ইহা দ্বারা প্রথম ভাগশেষের প্রথম পদ $(-12x^4)$ কে ভাগ করিয়া নির্ণেয় মূলের দ্বিতীয় পদ $(-3x)$ পাইলাম। ইহা ভাগফলের দ্বিতীয় পদরূপে, এবং ভাজকের দ্বিতীয় পদরূপে বসান হইল। এই ভাগফলের দ্বিতীয় পদ $(-3x)$ দ্বারা ভাজকের দুইটি পদ $(4x^3-3x)$ কে গুণ করিয়া প্রথম ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করা হইল, এবং এই দ্বিতীয় ভাগশেষের সহিত ভাজ্যের অবশিষ্ট দুইটি পদ নামান হইল।

এইবার মূলের প্রাপ্ত দুইটি পদ $(2x^3-3x)$এর দ্বিগুণ করিয়া দ্বিতীয় ভাজকের স্থলে বসান হইল, এবং ইহার প্রথম পদ $(4x^3)$ দ্বারা দ্বিতীয় ভাগশেষের প্রথম পদ $(28x^3)$কে ভাগ করিয়া মূলের তৃতীয় পদ 7 পাওয়া গেল। ইহা ভাগফলের তৃতীয় পদরূপে, এবং দ্বিতীয় ভাজকের শেষ পদরূপে বসান হইল। এখন এই ভাগফলের তৃতীয় পদ দিয়া দ্বিতীয় ভাজকের তিনটি পদকে গুণ করিয়া দ্বিতীয় ভাগশেষের তিন পদ হইতে বিয়োগ করিলে কোন ভাগশেষ রহিল না। কাজেই নির্ণেয় বর্গমূল $2x^3-3x+7$ পাওয়া গেল।

(ii) x-এর শক্তির অধঃক্রমানুযায়ী সাজাইয়া প্রদত্ত রাশিমালা

$$=4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}\,(\,2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}} \\
 & 4x^{\frac{3}{2}} \\
4x^{\frac{3}{4}}-3 & -12x^{\frac{3}{4}}+25 \\
 & -12x^{\frac{3}{4}}+\ 9 \\
4x^{\frac{3}{4}}-6+4x^{-\frac{3}{4}} & 16-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}} \\
 & 16-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}})$.

6·3. বর্গমূলসম্বন্ধীয় বিবিধ উদাহরণাবলী :

Ex. 1. *Find the square root of the following expressions :*

(i) $a^4b^2(a^2+b^2)+2a^2b(a-b)-2a^5b^3+1.$

(ii) $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5.$

(i) $a^4b^2(a^2+b^2)+2a^2b(a-b)-2a^5b^3+1$

$$=a^6b^2+a^4b^4+2a^3b-2a^2b^2-2a^5b^3+1$$
$$=a^6b^2-2a^5b^3+a^4b^4+2(a^3b-a^2b^2)+1$$
$$=a^4b^2(a^2-2ab+b^2)+2a^2b(a-b)+1$$
$$=\{a^2b(a-b)\}^2+2a^2b(a-b)+1$$
$$=\{a^2b(a-b)+1\}^2=(a^3b-a^2b^2+1)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(a^3b-a^2b^2+1).$

(ii) $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5.$

মনে কর $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=x$; $\therefore \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2=x^2-2.$

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=x^3-3x.$$

এবং $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2-2=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(x^4-4x^2+2)-2(x^3-3x)+3(x^2-2)-4x+5$$
$$=x^4-2x^3-x^2+2x+1=(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1$$
$$=(x^2-x-1)^2=\left\{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\right\}^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left\{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\right\}.$

Ex. 2. *Find the value of x that will make $9x^4-30x^3+13x^2+19x+9$, a perfect square.*

$$
\begin{array}{l|l}
 & 9x^4 - 30x^3 + 13x^2 + 19x + 9\,(3x^2 - 5x - 2 \\
 & 9x^4 \\
\hline
6x^2 - 5x & -30x^3 + 13x^2 \\
 & -30x^3 + 25x^2 \\
\hline
6x^2 - 10x - 2 & -12x^2 + 19x + 9 \\
 & -12x^2 + 20x + 4 \\
\hline
 & -x + 5
\end{array}
$$

এক্ষণে ভাগশেষ $-x+5=0$ হইলে অর্থাৎ $x=5$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 3. *Find the relation among a, b, c so that the quadratic expression ax^2+bx+c may be a perfect square.*

প্রদত্ত রাশি $ax^2+bx+c=(x\sqrt{a})^2+2(x\sqrt{a})\left(\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)+c$

$$=(x\sqrt{a})^2+2(x\sqrt{a})\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)+\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c$$

$$=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

$\therefore\quad c-\dfrac{b^2}{4a}=0$, অর্থাৎ $b^2=4ac$ হইলে প্রদত্ত রাশি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 4. *Extract the square root of*

$$2x^2(y+z)^2+2y^2(z+x)^2+2z^2(x+y)^2+4xyz(x+y+z).$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$2x^2(y^2+z^2+2yz)+2y^2(z^2+x^2+2zx)$$
$$+2z^2(x^2+y^2+2xy)+4xyz(x+y+z)$$
$$=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+8xyz(x+y+z)$$
$$=4\{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2xyz(x+y+z)\}$$
$$=4(xy+xz+yz)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm 2(xy+xz+yz)$.

Ex. 5. *Find the numerical value of n that will make $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-5\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+n$ a perfect square.*

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2-2.\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+n$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{5}{2}\right)^2+n-2-\frac{25}{4}$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{5}{2}\right)^2+n-8\tfrac{1}{4}.$$

সুতরাং বন্ধনীর বহিঃস্থ অংশ $n-8\frac{1}{4}=0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

∴ $n=8\frac{1}{4}$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 6. *Find the least number that must be added to* $237\times240\times243\times246$ *to make the sum a perfect square.*

$237=x$ ধরিয়া, $237\times240\times243\times246=x(x+3)(x+6)(x+9)$
$=(x^2+9x)(x^2+9x+18)=a(a+18)$, যখন $a=x^2+9x$
$=(a^2+18a+81)-81=(a+9)^2-81.$

∴ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ সংখ্যা $=81.$

Ex. 7. *Find the square root of*

$$\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}.$$

প্রদত্ত রাশিমালাকে x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^4}{4}-2x^3+\left(4+\frac{a}{3}\right)x^2-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}\right. \\
 & \frac{x^4}{4} \\ \hline
x^2-2x & -2x^3+\left(4+\frac{a}{3}\right)x^2 \\
 & -2x^3+4x^2 \\ \hline
x^2-4x+\frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
 & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\ \hline
\end{array}$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}\right)$.

Ex. 8. *Find the square root of*

(i) $x^6+\frac{1}{x^6}-4x^4+4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+2.$ (ii) $x^4+y^4+(x+y)^4.$

(i) x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^6-4x^4+4x^2+2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^6}$$

$$=(x^3-2x)^2+2.(x^3-2x).\frac{1}{x^3}+\left(\frac{1}{x^3}\right)^2$$

$$=\left(x^3-2x+\frac{1}{x^3}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^3-2x+\frac{1}{x^3}\right)$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^4+y^4+x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3)$$
$$=2\{(x^4+y^4+2x^2y^2)+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2\}$$
$$=2\{(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2\}$$
$$=2(x^2+y^2+xy)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt{2}(x^2+xy+y^2)$.

Ex. 9. *Find the square root of*

$$3(x+1)(3x-1)(3x+7)\ (3x+11)+256$$

and hence find the square root of

$$299\times303\times307\times311+256.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x+3)(3x+7)(3x-1)(3x+11)+256$

$$=(9x^2+30x+21)(9x^2+30x-11)+256$$
$$=(a+21)(a-11)+256,\quad \text{যখন } a=9x^2+30x$$
$$=a^2+10a-231+256=a^2+10a+25$$
$$=(a+5)^2=(9x^2+30x+5)^2\quad [\ a\text{-এর মান বসাইয়া }]\ ।$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(9x^2+30x+5)$.

একটু পর্যবেক্ষণ করিলে আমরা দেখিতে পাই যে, প্রদত্ত রাশিমালায় x এর মান 100 বসাইলে, এই রাশিমালা $303 \times 299 \times 307 \times 311 + 256$ তে পরিণত হয়। স্থতরাং নির্ণীত বর্গমূল $9x^2 + 30x + 5$ তে x এর মান 100 বসাইলে আমরা প্রার্থিত বর্গমূল পাইব।

$$\therefore \text{ প্রার্থিত বর্গমূল} = 9.100^2 + 30.100 + 5$$
$$= 90000 + 3000 + 5 = 93005.$$

Ex. 10. *For what value of n will the expression $25x^4 - 30ax^3 + nx^2 - 24a^3x + 16a^4$ be a perfect square?*

প্রথমে আমরা সাধারণ নিয়মানুসারে প্রদত্ত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিব।

$$\begin{array}{l|l}
 & 25x^4 - 30ax^3 + nx^2 - 24a^3x + 16a^4 \;\big(\, 5x^2 - 3ax + 4a^2 \\
 & 25x^4 \\
\hline
10x^2 - 3ax & -30ax^3 + nx^2 \\
 & -30ax^3 + 9a^2x^2 \\
\hline
10x^2 - 6ax + 4a^2 & (n - 9a^2)x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\
 & \quad 40a^2x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\
\hline
 & \quad (n - 49a^2)x^2
\end{array}$$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশিমালাটিকে পূর্ণবর্গ হইতে হইলে $n - 49a^2 = 0$ হইবে।

$\therefore$ $n = 49a^2$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইবে।

দ্রষ্টব্য। যেহেতু, বর্গমূল নির্ণয়ে প্রদত্ত রাশিমালাকে তদন্তর্গত যে-কোন অক্ষরের শক্তির ঊর্ধ্ব বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের বর্গমূল নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ এবং প্রদত্ত রাশির শেষ পদের বর্গমূল নির্ণেয় বর্গমূলের শেষ পদ হইবে, সেইজন্য এখানে নির্ণেয় বর্গমূলের শেষ পদ অর্থাৎ তৃতীয় পদ $4a^2$ ধরিয়া ভাজককে গুণ করা হইল।

Ex. 11. *Find the square root of $x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 + y^4 + 4xy^3$ by arranging the expression according to both descending and ascending powers of x, and explain the discrepancy in the roots obtained in the two cases.*

x-এর শক্তির অধঃক্রম এবং ঊর্ধ্বক্রম-অনুসারে রাশিমালাটি সাজাইলে উহা যথাক্রমে $x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ এবং $y^4 + 4xy^3 + 2x^2y^2 - 4x^3y + y^4$ হয়। সাজানো রাশিমালাদ্বয়ের বর্গমূল-নির্ণয় নিম্নে প্রদর্শিত হইল।

$$\begin{array}{l|l}
 & x^4-4x^3y+2x^2y^2+4xy^3+y^4 \;\big(\; x^2-2xy-y^2 \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2-2xy & -4x^3y+2x^2y^2 \\
 & -4x^3y+4x^2y^2 \\ \hline
2x^2-4xy-y^2 & -2x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
 & -2x^2y^2+4xy^3+y^4 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & y^4+4xy^3+2x^2y^2-4x^3y+x^4 \;\big(\; y^2+2xy-x^2. \\
 & y^4 \\ \hline
2y^2+2xy & 4xy^3+2x^2y^2 \\
 & 4xy^3+4x^2y^2 \\ \hline
2y^2+4xy-x^2 & -2x^2y^2-4x^3y+x^4 \\
 & -2x^2y^2-4x^3y+x^4 \\ \hline
\end{array}$$

এইরূপে নির্ণীত বর্গমূলদ্বয়ে বৈষম্য পরিলক্ষিত হইলেও প্রকৃতপক্ষে তাহা বৈষম্য নয়। কেননা আমরা জানি, প্রত্যেক রাশির সমমানবিশিষ্ট বর্গমূল দুইটি—একটি ঋণাত্মক এবং অপরটি ধনাত্মক। এক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিমালার দুইপ্রকারে প্রাপ্ত বর্গমূলদ্বয় $x^2-2xy-y^2$ এবং $y^2+2xy-x^2$ অর্থাৎ $-(x^2-2xy-y^2)$. সুতরাং, দুই মূলের মধ্যে পার্থক্য শুধু চিহ্নে। প্রকৃতপক্ষে দুইভাবে প্রাপ্ত বর্গমূলের প্রত্যেকটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখিয়া তৎপূর্বে '$\pm$' চিহ্ন বসাইলে (মূলের চিহ্ন সম্বন্ধে § 6·1 দেখ) দুই ক্ষেত্রে বর্গমূলের কোন পার্থক্য থাকিবে না।

Examples VI(a)

Find the square root of each of the following expressions :

1. $9x^4+30x^2y^2+25y^4$. **2.** $\frac{25}{4}x^2y^2-20x^2yz+16x^2z^2$.

3. $\dfrac{49x^2}{16y^2}+\dfrac{64y^2}{x^2}+28$. **4.** $81x^4y^2+\dfrac{49}{x^2y^2}+126x$.

5. $x^{-4}+1-\dfrac{2}{x^2}$. **6.** $16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4$.

7. (i) $\dfrac{x^2}{y^2}-1\dfrac{3}{4}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$. [*1951 Addl.*]

(ii) $\dfrac{25x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{25x^2}-20\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{5x}+2$.

8. (i) $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$.

(ii) $a^2(b^2+4c^2)+b^2c(c-2a)+4abc(a-c)$.

9. $\frac{x^4}{64}+\frac{x^3}{8}-x+1.$

10. $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2.$

11. (i) $x^4-2x^3+\frac{1}{16}+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x.$ [*1956 Addl.*]

(ii) $x^4+x^{-4}+4x^{-3}+2+4x+4x^{-2}.$ [*1959 Addl.*]

12. (i) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\frac{1}{a}\right).$ [*1957 Addl.*]

(ii) $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47.$ [*1958 Addl.*]

13. (i) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$

(ii) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4.$

(iii) $4x^4+9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)+18.$

14. (i) $4x^3+9x^{-4}+x^2+12x^{-\frac{1}{2}}-4x^{\frac{5}{2}}-6x^{-1}.$

(ii) $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}.$

15. (i) $4x^{-\frac{3}{2}}+9y^{-\frac{2}{3}}+z^{-\frac{1}{2}}+12x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{3}}+6y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{3}{4}}z^{-\frac{1}{4}}.$

(ii) $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}.$

16. (i) $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+2x(y+z)(yz-x^2).$

(ii) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4).$

17. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1.$ [*1954 Addl.*]

18. Prove that

(i) $(x-1)(x+7)(x-3)(x+5)+8^2$ is a perfect square. [*1957 Addl.*]

(ii) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ is a perfect square. [*1952 Addl.*]

19. (i) Show that $(2x-3)(2x+1)(2x+5)(2x+9)+256$ is a perfect square, and hence find the square root of

$$297 \times 301 \times 305 \times 309 + 256.$$

(ii) What must be subtracted from $(a+4)(a+5)(a+6)(a+7)+11$ to make it a perfect square.

20. (i) For what value of m is $x^4-6x^3+7x^2+6x+m$ a perfect square ? [*1954 Addl.*]

(ii) Find c so that $\frac{x^2}{y^2}-c+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}$ may be a perfect square. [*1956 Addl.*]

(iii) What should be added to $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$ in order to make it a perfect square ? [*1953 Addl.*]

21. For what value of n will the following be a perfect square ?

(i) $x^4-2x+\frac{1}{9}+nx^2-6x^3$.

(ii) $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{2x^2}{3}+\frac{4}{9}-nx^3-\frac{8x}{3}$.

22. Prove that $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ is a perfect square, if $p^2s=r^2$, and $p^3-4pq+8r=0$.

ANSWERS

1. $3x^2+5y^2$. **2.** $\frac{5}{2}xy-4xz$. **3.** $\frac{7x}{4y}+\frac{8y}{x}$.

4. $9x^2y+\frac{7}{xy}$. **5.** $x^{-2}-1$. **6.** $4x^2-4xy+y^2$.

7. (i) $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x}$. (ii) $\frac{5x}{y}-2-\frac{y}{5x}$.

8. (i) $a+bx+cx^2$. (ii) $ab+2ac-bc$. **9.** $\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}-1$.

10. x^3-x^2+x+y. **11.** (i) $x^2-x+\frac{1}{4}$. (ii) $x^2+2x^{-1}+x^{-2}$.

12. (i) $a-\frac{1}{a}-2$. (ii) $a-\frac{1}{2a}-7$. **13.** (i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$.

(ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$. (iii) $2x^2+3x+\frac{3}{x}$.

14. (i) $2x^{\frac{3}{2}}-x+3x^{-2}$. (ii) $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$.

15. (i) $2x^{-\frac{3}{4}}+3y^{-\frac{1}{3}}+z^{-\frac{1}{4}}$. (ii) $x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}}$.

16. (i) $x^2-x(y+z)-yz$. (ii) a^2+b^2.

17. $x^2+7x+11$. 19. (i) 91789. (ii) 10.

20. (i) 1. (ii) $1\frac{3}{4}$. (iii) $a+2$.

21. (i) $9\frac{2}{3}$. (ii) 1.

6·4. ঘনমূল-নির্ণয়।

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ সূত্র হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, কোন দ্বিপদ রাশির ঘন চারিটি পদ-বিশিষ্ট রাশিমালা। কাজেই চারিটি পদ-বিশিষ্ট কোন রাশিমালা যদি প্রকৃত ঘনরাশি হয়, তবে তাহার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে ঐ রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম-অনুসারে উপরোক্ত সূত্রানুযায়ী সাজাইয়া সহজেই উহার ঘনমূল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ মনে করি, $27a^6-8a^3b^3-54a^5b+36a^4b^2$ রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে a-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $=27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$

$$=(3a^2)^3-3\cdot(3a^2)^2\cdot 2ab+3\cdot(3a^2)\cdot(2ab)^2-(2ab)^3$$

$$=(3a^2-2ab)^3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=3a^2-2ab$.

তিনটি বা উহার অধিক পদ-বিশিষ্ট রাশির ঘনের অনেকগুলি পদসংখ্যা হইবে। সেরূপ কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে নিম্নে বর্ণিত সাধারণ নিয়মের প্রয়োগই সুবিধাজনক। বলা বাহুল্য, চারিপদবিশিষ্ট রাশিমালার ক্ষেত্রেও এই নিয়ম প্রযোজ্য। এমনকি, পাটীগণিতে কোন বৃহৎ সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়েও এই নিয়ম প্রয়োগ করা যায়।

প্রদত্ত কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম।

প্রদত্ত কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমেই রাশিটি উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম বা ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাইতে হয়। এই সাজানো রাশির **প্রথম পদের ঘনমূল প্রার্থিত ঘনমূলের প্রথম পদ**

হইবে। মূলের এই প্রথম পদের ঘন করিয়া প্রাপ্ত ঘনরাশি প্রদত্ত রাশি হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ স্থির করা হয়। তারপর **ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গের তিনগুণ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিলে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়।** দ্বিতীয় পদ নির্ণয়ান্তে ভাগশেষকে ভাগ করিবার জন্য প্রথম ভাজক নিম্নলিখিতরূপে স্থির করা হয়। ঘনমূল-নির্ণয়ে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই ভাজক নিম্নবর্ণিত উপায়ে প্রাপ্ত তিনটি পদের সমষ্টি :

(1) ভাজক নির্ণয়ের পূর্বপর্যন্ত মূলের লব্ধ পদ-সমষ্টির বর্গের তিনগুণ ;

(2) পূর্বলব্ধ পদসমষ্টি এবং নূতন পদ (নিম্নে বর্ণিত উপায়ে প্রাপ্ত)-এর গুণফলের তিনগুণ ; এবং

(3) নূতন পদের বর্গ।

এইরূপে তিন পদের সমষ্টিরূপে প্রাপ্ত ভাজককে মূলের নূতন পদ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া পরবর্তী ভাগশেষ স্থির করিতে হয়। মূলের সকল পদ নির্ণীত হইলে আর কোন ভাগশেষ থাকে না।

পূর্বলব্ধ পদসমূহের সমষ্টির বর্গের তিনগুণ করিয়া যে রাশি পাওয়া যায়, তাহার প্রথম পদ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া ভাগলব্ধ রাশি ঘনমূলের পরবর্তী নূতন পদ হইবে।

নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল :

Ex. 1. *Find the cube root of*

$$8x^6y^3-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6.$$

এখানে প্রদত্ত রাশিমালা x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজানো আছে।

$$\begin{array}{r|l}
 & 8x^6y^3-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6\,(2x^2y-5y^2 \\
 & 8x^6y^3 \\ \hline
3\times(2x^2y)^2 = \;\;12x^4y^2 & -60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6 \\
3\times(2x^2y)\times(-5y^2) = -30x^2y^3 & \\
(-5y^2)^2 = \;\;25y^4 & \\ \hline
12x^4y^2-30x^2y^3+25y^4 & -60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6 \\ \hline
\end{array}$$

সাজানো রাশির প্রথম পদ $8x^6y^3$এর ঘনমূল $2x^2y$, সুতরাং, ঘনমূলের প্রথম পদ $2x^2y$. প্রথম পদ $2x^2y$ এর ঘন $8x^6y^3$ প্রদত্ত রাশি হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ $-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6$. ঘনমূলের লব্ধ প্রথম পদ $2x^2y$এর বর্গের 3 গুণ$=12x^4y^2$. সুতরাং ভাগশেষের প্রথম পদ $-60x^4y^4$কে এই $12x^4y^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ পাওয়া গেল।

ভাজক নির্ণয়

ঘনমূলের লব্ধ প্রথম পদ $2x^2y$ এর বর্গের 3 গুণ $= 12x^4y^2$, পূর্বলব্ধ পদ $2x^2y$ এবং নূতন দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ এর গুণফলের 3 গুণ $= -30x^2y^3$.

নূতন দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ এর বর্গ $= 25y^4$.

সুতরাং, ভাজক = এই তিনের সমষ্টি $= 12x^4y^2 - 30x^2y^3 + 25y^4$.

ইহাকে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $-60x^4y^4 + 150x^2y^5 - 125y^6$ ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ 0 হইল।

সুতরাং, নির্ণেয় ঘনমূল $= 2x^2y - 5y^2$.

Ex. 2. *Find the cube root of*

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6.$$

পরের পৃষ্ঠায় প্রদত্ত রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয়কার্য দেখানো হইল। এখানে রাশিমালা x এর অধঃক্রম অনুযায়ী সাজানোই আছে।

পূর্বোল্লিখিত নিয়ম-অনুযায়ী মূলের দুইটি পদ $x^2 - 2xy$ নির্ণয়ের পর, $12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$ অবশিষ্ট রহিল। এখন, মূলের লব্ধপদদ্বয়ের বর্গ $(x^2 - 2xy)^2$ এর 3 গুণ, অর্থাৎ $3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$ পরবর্তী ভাজকের অংশত্রয়ের প্রথম অংশ হইবে। এই অংশের প্রথম পদ $3x^4$ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদ $12x^4y^2$ কে ভাগ করিলে মূলের পরবর্তী পদ $4y^2$ পাওয়া গেল। এখন, $4y^2$ এর সাহায্যে পরবর্তী ভাজকের অপর দুই অংশ নির্ণয় করিতে হইবে। মূলের লব্ধপদদ্বয় $x^2 - 2xy$ এবং মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ এর গুণফলের 3 গুণ, $12x^2y^2 - 24xy^3$ ভাজকের দ্বিতীয় অংশ এবং মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$এর বর্গ $16y^4$ ভাজকের তৃতীয় অংশ হইল। এই তিনের সমষ্টি $3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$ পরবর্তী সম্পূর্ণ ভাজক হইল। এই ভাজককে মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ $12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$ হইতে বিয়োগ করিয়া কোন ভাগশেষ না থাকায় ঘনমূল $x^2 - 2xy + 4y^2$ নির্ণীত হইল।

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6 \left(x^2 - 2xy + 4y^2 \right.$$

$$x^6$$

$$-6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3$$

$$3 \times (x^2)^2 = 3x^4$$

$$3 \times x^2 \times (-2xy) = -6x^3y$$

$$(-2xy)^2 = +4x^2y^2$$

$$3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2 \quad\Big|\quad -6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2 - 2xy)^2 = 3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$$

$$3 \times (x^2 - 2xy) \times 4y^2 = +12x^2y^2 - 24xy^3$$

$$(4y^2)^2 = +16y^4$$

$$3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4 \quad\Big|\quad 12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

Ex. 3. *Find the cube root of* 13312053.

স্পষ্টতঃই প্রদত্ত সংখ্যা 13000000 এবং 14000000 এর মধ্যে অবস্থিত এবং 13 সংখ্যাটি 2^3 এবং 3^3 এর মধ্যে অবস্থিত হওয়ায় প্রদত্ত সংখ্যা 200^3 এবং 300^3 এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, নির্ণেয় ঘনমূল তিন অঙ্কবিশিষ্ট, এবং ইহার শতকের ঘরের অঙ্ক 2. নিম্নে পূর্বোল্লিখিত নিয়মানুযায়ী এই ঘনমূল নির্ণয় প্রণালী দেখানো হইল :

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 13312053 & (\ 200+30+7 \\
 & 8000000 & \\
\hline
3(200)^2 = 120000 & 5312053 & \\
3(200)\times 30 = 18000 & & \\
30^2 = 900 & & \\
\hline
138900 & 4167000 & \\
\hline
 & 1145053 & \\
3(230)^2 = 158700 & & \\
3(230)\times 7 = 4830 & & \\
7^2 = 49 & & \\
\hline
163579 & 1145053 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল = 237.

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রথম ভাজকের প্রথম অংশ $3(200)^2$ অর্থাৎ 120000 দিয়া প্রথম ভাগশেষ 5312053 এর প্রথম ছয় অঙ্ককে ভাগ করিতে গিয়া 4 বার যায়, সুতরাং, মূলের দশকের অঙ্ক সম্ভবতঃ 4, অর্থাৎ মূলের দ্বিতীয় পদ সম্ভবতঃ 40. কিন্তু 40 দ্বিতীয় পদ ধরিলে, নিয়মানুসারে প্রথম ভাজকের তিনটি পদের সমষ্টি প্রথম ভাগশেষ অপেক্ষা অধিক হইয়া যায়। কাজেই মূলের দশকের অঙ্ক 3, অর্থাৎ মূলের দ্বিতীয় পদ 30 ধরিয়া অগ্রসর হওয়া গেল।

মূলের এককের অঙ্ক বাহির করিতে, পূর্ববৎ দ্বিতীয় ভাজকের প্রথম পদ $3(230^2)$ বা 158700 দ্বারা দ্বিতীয় ভাগশেষ 1145053 কে ভাগ করিয়া 7 বার গেল। সুতরাং, এককের অঙ্ক সম্ভবতঃ 7, সেই অনুসারে নিয়মানুযায়ী অগ্রসর হইয়া দেখা গেল, কার্যশেষে কোন ভাগশেষ রহিল না। কাজেই নির্ণেয় ঘনমূল 237 পাওয়া গেল।

দ্রষ্টব্য। মূলের এককের অঙ্ক যে 7 হইবে, তাহা অন্যরূপেও নির্ধারণ করা যায়, কারণ 7^3এর একক-স্থানের সংখ্যা 3, এবং ইহা প্রদত্ত সংখ্যার একক-

স্থানের সংখ্যার সহিত মিলিয়া যাইতেছে। 7 ভিন্ন অন্য কোন অঙ্কের ঘনের একক 3 হয় না। বলা বাহুল্য, প্রদত্ত সংখ্যা প্রকৃত ঘনসংখ্যা হইলে এই নিয়মে মূলের এককের অঙ্ক স্থির করা যায়।

Examples VI (b)

Find the cube root of each of the following expressions :—

1. $a^3b^3+3a^2b^2c^2+3abc^4+c^6$.

2. $8x^3+12x^2+6x+1$.

3. $125x^3-225x^2y^2+135xy^4-27y^6$.

4. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

5. $27x^6-27x^5+171x^4-109x^3+342x^2-108x+216$.

6. $\frac{x^3}{y^3}+\frac{8y^3}{x^3}-\frac{12x^2}{y^2}-\frac{48y^2}{x^2}+\frac{54x}{y}+\frac{108y}{x}-112$.

7. $a^3b(b^2+3bc+3c^2)+b^3c(c^2+3ca+3a^2)$
$\qquad+c^3a(a^2+3ab+3b^2)+6a^2b^2c^2$.

8. $8x^6+36x^5-30x^4-225x^3+105x^2+441x-343$.

9. $\frac{8x^5}{y^5}\left(\frac{x}{y}+6\right)+\frac{30x^2}{y^2}\left(2\frac{x^2}{y^2}-3\right)-\frac{4x}{y}\left(\frac{20x^2}{y^2}-27\right)-27$.

10. $a^3x^6+3a^2bx^5+3ax^4(b^2+ca)+bx^3(b^2+6ca)$
$\qquad+3cx^2(b^2+ca)+3bc^2x+c^3$.

11. Find the values of a and b so that $27x^6+54x^5+144x^4$ $19ax^3+12(a+b)x^2+12ax+64$ may be a perfect cube.

12. Find the cube roots of

(i) 21952. (ii) 185193. (iii) 33076161. (iv) 45499293.

ANSWERS

1. $ab+c^2$. 2. $2x+1$. 3. $5x-3y^2$. 4. $1+x+x^2$.

5. $3x^2-x+6$. 6. $\frac{x}{y}-4+\frac{2y}{x}$. 7. $ab+ac+bc$. 8. $2x^2+3x-7$.

9. $\frac{2x^2}{y^2}+\frac{4x}{y}-3$. 10. ax^2+bx+c. **11.** $a=8$, $b=8$.

12. (i) 28. (ii) 57. (iii) 321. (iv) 357.

সপ্তম অধ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ

(Simultaneous Equations of First Degree)

7·1. সরল সহ-সমীকরণ। একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধানের সহিত ছাত্রগণ পূর্বেই পরিচিত। এখানে আমরা দুই বা ততোধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একাধিক সরল সহ-সমীকরণের সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করিব। প্রথমেই উল্লেখ করা উচিত যে, যতগুলি অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিতে হইবে, ঐ সকল রাশি-সম্বলিত ঠিক ততগুলি সমীকরণ দেওয়া থাকা প্রয়োজন।

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণ দেওয়া থাকিলে উহা সমাধানের সাধারণ নিয়ম, উহাদের একটি অজ্ঞাত রাশি অপনীত করা। দুই সমীকরণকে প্রয়োজনীয় দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া একটি অজ্ঞাত রাশির সহগ সমান করিয়া লইয়া যোগ বা বিয়োগ করিলে উক্ত রাশিবিহীন, অর্থাৎ দ্বিতীয় অজ্ঞাতরাশি বিশিষ্ট একটি সরল সমীকরণ পাওয়া যাইবে। তাহা হইতে দ্বিতীয় অজ্ঞাত রাশি সহজেই পাওয়া যায়। তখন প্রদত্ত সমীকরণের যে-কোনটিতে উহার লব্ধ মান বসাইলে প্রথম অজ্ঞাত রাশিটিও পাওয়া যাইবে।

বিকল্পে, প্রদত্ত দুইটি সমীকরণের প্রত্যেকটি হইতে একই অজ্ঞাত রাশির অন্য অজ্ঞাত রাশি-সংশ্লিষ্ট মান বাহির করিয়া সেই দুইটি মান পরস্পর সমান লইয়াও অজ্ঞাত রাশির সমাধান করা যায়।

দুইটি সরল সহ-সমীকরণের সমাধানের অন্যান্য নিয়মের মধ্যে বিশেষ উল্লেখযোগ্য "বজ্রগুণন-প্রণালী"। ইহা পরে বর্ণিত হইয়াছে।

তিন বা ততোধিক সরল সহ-সমীকরণের ক্ষেত্রে উহা হইতে পূর্ববর্ণিত উপায়ে একটি একটি করিয়া অজ্ঞাত রাশি অপনীত করিয়া সমাধান করা যায়।

নিম্নে বিভিন্ন উপায়ে বিবিধ সহ-সমীকরণের সমাধান প্রদর্শিত হইল।

Ex. 1. *Solve the equations* $6x-5y=59$, $5x-3y-41=0$.

সমীকরণ দুইটি নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$6x-5y-59=0 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

$$5x-3y-41=0 \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

(i)কে 3 দ্বারা এবং (ii) কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$18x - 15y - 177 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(iii)}$$

$$25x - 15y - 205 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(v)}$$

বিয়োগ করিয়া,

$$-7x + 28 = 0, \quad \text{বা} \quad x = 4.$$

এই মান (i)-এ বসাইয়া,

$$24 - 5y - 59 = 0, \quad \text{বা} \quad 5y = -35.$$

$$\therefore \; y = -7.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 4, \;\; y = -7.$

Ex. 2. *Solve the equations* $\frac{x}{3} - \frac{y}{7} = 4x - 5y + 23 = 0.$

এখানে, $\frac{x}{3} - \frac{y}{7} = 0$, বা $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = k$, মনে কর।

$$\therefore \; x = 3k \;\; \text{এবং} \;\; y = 7k.$$

x এবং y-এর এই মান অপর সমীকরণ $4x - 5y + 23 = 0$ তে বসাইলে,

$$12k - 35k + 23 = 0, \quad \text{বা} \quad k = 1.$$

$$\therefore \; x = 3 \;\; \text{এবং} \;\; y = 7.$$

Ex. 3. *Solve the equations*

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} &= 2 \\ \frac{x}{14} + \frac{y}{18} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \cdots\cdots \; (1) \\ \cdots\cdots \; (2) \end{aligned}$$

(1) এবং (2) সরল করিয়া আমরা যথাক্রমে পাই

$$5x - 3y = 8 \quad \text{বা} \quad x = \frac{3y+8}{5} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

$$\text{এবং} \quad 9x + 7y = 126 \; \text{বা} \; x = \frac{126 - 7y}{9} \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

$$\therefore \; \frac{3y+8}{5} = \frac{126-7y}{9},$$

অর্থাৎ, $27y + 72 = 630 - 35y$ বা $62y = 558$. $\therefore \; y = 9.$

y এর এই মান (3)তে বসাইয়া, $x = \frac{27+8}{5} = 7.$

$$\therefore \; x = 7, \;\; y = 9.$$

Ex. 4. *Solve* $(a-b)x=(a+b)y$ .... (1)

$x+y=c$ .... (2)

(1) হইতে $\frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b}$; যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b}$,

বা $\frac{c}{x-y}=\frac{a}{b}$ [(2) এর সাহায্যে] $\therefore\ x-y=\frac{bc}{a}$ .... (3)

(2) এবং (3) যোগ করিয়া, $2x=c+\frac{bc}{a}=\frac{c(a+b)}{a}$, বা $x=\frac{c(a+b)}{2a}$.

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $2y=c-\frac{bc}{a}=\frac{c(a-b)}{a}$, বা $y=\frac{c(a-b)}{2a}$.

$$\therefore\ x=\frac{c(a+b)}{2a},\ y=\frac{c(a-b)}{2a}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

(1) হইতে আমরা পাই, $\frac{x}{a+b}=\frac{y}{a-b}=k$, মনে কর।

$$\therefore\ x=k(a+b) \text{ এবং } y=k(a-b).$$

x এবং y-এর এই মান (2)তে বসাইলে,

$k(a+b)+k(a-b)=c$, বা, $2ak=c$, $\therefore\ k=\frac{c}{2a}$.

$$\therefore\ x=\frac{c(a+b)}{2a} \text{ এবং } y=\frac{c(a-b)}{2a}.$$

Ex. 5. *Solve* $\frac{mx}{l}+\frac{ly}{m}=\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)\left(m^2+l^2\right)$ .... (1)

$(x+y)(l^2+m^2)=2(m^3+l^3)+ml(x+y)$ .... (2)

(1) হইতে উভয় পক্ষকে lm দ্বারা গুণ করিয়া,

$m^2x+l^2y=(m+l)(m^2+l^2)$ .... (3)

এবং (2) হইতে পক্ষান্তর করিয়া,

$(x+y)(l^2+m^2-lm)=2(m^3+l^3)$,

বা $x+y=2(m+l)$ .... (4)

(4) কে m^2 দ্বারা গুণ করিয়া (3) হইতে বিয়োগ করিলে,

$y(l^2-m^2)=(m+l)(m^2+l^2-2m^2)=(m+l)(l^2-m^2)$.

$\therefore\ y=m+l$. $\therefore$ (4) হইতে, $x=m+l$.

$\therefore\ x=m+l,\ y=m+l$.

Ex. 6. *Solve* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b$ .... (1), $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=2$ .... (2).

(2) হইতে পক্ষান্তর করিয়া আমরা পাই $\left(\frac{x}{a^2}-1\right)+\left(\frac{y}{b^2}-1\right)=0$

$$\text{বা}\quad \frac{x-a^2}{a^2}+\frac{y-b^2}{b^2}=0 \quad .... \quad (3)$$

(1) হইতে পক্ষান্তর করিয়া আমরা পাই $\frac{x}{a}-a=b-\frac{y}{b}$.

$$\text{বা}\quad \frac{x-a^2}{a}=\frac{b^2-y}{b}=-\frac{y-b^2}{b}=k, \text{ মনে কর।}$$

$\therefore\ x-a^2=ak$ এবং $y-b^2=-bk$.

$x-a^2$ এবং $y-b^2$ এর এই মান (3)তে বসাইলে,

$$\frac{ak}{a^2}-\frac{bk}{b^2}=0,\ \text{বা}\ k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0. \quad \therefore\ k=0.$$

$\therefore\ x-a^2=0$ বা $x=a^2$, এবং $y-b^2=0$ বা $y=b^2$.

$$\therefore\ x=a^2,\ y=b^2.$$

Ex. 7. *Solve* $\frac{1}{4x}+\frac{1}{3y}=2,\ \frac{1}{y}-\frac{1}{2x}=1.$

প্রথম সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া দ্বিতীয় সমীকরণের সহিত যোগ করিলে

$$\frac{2}{3y}+\frac{1}{y}=5 \quad \text{বা}\quad \frac{5}{3y}=5. \quad \therefore\ y=\tfrac{1}{3}.$$

y-এর এই মান প্রথম সমীকরণে বসাইলে, $\frac{1}{4x}=1$ বা $x=\frac{1}{4}$.

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{4},\ y=\tfrac{1}{3}.$$

Ex. 8. *Solve* $a^2x+b^2y=2ab(a+b)$. ... (1)

$b(2a+b)x+a(a+2b)y=a^3+a^2b+ab^2+b^3$. ... (2)

(1) হইতে পক্ষান্তর করিয়া $a^2(x-2b)=-b^2(y-2a)$,

$$\text{বা}\quad \frac{x-2b}{b^2}=\frac{y-2a}{-a^2}=k, \text{ মনে কর।}$$

$\therefore\ x-2b=b^2k$ এবং $y-2a=-a^2k$. ... (3)

(2) হইতে $b(2a+b)(x-2b)+a(a+2b)(y-2a)$

$$=-4ab^2-2b^3-2a^3-4a^2b+a^3+a^2b+ab^2+b^3$$
$$=-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=-(a+b)^3. \quad \cdots \quad (4)$$

(3) হইতে $x-2b$ এবং $y-2a$ এর মান (4)-এ বসাইলে,

$$kb^3(2a+b)-ka^3(a+2b)=-(a+b)^3,$$

বা $k(2ab^3+b^4-a^4-2a^3b)=-(a+b)^3,$

বা $k\{2ab(b^2-a^2)+(b^2-a^2)(b^2+a^2)\}=-(a+b)^3,$

বা $k(b^2-a^2)(2ab+b^2+a^2)=-(a+b)^3,$

বা $k(b-a)(b+a)^3=-(a+b)^3$, বা $k=\dfrac{1}{a-b}.$

$\therefore \quad x-2b=\dfrac{b^2}{a-b}$, বা $x=2b+\dfrac{b^2}{a-b}=\dfrac{b(2a-b)}{a-b}$,

এবং $y-2a=-\dfrac{a^2}{a-b}$, বা $y=2a-\dfrac{a^2}{a-b}=\dfrac{a(a-2b)}{a-b}.$

$$\therefore \quad x=\frac{b(2a-b)}{a-b}, \quad y=\frac{a(a-2b)}{a-b}.$$

Ex. 9. *Solve*

$$\left.\begin{aligned} x+2y+2z&=11 \\ 2x+y+z&=7 \\ 3x+4y+z&=14 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\cdots \quad \cdots \quad (1) \\ &\cdots \quad \cdots \quad (2) \\ &\cdots \quad \cdots \quad (3) \end{aligned}$$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া (1) হইতে বিয়োগ করিলে,

$$-3x=-3, \qquad \therefore \quad x=1,$$

আবার, (3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $x+3y=7$,

বা $1+3y=7 \quad (\because x=1). \qquad \therefore \quad y=2.$

x ও y এর লব্ধ মান (1) এ বসাইয়া $1+4+2z=11, \quad \therefore \quad z=3.$

$\therefore \quad x=1, \ y=2, \ z=3.$

Ex. 10. *Solve* $\dfrac{9}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{z}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{7}{y}+\dfrac{15}{2z}=4.$

প্রদত্ত সমীকরণত্রয়কে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়,

$$\frac{9}{x}-\frac{2}{y}=4. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{5}{z}-\frac{3}{x}=4. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{7}{y}+\frac{15}{2z}=4. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া (1) এর সহিত যোগ করিয়া পাই

$$\frac{15}{z}-\frac{2}{y}=16. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন (3) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া (4) হইতে বিয়োগ করিলে,

$$-\frac{16}{y}=8. \quad \therefore \; y=-2.$$

y এর এই মান (1) এ বসাইয়া $\frac{9}{x}+1=4$, বা $x=3$,

এবং (3) তে বসাইয়া $-\frac{7}{2}+\frac{15}{2z}=4$, বা $\frac{15}{2z}=\frac{15}{2}$. $\therefore \; z=1.$

$$\therefore \; x=3, \; y=-2, \; z=1.$$

7·2. বজ্রগুণন-প্রণালী (Method of Cross-Multiplication). প্রথমে আমরা তিনটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট চলমুক্ত পদ-বিবর্জিত দুইটি সরল সহ-সমীকরণ লই

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad \cdots \quad (i)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

এই দুইটি হইতে সহজেই আমরা x, y, z এর অনুপাত স্থির করিতে পারি। (i) কে b_2 দ্বারা এবং (ii) কে b_1 দ্বারা গুণ করিয়া বিয়োগ দিলে

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(c_1b_2-c_2b_1)z=0,$$

$$\text{বা} \quad \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad (iii)$$

অনুরূপভাবে, (i) কে a_2 দ্বারা এবং (ii) কে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া বিয়োগ করিলে পাই

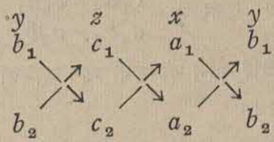
$$\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad (iv)$$

(iii) এবং (iv) হইতে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

(i) এবং (ii) সমীকরণদ্বয়ের সহগগুলি হইতে অতি সহজ একটি প্রণালীতে আমরা (v) এর লব্ধ ফল পাইতে পারি। ইহা নিম্নে বর্ণিত হইল।

x, y, z ক্রমে সাজানো (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটির y, z, x, y, এই ক্রমে উহাদের সহগগুলি নিম্নলিখিতরূপে উহাদের নীচে নীচে লিখি



এখন তিনটি ভগ্নাংশের লব যথাক্রমে x, y, z লিখিয়া সমান চিহ্ন '=' দ্বারা যুক্ত করিয়া উহাদের হর নিম্নলিখিত উপায়ে স্থির করি। y, z এর সহগ-সাহায্যে x লবযুক্ত ভগ্নাংশের, z, x এর সহগ সাহায্যে y লবযুক্ত ভগ্নাংশের এবং x, yএর সহগ সাহায্যে z লবযুক্ত ভগ্নাংশের হর পাওয়া যাইবে। প্রথম সমীকরণের yএর সহগ b_1কে কোণাকুণি তীর-চিহ্নিত দ্বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ c_2 দ্বারা গুণ করিয়া b_1c_2 পদ স্থির করি। তারপর দ্বিতীয় সমীকরণের yএর সহগ b_2 কে তীরচিহ্নিত প্রথম সমীকরণের z এর সহগ c_1 দ্বারা গুণ করিয়া b_2c_1 প্রথম লব্ধ b_1c_2 হইতে বিয়োগ করিয়া বিয়োগফল $b_1c_2-b_2c_1$, x এর হররূপে উহার নীচে লিখি। এইরূপে $c_1a_2-c_2a_1$ এবং $a_1b_2-a_2b_1$ স্থির করিয়া যথাক্রমে y এবং z এর হররূপে উহাদের নীচে লিখিয়া আমরা পাই

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

ইহা (v) হইতে অভিন্ন।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে এইরূপে x, y, z এর অনুপাত-নির্ণয় **বজ্রগুণন-প্রণালী** নামে অভিহিত।

এখানে লক্ষণীয় যে, হরগুলি স্থির করার সময় প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সংশ্লিষ্ট সহগ হইতে বজ্রগুণন (Cross-multiplication) আরম্ভ করিতে হয়।

উপরের সমীকরণ দুইটিতে zএর পরিবর্তে 1 লিখিলে সমীকরণ দুইটি দুই অজ্ঞাতরাশি-সম্বলিত সাধারণ সমীকরণে পরিণত হয়

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

এবং বজ্রগুণন লব্ধ ফল হয়

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{b_1c_2-b_2c_1}}=\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{c_1a_2-c_2a_1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_1b_2-a_2b_1}}.$$

এই লব্ধ ফল হইতে আমরা সরাসরি পাই

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ এবং } y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

দুই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সরল সহ-সমীকরণ আমরা সতত এই প্রণালীর সাহায্যে সমাধান করিতে পারি।

তিনটি অজ্ঞাতরাশি বিশিষ্ট তিনটি সরল সহ-সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি দুইটি চলমুক্ত পদবর্জিত উপরে প্রদত্ত (i) এবং (ii) আকারের হয়, তবে সেই দুইটি হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে x, y, z এর অনুপাত বাহির করিয়া প্রত্যেকটিকে k ধরিয়া প্রাপ্ত x, y, zএর মান তৃতীয় সমীকরণে বসাইয়া আমরা সহ-সমীকরণগুলি সমাধান করিতে পারি।

বজ্রগুণন-প্রণালীর সাহায্যে কয়েকটি সহ-সমীকরণের সমাধান নিম্নে প্রদর্শিত হইল :

Ex. 1. *Solve* $7x-2y=7.$
$3x-5y+26=0.$

প্রথম সমীকরণ $7x-2y-7=0$

এবং দ্বিতীয় সমীকরণ $3x-5y+26=0.$

এখন, এই সমীকরণের সহগগুলি বর্ণিত নিয়মানুসারে নিম্নলিখিতমত লিখি

$$\begin{matrix} -2, & -7, & 7, & -2 \\ \times & \times & \times & \\ -5, & 26 & 3 & -5, \end{matrix}$$

বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা

$$\frac{x}{-2\times 26-(-5)\times(-7)}=\frac{y}{-7\times 3-7\times 26}=\frac{1}{7\times(-5)-(-2)\times 3},$$

বা $\frac{x}{-52-35}=\frac{y}{-21-182}=\frac{1}{-35+6}$,

বা $\frac{x}{-87}=\frac{y}{-203}=\frac{1}{-29}$, বা $\frac{x}{3}=\frac{y}{7}=1.$

$\therefore \quad x=3,\ y=7.$

উপরে বর্ণিত নিয়ম বিশদভাবে বুঝাইবার জন্য এখানে সহগগুলি পুনরায় পৃথক্‌রূপে লিখিত হইল। অঙ্ক সমাধানে ইহার বিশেষ প্রয়োজন নাই বলিয়া ঐগুলি পৃথক্‌ভাবে পুনরায় না লিখিলেও চলে। কিঞ্চিৎ অনুশীলনের পর সহজেই সহগগুলির গুণন-কার্য নিষ্পন্ন করা যায়। পরবর্তী উদাহরণসমূহে সহগগুলি পৃথক্‌ভাবে আর লিখিত হইবে না।

Ex. 2. *Solve* : $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2}$, $3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$.

সমীকরণ দুইটি নিম্ন আকারে লেখা যাইতে পারে

$$x+\frac{3}{y}-\frac{7}{2}=0,$$

$$3x-\frac{2}{y}-\frac{26}{3}=0.$$

এক্ষণে, x ও $\frac{1}{y}$ অজ্ঞাত রাশি ধরিয়া, বজ্রগুণন প্রণালীর দ্বারা

$$\frac{x}{3(-\frac{26}{3})-(-\frac{7}{2})(-2)}=\frac{\frac{1}{y}}{(-\frac{7}{2})3-1(-\frac{26}{3})}=\frac{1}{1(-2)-3\times 3},$$

বা, $\frac{x}{-33}=\frac{\frac{1}{y}}{-11/6}=\frac{1}{-11}$.

$\therefore \quad x=\frac{-33}{-11}=3$, $\frac{1}{y}=\frac{-11/6}{-11}=\frac{1}{6}$, বা, $y=6.$

$\therefore \quad x=3,\ y=6.$

Ex. 3. *Solve* :

$$\left.\begin{aligned} 7x-9y+4z&=0 \\ x+8y-5z&=0 \\ x+y+z&=9 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\cdots\quad\cdots\quad (1)\\ &\cdots\quad\cdots\quad (2)\\ &\cdots\quad\cdots\quad (3)\end{aligned}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x}{-9\times(-5)-4\times8}=\frac{y}{4\times1-7\times(-5)}=\frac{z}{7\times8-1\times(-9)},$$

বা, $\frac{x}{45-32}=\frac{y}{4+35}=\frac{z}{56+9}$,

বা, $\frac{x}{13}=\frac{y}{39}=\frac{z}{65}$, বা, $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k$, মনে কর।

$\therefore \quad x=k,\ y=3k,\ z=5k.$ .... (4)

x, y, z-এর এই মানগুলি (3) তে বসাইলে,

$k+3k+5k=9$, বা, $9k=9$. $\therefore \quad k=1.$

k-এর মান 1, (4) এ বসাইয়া আমরা পাই,

$x=1, \quad y=3, \quad z=5.$

Ex. 4. *Solve :*

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z&=0 \\ abx+acy+bcz&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\cdots\cdot\ (1) \\ &\cdots\cdot\ (2) \\ &\cdots\ (3) \end{aligned}$$

(1) এবং (2) হইতে বজ্রগুণন-প্রণালীর দ্বারা

$$\frac{x}{(b+c)-(a+c)}=\frac{y}{(a+b)-(b+c)}=\frac{z}{(a+c)-(a+b)},$$

বা, $\frac{x}{b-a}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{c-b}=k$, মনে কর।

$\therefore \quad x=k(b-a),\ y=k(a-c),\ z=k(c-b).$ .... (4)

x, y, z-এর এই লব্ধ মানগুলি (3)তে বসাইলে,

$kab(b-a)+kac(a-c)+kbc(c-b)=1,$

বা, $k\{ab(b-a)+ac(a-c)+bc(c-b)\}=1,$

বা, $k(a-b)(b-c)(c-a)=1.$ $\therefore \quad k=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$

k-এর এই লব্ধ মান (4)এ বসাইলে,

$$x=\frac{1}{(b-c)(a-c)},\ y=\frac{1}{(a-b)(c-b)},\ z=\frac{1}{(c-a)(b-a)}.$$

Ex. 5. *Solve* :
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{3}{z}&=0\\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{z}&=0\\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}&=1\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}\cdots\quad\cdots\quad(1)\\ \cdots\quad\cdots\quad(2)\\ \cdots\quad\cdots\quad(3)\end{matrix}$$

[এখানে আমরা প্রথমে $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ কে অজ্ঞাতরাশি ধরিয়া উহাদের সহগ-গুলি প্রশ্ন সমাধানে ব্যবহার করিব।]

(1) এবং (2) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\frac{1}{x}}{-2\times1-3\times(-4)}=\frac{\frac{1}{y}}{3\times5-1\times1}=\frac{\frac{1}{z}}{1\times(-4)-5\times(-2)},$$

বা, $\frac{\frac{1}{x}}{10}=\frac{\frac{1}{y}}{14}=\frac{\frac{1}{z}}{6}$ বা, $\frac{\frac{1}{x}}{5}=\frac{\frac{1}{y}}{7}=\frac{\frac{1}{z}}{3}=k$, মনে কর।

$$\therefore\ \frac{1}{x}=5k,\ \frac{1}{y}=7k,\ \frac{1}{z}=3k. \qquad \cdots\ (4)$$

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ এর এই মানগুলি (3)তে বসাইলে,

$$10k-21k+12k=1,\ \text{বা,}\quad k=1.$$

(4) এ $k=1$, বসাইয়া আমরা পাই $\frac{1}{x}=5$, $\therefore\ x=\frac{1}{5}$,

ঐরূপে $\frac{1}{y}=7$, $\therefore\ y=\frac{1}{7}$, এবং $\frac{1}{z}=3$, $\therefore\ z=\frac{1}{3}$.

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{5},\quad y=\tfrac{1}{7},\quad z=\tfrac{1}{3}.$$

7·3. বিবিধ উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Solve* :
$$\left.\begin{aligned}73x+68y&=83\\ 68x+73y&=58\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}\cdots\quad\cdots\quad(1)\\ \cdots\quad\cdots\quad(2)\end{matrix}$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া আমরা পাই,

$$141x+141y=141,\quad \text{বা,}\quad x+y=1 \qquad \cdots\ (3)$$

এবং $5x-\ 5y=\ 25$, বা, $x-y=5$ $\qquad\cdots\ (4)$

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $\quad 2x=6$ বা $x=3$.

এবং (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $2y=-4$, বা, $y=-2$.

$\therefore\ x=3,\ y=-2.$

Ex. 2. *Solve* :

$$\left.\begin{aligned}\frac{5}{x}+3y&=19\\ \frac{7}{x}-4y&=2\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&\cdots\cdots\ (1)\\ &\cdots\cdots\ (2)\end{aligned}$$

(1) কে 7 দ্বারা এবং (2) কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল বিয়োগ করিলে,

$$41y=123. \qquad \therefore\ y=3.$$

y এর এই মান (1)-এ বসাইলে, $\frac{5}{x}+9=19$ বা, $\frac{5}{x}=10$. $\therefore\ x=\frac{1}{2}$.

$\therefore\ x=\frac{1}{2},\ y=3.$

Ex. 3. *Solve* : $axy=c(bx+ay)$ $\cdots\cdots$ (1)

$bxy=c(ax-by)$ $\cdots\cdots$ (2)

(1) এবং (2) এর উভয় পক্ষকে cxy দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{b}{y}+\frac{a}{x}=\frac{a}{c} \text{ বা, } \frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{a}{c}=0 \quad\cdots\cdots\ (3)$$

$$\frac{a}{y}-\frac{b}{x}=\frac{b}{c} \text{ বা, } -\frac{b}{x}+\frac{a}{y}-\frac{b}{c}=0. \quad\cdots\cdots\ (4)$$

এক্ষণে, (3) এবং (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\frac{1}{x}}{b\times\left(-\frac{b}{c}\right)-a\times\left(-\frac{a}{c}\right)}=\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{a}{c}\times(-b)-a\times\left(-\frac{b}{c}\right)}=\frac{1}{a\times a-b\times(-b)}$$

$$\text{বা, } \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{c}}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{2ab}{c}}=\frac{1}{a^2+b^2}, \text{ বা, } \frac{\frac{1}{x}}{\frac{a^2-b^2}{c}}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{2ab}{c}}=\frac{1}{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{a^2-b^2}{c(a^2+b^2)}, \text{ এবং } \frac{1}{y}=\frac{2ab}{c(a^2+b^2)}.$$

$$\therefore\ x=\frac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2},\ y=\frac{c(a^2+b^2)}{2ab}.$$

দ্রষ্টব্য। এখানে $x=y=0$ হইলে, a, b, c যাহাই হউক সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হয়। সেই সমাধান এখানে বাদ দিয়া x এবং y কোনটি শূন্য নয় ধরিয়া সমাধান করা হইয়াছে।

Ex. 4. *Solve* :
$$\left.\begin{array}{l} x+y-4z = 8 \\ y+z-4x=-12 \\ z+x-4y=-22 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \cdots\ (1) \\ \cdots\ (2) \\ \cdots\ (3) \end{array}$$

(1), (2) এবং (3) যোগ করিয়া আমরা পাই,

$$-2(x+y+z)=-26, \quad \text{বা, } x+y+z=13. \quad \cdots\ (4)$$

এখন, (4) হইতে (1), (2) ও (3) বিয়োগ করিয়া যথাক্রমে আমরা পাই,

$$5z=5 \text{ বা } z=1,\ 5x=25, \text{ বা, } x=5, \text{ এবং } 5y=35 \text{ বা } y=7.$$

$$\therefore\ x=5,\ y=7 \text{ এবং } z=1.$$

Ex. 5. *Solve* :
$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{10}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}. \\ 5x-13y+z=32 \end{array}\right\}$$

প্রথম সমীকরণ, $\frac{x}{10}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k$, মনে কর।

$\therefore\ x=10k,\ y=3k$ এবং $z=5k$. x, y, z এর এই লব্ধ মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইলে, $50k-39k+5k=32$. বা $k=2$.

$$\therefore\ x=20,\ y=6 \text{ এবং } z=10.$$

Ex. 6. *Solve* :
$$\left.\begin{array}{l} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \cdots\ \cdots\ (1) \\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{array}$$

(1)-কে c দ্বারা এবং (2) b-দ্বারা গুণ করিয়া আমরা পাই,

$$acy+bcx=c^2 \quad \cdots\ \cdots\ (4)$$

$$bcx+abz=b^2 \quad \cdots\ \cdots\ (5)$$

(5) হইতে (4) বিয়োগ করিলে, $a(bz-cy)=b^2-c^2$,

$$\text{বা } bz-cy=\frac{b^2-c^2}{a} \quad \cdots\ \cdots\ (6)$$

(3) এবং (6) যোগ করিয়া, $2bz = a + \frac{b^2 - c^2}{a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$.

$$\therefore \quad z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

(2) হইতে $cx = b - az = b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$

$$= \frac{2b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

অনুরূপভাবে, x-এর মান (1)-এ বসাইয়া আমরা পাই, $y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$.

$$\therefore \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\ z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ex. 7. *Solve* :

$$\left.\begin{aligned} xy &= 2(x+y) \quad \cdots\ (1)\\ 5yz &= 18(y+z) \quad \cdots\ (2)\\ 4zx &= 9(z+x) \quad \cdots\ (3) \end{aligned}\right\}$$

(1), (2) এবং (3) কে যথাক্রমে $2xy$, $18yz$ এবং $9zx$ দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা পাই

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}. \quad \cdots\ (4)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18}. \quad \cdots\ (5)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{9}. \quad \cdots\ (6)$$

(4), (5) এবং (6) যোগ করিয়া আমরা পাই

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{4}{9} = \frac{11}{9}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{18}. \quad \cdots\ (7)$$

এখন (7) হইতে পর পর (4), (5) ও (6) বিয়োগ করিয়া পাই

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{9}, \text{ বা } z = 9,\ \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \text{ বা } x = 3,\ \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \text{ বা, } y = 6.$$

$$\therefore \quad x = 3,\ y = 6,\ z = 9.$$

দ্রষ্টব্য। Ex. 3 এর নীচের দ্রষ্টব্য দেখ।

Ex. 8. *Solve* :
$$\left.\begin{aligned} x-ay+a^2z&=a^3 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)\\ x-by+b^2z&=b^3 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)\\ x-cy+c^2z&=c^3 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,
$$-(a-b)y+(a^2-b^2)z=a^3-b^3,$$
$\therefore$ $(a-b)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,
$$-y+(a+b)z=a^2+ab+b^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$
অনুরূপে, (2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া $(b-c)$-দ্বারা ভাগ করিলে
$$-y+(b+c)z=b^2+bc+c^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$
আবার, (4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া,
$$(a-c)z=(a^2-c^2)+b(a-c)=(a-c)(a+b+c).$$
$$\therefore \quad z=a+b+c.$$
z-এর এই মান (4)-এ বসাইয়া পক্ষান্তর করিলে,
$$-y=(a^2+ab+b^2)-(a+b)(a+b+c)$$
$$=-ab-ac-bc. \quad \therefore \quad y=ab+ac+bc.$$
(1)-এ y এবং z-এর মান বসাইয়া ও পক্ষান্তর করিয়া,
$$x=a^3+a(ab+ac+bc)-a^2(a+b+c)=abc.$$
$$\therefore \quad x=abc, \; y=ab+ac+bc, \; z=a+b+c.$$

Ex. 9. *Solve* : $a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)$
$$=c(xy-yz-zx)=xyz.$$

উপরিস্থ সমীকরণগুলিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে পারি
$$a(yz-zx-xy)=xyz \quad \cdots \quad (1)$$
$$b(zx-xz-yz)=xyz \quad \cdots \quad (2)$$
$$c(xy-yz-zx)=xyz. \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, (1), (2) এবং (3)কে যথাক্রমে $axyz$, $bxyz$ এবং $cxyz$ দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা পাই
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \quad \cdots \quad (4)$$
$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{b} \quad \cdots \quad (5)$$
$$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{c} \quad \cdots \quad (6)$$

(4) এবং (5) যোগ করিয়া আমরা পাই

$$-\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}. \quad \therefore \quad z=-\frac{2ab}{a+b}.$$

অনুরূপভাবে (5) এবং (6) ও (4) এবং (6) যোগ করিলে যথাক্রমে পাই

$$x=-\frac{2bc}{b+c}, \ y=-\frac{2ca}{c+a}.$$

$$\therefore \quad x=-\frac{2bc}{b+c}, \ y=-\frac{2ca}{c+a}, \ z=-\frac{2ab}{a+b}.$$

দ্রষ্টব্য। Ex. 3এর নীচের দ্রষ্টব্য দেখ।

Ex. 10. *Solve :*

$$x+y+z=ab+bc+ca \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{x}{ab}+\frac{y}{bc}+\frac{y}{ca}=3 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$(c-b)x+(a-b)y+(c-a)z$$
$$=2abc-ab^2-b^2c+ac^2-a^2c \quad \cdots\cdots (3)$$

(3)এর দক্ষিণ পক্ষ $2abc-ab^2-b^2c+ac^2-a^2c$

$$=(abc-ab^2)+(abc-b^2c)+(ac^2-a^2c)$$
$$=ab(c-b)+bc(a-b)+ac(c-a).$$

এক্ষণে, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়কে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়

$$(x-ab)+(y-bc)+(z-ca)=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{1}{ab}(x-ab)+\frac{1}{bc}(y-bc)+\frac{1}{ca}(z-ca)=0 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$(c-b)(x-ab)+(a-b)(y-bc)$$
$$+(c-a)(z-ca)=0. \quad \cdots\cdots (6)$$

এখন $(x-ab)$, $(y-bc)$ এবং $(z-ca)$ রাশি তিনটিকে অজ্ঞাত রাশি ধরিয়া (4) এবং (5) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{x-ab}{\frac{1}{ca}-\frac{1}{bc}}=\frac{y-bc}{\frac{1}{ab}-\frac{1}{ca}}=\frac{z-ca}{\frac{1}{bc}-\frac{1}{ab}}=k, \text{ মনে কর।}$$

বা, $$\frac{x-ab}{\frac{b-a}{abc}}=\frac{y-bc}{\frac{c-b}{abc}}=\frac{z-ca}{\frac{a-c}{abc}}=k.$$

$$\therefore \quad x - ab = \frac{k(b-a)}{abc}, \; y - bc = \frac{k(c-b)}{abc},$$

$$z - cb = \frac{k(a-c)}{abc} \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

$x - ab$, $y - bc$, এবং $z - ca$ এর এই মানগুলি (6) তে বসাইয়া আমরা পাই,

$$(c-b)\cdot\frac{k(b-a)}{abc} + (a-b)\cdot\frac{k(c-b)}{abc} + (c-a)\frac{k.(a-c)}{abc} = 0,$$

বা, $\frac{k}{abc}\left\{(c-b)(b-a) - (c-b)(b-a) - (c-a)^2\right\} = 0 \quad \therefore \quad k = 0.$

এখন (7) হইতে $x - ab = 0, \quad \therefore \quad x = ab, \; y - bc = 0, \quad \therefore \; y = bc$

এবং $z - ca = 0, \quad \therefore \quad z = ca.$

$\therefore \quad x = ab, \; y = bc, \; z = ca.$

Examples VII (a)

Solve the following equations :

1. $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 9y + 2 = 0 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 28x - 31y = 25 \\ 63x - 25y = 101 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 3x - 7y = 0 \\ 12y = 5x + 1 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 15x + 7y = 29 \\ 19x - 7y = 5 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 21x - 50y = 60 \\ 14x - 29y = 53 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 19x + 17y = 0 \\ 3x - 2y = 89 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} 5x + 6y = 16 \\ 6x + 5y = 17 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} 6x + y + 8 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right\}$

9. $x + 2y = 3 = 4x - y.$

10. $\left.\begin{array}{l} 13x - 12y + 15 = 0 \\ 8x - 7y = 0 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y + 9 = 0 \\ 5x + 2y - 16 = 0 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 13 \\ \frac{7}{x} + \frac{3}{y} = 27 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} \frac{3}{4x} + y &= 18 \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{6} &= 10 \end{aligned}\right\}$

14. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} + 1 &= 0 \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

15. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 6\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2x}\right) = 2.$

16. $\frac{x+3}{5} = \frac{8-y}{4} = \frac{x+y}{6}.$

17. $\frac{x}{13} - \frac{y}{7} = 6x - 10y - 4 = 0.$

18. $\frac{2x+2y-3}{5} = \frac{3x-7y+4}{6} = \frac{8y-x+2}{7}.$

19. $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ \frac{x+y}{x-y} &= 3\tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$

20. $\left.\begin{aligned} y(7-x) &= \frac{x}{4}(49-4y) \\ 4x + 13 &= 5y - 6. \end{aligned}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned} (2x+5)(3y-7) &= (3x-7)(2y-1) - 10 \\ 5x - 7y &= 4. \end{aligned}\right\}$

22. $\left.\begin{aligned} \frac{3y-5}{x+y} &= \frac{1}{2} \\ \frac{5x-3y}{x-y} &= 8 \end{aligned}\right\}$

23. $\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ bx + ay &= \frac{2a^2b}{a^2-b^2}. \end{aligned}\right\}$

24. $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ bx + ay &= 1 + c \end{aligned}\right\}$

25. $\left.\begin{aligned} ax - by &= a - b \\ a^2y + b^2x &= ab \end{aligned}\right\}$

26. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3a} + \frac{y}{4b} &= a + b \\ \frac{4x}{a} - \frac{3y}{b} &= 12(b-a) \end{aligned}\right\}$

27. $\left.\begin{aligned} (a-b)x + (a+b)y &= 2(a^2-b^2) \\ (a+b)x - (a-b)y &= 4ab \end{aligned}\right\}$

28. $x + y = \frac{5(a^2-b^2)}{(2a-b)(a-2b)}.$
$(a-2b)x + (2a-b)y = 3(a+b).$

29. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = c.$

30. $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 5x - 4y + z &= 0 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$

31. $\left.\begin{aligned} 2x + 8y + 5z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 3x + 4y + 5z &= 14 \end{aligned}\right\}$

32. $\left.\begin{aligned} 5x-6y-7z &= 0 \\ 3x-2y-3z &= 0 \\ 7x-y+z &= 21 \end{aligned}\right\}$

33. $\left.\begin{aligned} x+y-4z &= 0 \\ 5x-y-6z &= 0 \\ x+y+z &= 15 \end{aligned}\right\}$

34. $\left.\begin{aligned} x+y &= 13 \\ y+z &= 19 \\ z+x &= 16 \end{aligned}\right\}$

35. $\left.\begin{aligned} 4x+7y+2 &= 0 \\ 3x+2z &= 23 \\ 5y+3z &= 11 \end{aligned}\right\}$

36. $\left.\begin{aligned} 7x-9y+4z &= 16 \\ \frac{x+y}{3} &= \frac{x+y+z}{2} \\ 2x-3y+4z &= 5 \end{aligned}\right\}$

37. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= a \\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c} &= b \\ \frac{z}{c}+\frac{x}{a} &= c \end{aligned}\right\}$

38. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} &= 0 \\ \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2} &= 0 \\ \frac{x}{a^3}+\frac{y}{b^3}+\frac{z}{c^3}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc} &= 0 \end{aligned}\right\}$

39. $\left.\begin{aligned} x(b-c)+y(c-a)+z(a-b) &= 0 \\ ax(b^2-c^2)+by(c^2-a^2)+cz(a^2-b^2) &= 0 \\ ax(b-c)+by(c-a)+cz(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b) &= 0 \end{aligned}\right\}$

40. $\left.\begin{aligned} ax+by+cz &= 0 \\ a^2x+b^2y+c^2z &= 0 \\ x+y+z+(a-b)(b-c)(c-a) &= 0 \end{aligned}\right\}$

ANSWERS

1. $x=2\frac{1}{2}, y=1\frac{1}{3}$. **2.** $x=2, y=1$. **3.** $x=7, y=3$.

4. $x=1, y=2$. **5.** $x=10, y=3$. **6.** $x=17, y=-19$.

7. $x=2, y=1$. **8.** $x=-1, y=-2$. **9.** $x=y=1$.

10. $x=21, y=24$. **11.** $x=2, y=3$. **12.** $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$.

13. $x=\frac{1}{8}, y=12$. **14.** $x=10, y=6$. **15.** $x=3, y=2$.

16. $x=2, y=4$. **17.** $x=6\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}$. **18.** $x=3, y=1$.

19. $x=9, y=5$. **20.** $x=4, y=7$. **21.** $x=5, y=3$.

22. $x=5, y=3.$ 23. $x=\frac{a}{a+b}, y=\frac{b}{a-b}.$

24. $x=\frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}, y=\frac{a+c(a-b)}{a^2-b^2}.$ 25. $x=\frac{a}{a+b}, y=\frac{b}{a+b}.$

26. $x=3ab, y=4ab.$ 27. $x=a+b, y=a-b.$ 28. $x=\frac{2a+b}{a-2b}, y=\frac{a+2b}{2a-b}.$

29. $x=y=\frac{a+b}{c}.$ 30. $x=1, y=2, z=3.$ 31. $x=2, y=-3, z=4.$

32. $x=2, y=-3, z=4.$ 33. $x=5, y=7, z=3.$ 34. $x=5, y=8, z=11.$

35. $x=3, y=-2, z=7.$ 36. $x=1, y=-1, z=0.$ 37. $x=\frac{1}{2}a(c+a-b),$ $y=\frac{1}{2}b(a+b-c), z=\frac{1}{2}c(b+c-a).$ 38. $x=a^2(b-c), y=b^2(c-a),$ $z=c^2(a-b).$ 39. $x=a, y=b, z=c.$

40. $x=bc(b-c), y=ca(c-a), z=ab(a-b).$

7·4. দুই বা ততোধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সরল সহ-সমীকরণ সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নাবলী।

পাটীগণিতের বিবিধ দুরূহ প্রশ্নাবলী বীজগণিতে সমীকরণের সাহায্যে অতি সহজেই সমাধান করা যায়। প্রশ্নের নির্ণেয় অজ্ঞাত রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে অজ্ঞাত রাশি-নির্দেশক x, y, z প্রভৃতি এক-একটি অক্ষর দ্বারা নির্দেশ করিতে হয়। কোন সমীকরণ-সমাধানে যেমন সমীকরণে প্রদত্ত অজ্ঞাত রাশির সম-সংখ্যক সমীকরণের প্রয়োজন, সেইরূপ এইপ্রকার বিবিধ প্রশ্ন-সমাধানে অজ্ঞাত রাশির সম-সংখ্যক শর্তাবলীর প্রয়োজন। এই সকল প্রদত্ত শর্তাবলী x, y, z প্রভৃতি অজ্ঞাত রাশি-নির্দেশক অক্ষরের সাহায্যে সমীকরণের আকারে প্রকাশ করিয়া অজ্ঞাত রাশিসমূহের মান-নির্ণয়ের দ্বারা প্রশ্নগুলির সমাধান করা হয়। নিম্নে প্রদত্ত দৃষ্টান্তগুলি হইতে ইহা প্রতীয়মান হইবে :

Ex. 1. *Find the fraction which becomes* $\frac{1}{2}$ *when* 1 *is added to its denominator and* $\frac{1}{3}$ *when* 2 *is subtracted from its numerator.* [*S. F. 1963*]

মনে কর, নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{2}$, বা $2x=y+1$ ... (1)

$\frac{x-2}{y}=\frac{1}{3}$ বা, $3x-6=y$ ... (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$x-6=-1. \quad \therefore \quad x=5, \text{ এবং } y=3.5-6=9.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{9}$.

Ex. 2. *A number consists of 3 digits whose sum is 9; the middle digit is twice the sum of the other two, and if the digits be inverted, the number so formed exceeds the original number by 99. Find the original number.*

মনে কর, একক, দশক ও শতক স্থানীয় অঙ্কগুলি যথাক্রমে z, y ও x.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=100x+10y+z$ এবং অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লব্ধ সংখ্যা $100z+10y+x$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x+y+z=9$. ... (1)

$$y=2(x+z). \quad \cdots \quad (2)$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \quad \cdots \quad (3)$$

(2)এ প্রদত্ত yএর মান (1) এ বসাইলে $3(x+z)=9$,

বা, $x+z=3$. ... (4)

আবার, (3) হইতে পক্ষান্তর করিয়া, $99(z-x)=99$,

বা, $z-x=1$. ... (5)

(4) ও (5) হইতে $z=2$ এবং $x=1$. $\therefore$ (1) হইতে $y=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=100.1+10.6+2=162$.

Ex. 3. *A rectangle becomes a square when its length is diminished by 10 ft. and its breadth increased by 5 ft., but the area is diminished by 210 sq. ft. Find the area of the rectangle.*

মনে কর, প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x ফুট এবং প্রস্থ y ফুট।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $x-10=y+5$, বা, $x-y=15$. ... (1)

এবং $(x-10)(y+5)=xy-210$,

বা $xy+5x-10y-50=xy-210$.

পক্ষান্তর করিয়া, $5(x-2y)=-160$, বা, $x-2y=-32$. ... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $y=47$.

$\therefore$ $x=62$ [(1) এর সাহায্যে]

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=62\times47$ বর্গ ফুট $=2914$ বর্গ ফুট।

Ex. 4. *Two vessels contain mixtures of wine and water in the ratio of* 3 : 1 *and* 1 : 5 *respectively. Find how much must be drawn from each vessel to fill a third vessel of capacity* 21 *gallons in order that the resulting mixture may be half wine and half water.*

মনে কর, প্রথম পাত্র হইতে x গ্যালন এবং দ্বিতীয় পাত্র হইতে y গ্যালন জলমিশ্রিত মদ্য লওয়া হইল। প্রথম পাত্রের x গ্যালনের মধ্যে মদ্যের পরিমাণ $\frac{3x}{4}$ গ্যালন এবং জলের পরিমাণ $\frac{x}{4}$ গ্যালন এবং দ্বিতীয় পাত্রের y গ্যালনের মধ্যে মদ্যের পরিমাণ $\frac{y}{6}$ গ্যালন এবং জলের পরিমাণ $\frac{5y}{6}$ গ্যালন।

$\therefore$ তৃতীয় পাত্রে মদ্যের পরিমাণ $\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{6}\right)$ গ্যালন এবং জলের পরিমাণ $\left(\frac{x}{4}+\frac{5y}{6}\right)$ গ্যালন।

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{3x}{4}+\frac{y}{6}=\frac{x}{4}+\frac{5y}{6}$, বা, $9x+2y=3x+10y$,

বা, $6x=8y$, বা $\frac{x}{y}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ প্রথম পাত্র হইতে লওয়া মিশ্রণের পরিমাণ $=21$ গ্যালনের $\frac{4}{7}=12$ গ্যালন এবং দ্বিতীয় পাত্র হইতে লওয়া মিশ্রণের পরিমাণ $=21$ গ্যালনের $\frac{3}{7}=9$ গ্যালন।

Ex. 5. *A number consisting of two digits is six times the sum of the digits. Show that the number formed by inverting the digits is five times their sum.*

মনে কর, সংখ্যাটির দশকস্থানীয় অঙ্ক x এবং এককস্থানীয় অঙ্ক y.

$\therefore$ সংখ্যাটি $=10x+y$ এবং অঙ্ক উল্টাইয়া প্রাপ্ত সংখ্যা $=10y+x$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে $10x+y=6(x+y)$, বা, $4x=5y$.

আবার, $10y+x=5y+5x+5y-4x=5(x+y)$ $[\because 4x=5y]$

$\therefore$ অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া প্রাপ্ত সংখ্যা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 5 গুণ।

Ex. 6. *A number consists of* 3 *digits, the middle one being zero. If the number be reversed, it is diminished by* 297, *and if the digit in the hundred's place be halved and the other two*

be interchanged, the number is diminished by 273 ; find the number.

মনে কর, শতকের স্থানের অঙ্ক x এবং এককের স্থানের অঙ্ক y.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $100x + y - (100y + x) = 297,$

বা, $99(x-y) = 297,$ বা, $x - y = 3$ ... (1)

এবং $100.\frac{x}{2} + 10y = 100x + y - 273,$

বা, $50x - 9y = 273.$ ... ... (2)

(1) ও (2) হইতে আমরা পাই $x = 6$ এবং $y = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 100.6 + 3 = 603.$

Ex. 7. *A, B, C are three towns forming a triangle. A man has to walk from one to the next, ride thence to the next, and drive thence to the starting point. He can walk, ride and drive a mile in a, b, c minutes respectively. If he starts from B he takes $(a+c-b)$ hours, if he starts from C he takes $(b+a-c)$ hours, and if he starts from A he takes $(c+b-a)$ hours. Find the length of the circuit.*

মনে কর, ABC ত্রিভুজাকারে অবস্থিত তিনটি নগর A, B, C এর পারস্পরিক দূরত্ব AB, BC, CA যথাক্রমে x মাইল, y মাইল, z মাইল।

1 মাইল পদব্রজে, অশ্বারোহণে এবং শকটযোগে যাইতে তাহার যথাক্রমে a মিনিট, b মিনিট, c মিনিট লাগে।

মনে কর, জনৈক ব্যক্তি A হইতে B, B হইতে C এবং C হইতে A এই পর্যায়ে ABC ত্রিভুজ প্রদক্ষিণ করে, যদি সে B হইতে যাত্রারম্ভ করে, তবে $\triangle ABC$ প্রদক্ষিণ করিতে সময় লাগিবে $(ay + bz + cx)$ মিনিট বা $\frac{ay + bz + cx}{60}$ ঘণ্টা।

অনুরূপভাবে, C ও A হইতে যাত্রারম্ভ করিলে তাহার সময় লাগিবে যথাক্রমে $\frac{az + bx + cy}{60}$ ঘণ্টা এবং $\frac{ax + by + cz}{60}$ ঘণ্টা।

∴ প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$\frac{ay+bz+cx}{60}=a+c-b, \text{ বা, } ay+bz+cx=60(a+c-b) \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{az+bx+cy}{60}=b+a-c, \text{ বা, } az+bx+cy=60(b+a-c) \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $$\frac{ax+by+cz}{60}=c+b-a, \text{ বা, } ax+by+cz=60(c+b-a) \quad \cdots \quad (3)$$

যোগ করিয়া,

$$a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)=60(a+b+c),$$

বা, $(x+y+z)(a+b+c)=60(a+b+c)$. ∴ $x+y+z=60$.

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=60$ মাইল।

Ex. 8. *A bill of 50 guineas is paid with half-guineas and crowns and twice the number of half-guineas exceeds 3 times that of the crowns by 34 ; how many of each are used ?*

মনে কর, অর্ধ-গিনির সংখ্যা x এবং ক্রাউনের সংখ্যা y.

∴ প্রদত্ত শর্তানুসারে [গিনি ও ক্রাউনকে শিলিং-এ লইয়া]

$$\tfrac{21}{2}x+5y=50\times 21=1050 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$2x-3y=34 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) কে 3 দ্বারা এবং (2) কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া আমরা পাই

$$\tfrac{63}{2}x+15y=3150 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$10x-15y=170 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া আমরা পাই $\frac{83}{2}x=3320$, বা, $x=80$.

∴ (2) হইতে $3y=160-34=126$. ∴ $y=42$.

∴ অর্ধ-গিনির সংখ্যা $=80$ এবং ক্রাউনের সংখ্যা $=42$.

Ex. 9. *The sum of the ages of a man and his wife is 6 times that of their children. Two years ago their united ages were 10 times the united ages of their children and 6 years hence their united ages will be 3 times the united ages of their children. How many children have they ?*

মনে কর, স্বামি-স্ত্রীর বর্তমান বয়ঃ-সমষ্টি x বৎসর, তাহাদের সন্তান-সংখ্যা n এবং উহাদের বর্তমান বয়ঃ-সমষ্টি y.

2 বৎসর পূর্বে স্বামি-স্ত্রীর বয়ঃ-সমষ্টি $(x-4)$ বৎসর এবং সন্তানগণের বয়ঃ-সমষ্টি $(y-2n)$ বৎসর ছিল।

6 বৎসর পরে স্বামি-স্ত্রীর বয়ঃ-সমষ্টি $(x+12)$ বৎসর এবং সন্তানগণের বয়ঃ-সমষ্টি $(y+6n)$ বৎসর হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$x=6y \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$x-4=10(y-2n), \text{ বা, } x-10y+20n=4 \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $x+12=3(y+6n)$, বা, $x-3y-18n=-12.$ (3)

(2) এবং (3)-এ $x=6y$ বসাইয়া

$$-4y+20n=4, \text{ বা, } 5n-y=1. \quad \cdots \quad (4)$$

এবং $3y-18n=-12$, বা, $y-6n=-4.$ ... (5)

(4) এবং (5) হইতে $n=3$. $\therefore$ নির্ণেয় সন্তান-সংখ্যা $=3$.

Ex. 10. *A person went out between 3 P. M. and 4 P. M. and on return between 6 P. M. and 7 P. M. found that the hands of his watch had exactly changed places. Find when he went out, when he returned, and the time he was out.*

প্রশ্ন হইতে বুঝা যায় ঐ ব্যক্তি যখন বাহিরে যায় তখন ঘণ্টার কাঁটা 3টা ও 4টার ঘরের মধ্যে এবং মিনিটের কাঁটা 6টা ও 7টার ঘরের মধ্যে ছিল। এবং যখন সে ফিরে তখন কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে অর্থাৎ ঘণ্টার কাঁটা 6টা ও 7টার ঘরের মধ্যে এবং মিনিটের কাঁটা 3টা ও 4টার ঘরের মধ্যে।

মনে কর, ঐ ব্যক্তি 3 টা বাজিয়া x মিনিটের সময় বাহির হইয়া 6টা বাজিয়া y মিনিটের সময় ফিরিয়া আসিল।

এক্ষণে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 12 গুণ দ্রুত যায়।

$\therefore$ 1 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{1}{12}$ মি.-ঘর যায়।

$\therefore$ মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x ও y মি.-ঘর যায়, ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে

$\frac{x}{12}$ ও $\frac{y}{12}$ মি.-ঘর যায়।

বেলা 3 টার সময় ঘণ্টার কাঁটা 3 টা অর্থাৎ 15 মিনিট ঘরের উপর এবং মিনিটের কাঁটা 12 টার উপরে থাকে।

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি বাহির হইবার সময় মিনিটের কাঁটা x মি.-ঘরের উপর এবং ঘণ্টার কাঁটা $\left(15+\frac{x}{12}\right)$ মি. ঘরের উপর ছিল।

6টা বাজিয়া y মি. এর সময় সে ফিরিয়া দেখিল যে, সে বাহিরে যাইবার সময় ঘণ্টার কাঁটা যে মি.-ঘরের উপর ছিল, মিনিটের কাঁটা তখন সেই মি.-ঘর অর্থাৎ $\left(15+\frac{x}{12}\right)$ মি.-ঘরের উপর রহিয়াছে।

$$\therefore \quad y=15+\frac{x}{12} \quad \text{বা} \quad 12y=180+x. \qquad \cdots \qquad (1)$$

আবার, 6 টা বাজিয়া y মিনিটে ফিরিবার সময় সে দেখিল ঘণ্টার কাঁটা $\left(30+\frac{y}{12}\right)$ মিঃ ঘরের উপর রহিয়াছে এবং বাহির হইবার সময় মিনিটের কাঁটা এই ঘরের উপর ছিল।

$$\therefore \quad x=30+\frac{y}{12}, \quad \text{বা,} \quad 12x=360+y. \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া $12(x+y)=540+(x+y)$, বা, $11(x+y)=540$.

$$\therefore \quad x+y=\tfrac{540}{11}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

এবং (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া $12(x-y)=180-(x-y)$,

বা, $13(x-y)=180$,

$$\therefore \quad x-y=\tfrac{180}{13}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া $2x=\frac{540}{11}+\frac{180}{13}=180\left(\frac{3}{11}+\frac{1}{13}\right)=\frac{180\times 50}{143}$.

$$\therefore \quad x=\frac{90\times 50}{143}=31\frac{67}{143}.$$

আবার, (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া $2y=180\left(\frac{3}{11}-\frac{1}{13}\right)=\frac{180\times 28}{143}$.

$$\therefore \quad y=\frac{90\times 28}{143}=\frac{2520}{143}=17\frac{89}{143}.$$

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 3টা $31\frac{67}{143}$ মি. এর সময় বাহিরে গিয়াছিল এবং 6টা $17\frac{89}{143}$ মি.-এর সময় ফিরিয়াছিল।

$\therefore$ সে বাহিরে ছিল 6 ঘ. $17\frac{89}{143}$ মি. $-$ 3 ঘ. $31\frac{67}{143}$ বা 2 ঘ. $46\frac{22}{143}$ মি.।

Ex. 11. *It is between 3 and 4 o'clock, and in 15 minutes the minute-hand will be as much ahead of the hour-hand as it is now behind it ; what is the time ?*

মনে কর, 3 টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার যত মি. ঘর পশ্চাদ্বর্তী, 3 টা y মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার তত মি, ঘর অগ্রবর্তী।

3 টা x মি.-এর সময় মিনিটের কাঁটা x মি. ঘরের উপর এবং ঘণ্টার কাঁটা $\left(15+\frac{x}{12}\right)$ মি. ঘরের উপর।

$\therefore$ মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার $\left(15+\frac{x}{12}-x\right)$ বা $\left(15-\frac{11x}{12}\right)$ মি. ঘর পশ্চাদ্বর্তী।

আবার, 3টা y মি.-এর সময় মিনিটের কাঁটা y মি. ঘরের উপর এবং ঘণ্টার কাঁটা $\left(15+\frac{y}{12}\right)$ মি. ঘরের উপর।

$\therefore$ মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার $y-\left(15+\frac{y}{12}\right)$ বা $\left(\frac{11y}{12}-15\right)$ মি. ঘর অগ্রবর্তী।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $\frac{11y}{12}-15=15-\frac{11x}{12}$, বা, $\frac{11}{12}(x+y)=30$,

বা, $x+y=\frac{360}{11}$. ... ... (1)

এবং $y-x=15$. ... ... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া $2x=\frac{195}{11}$, বা, $x=\frac{195}{22}=8\frac{19}{22}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = 3 টা $8\frac{19}{22}$ মি.।

Ex. 12. *A railway train travelled over a certain distance at a uniform speed. Had the speed been 5 miles an hour faster, it would have taken 1 hour less time to cover the same distance ; and had the speed been 10 miles an hour slower, the time taken to traverse the same distance would have been 3 hours more. Find the distance.*

মনে কর, ট্রেনখানির গতিবেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং ঐ নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করিতে ইহার সময় লাগিল y ঘণ্টা। $\therefore$ ঐ নির্দিষ্ট পথ $= xy$ মাইল।

প্রথম ক্ষেত্রে ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় $(x+5)$ মাইল এবং ঐ নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করিতে সময় লাগে $(y-1)$ ঘণ্টা।

$\therefore$ এই ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত পথ $=(x+5)(y-1)$ মাইল।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ট্রেনখানির গতিবেগ ঘণ্টায় $(x-10)$ মাইল এবং সময় লাগে $(y+3)$ ঘণ্টা।

$\therefore$ এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত পথ $=(x-10)(y+3)$ মাইল।

সকল ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত পথ একই বলিয়া

$$xy=(x+5)(y-1)=(x-10)(y+3).$$

এই দুই সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$xy=xy-x+5y-5, \text{ বা, } 5y-x=5. \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } xy=xy+3x-10y-30, \text{ বা, } 3x-10y=30. \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) হইতে আমরা পাই $x=40,\ y=9$.

$\therefore$ নির্ণেয় পথ $=xy=360$ মাইল।

Ex. 13. *A train proceeding from Howrah to Banaras at a uniform speed develops a defect in the engine at a place 72 miles off from Howrah. After this it moves with $\frac{3}{4}$ of its original speed and reaches Banaras 3 hours 45 minutes late. Had the defect been developed 48 miles further on, it would have been 3 hours 15 minutes late. Find the original speed of the train and the distance between Howrah and Banaras.*

মনে কর, হাওড়া H হইতে 72 মাইল দূরে A বিন্দুতে ট্রেনখানি উপস্থিত হইলে ইঞ্জিনে গোলযোগ দেখা দেয়। A বিন্দু হইতে আরও 48 মাইল দূরে B বিন্দু। B বিন্দুতে ইঞ্জিনে গোলযোগ দেখা দিলে গাড়িখানি AB পথ প্রারম্ভিক বেগে অতিক্রম করিত।

$\therefore$ প্রশ্ন হইতে স্পষ্ট প্রতীয়মান A বিন্দুতে ইঞ্জিনে গোলযোগের জন্য গতিবেগ কম হওয়ার দরুন AB পথ অর্থাৎ 48 মাইল অতিক্রম করিতে গাড়িখানির স্বাভাবিক সময় অপেক্ষা ($3\frac{3}{4}$ ঘণ্টা $- 3\frac{1}{4}$ ঘণ্টা) বা $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বেশী লাগিয়াছে।

মনে কর, গাড়িখানির গতিবেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং B বিন্দু হইতে বারাণসীর দূরত্ব y মাইল।

ইঞ্জিনে গোলযোগের জন্য A বিন্দুতে গাড়িখানির গতিবেগ কমিয়া $\frac{2}{3}x$ হইল।

$\therefore$ পূর্বের স্বাভাবিক গতিবেগে গাড়িখানি চলিলে AB পথ অতিক্রম করিতে গাড়িখানির সময় লাগে $\frac{48}{x}$ এবং ইঞ্জিনে গোলযোগের দরুন সময় $\frac{48}{\frac{2}{3}x}$ বা $\frac{72}{x}$. $\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $\frac{72}{x}-\frac{48}{x}=\frac{1}{2}$, বা, $x=48$;

এবং $\frac{y}{\frac{2}{3}\times 48}-\frac{y}{48}=3\frac{1}{4}$, বা, $\frac{y}{32}-\frac{y}{48}=\frac{13}{4}$, বা, $\frac{y}{8}-\frac{y}{12}=13$,

বা, $\frac{y}{24}=13$, বা, $y=312$.

$\therefore$ গাড়িখানির গতিবেগ ঘণ্টায় 48 মাইল।

হাওড়া হইতে বারাণসীর দূরত্ব $=(HA+AB+y)$ মাইল
$=(72+48+312)$ মাইল $=432$ মাইল।

Ex. 14. *A starts from a place P for Q and at the same time B leaves Q for P. After meeting they reach their destinations in 3 and 4 hours respectively. Show that the ratio of their speeds is as* $2:\sqrt{3}$.

মনে কর, A এর গতিবেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং B এর গতিবেগ ঘণ্টায় y মাইল এবং O বিন্দুতে তাহাদের সাক্ষাৎকার হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $QO=3x$ মাইল এবং $PO=4y$ মাইল।

এক্ষণে, P হইতে O তে যাইতে A এর সময় লাগে $\frac{4y}{x}$ এবং Q হইতে O তে যাইতে B এর সময় লাগে $\frac{3x}{y}$.

ইহা সুস্পষ্ট যে, P এবং Q হইতে O বিন্দুতে যাইতে A এবং B এর একই সময় লাগে।

$\therefore$ $\frac{4y}{x}=\frac{3x}{y}$, বা, $3x^2=4y^2$, বা, $\frac{x^2}{y^2}=\frac{4}{3}$, $\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

অর্থাৎ, $x:y=2:\sqrt{3}$.

Ex. 15. *In a race of 2640 yds., A can beat B by 10 yds., and C by 30 secs. In the same race B can beat C by 24 secs. How much time does C take to run a mile ?*

[*S. F. Addl. 1957*]

মনে কর, 2640 গজ দৌড়াইতে A, B, C-র যথাক্রমে x, y ও z সেকেণ্ড লাগে। তাহা হইলে x সেকেণ্ডে B যায় $\frac{2640}{y}\cdot x$ গজ।

এক্ষণে প্রদত্ত শর্তানুসারে, $2640-\frac{2640}{y}x=10$ .... (i)

$z-x=30$ .... (ii) এবং $z-y=24$ .... (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে, $x=z-30$, $y=z-24$,

এবং (i) হইতে

$$1-\frac{x}{y}=\frac{1}{264}, \text{ বা, } 1-\frac{1}{264}=\frac{x}{y}=\frac{z-30}{z-24}=1-\frac{6}{z-24},$$

বা, $\frac{6}{z-24}=\frac{1}{264}$. $\therefore\ z=24+6\times 264=1608.$

$\therefore$ 2640 গজ দৌড়াইতে C-র লাগে 1608 সেকেণ্ড।

অতএব 1 মাইল অর্থাৎ 1760 গজ দৌড়াইতে C-র লাগিবে

$\frac{1608}{2640}\times 1760=1072$ সেকেণ্ড $=17$ মি. 52 সেকেণ্ড।

Ex. 16. *Two passengers of a train had together 4 mds. of luggage between them, and were charged Rs. 4 and Rs. 2 respectively for excess of luggage over the weight allowed free. Had the luggage all belonged to one person, he would have been charged Rs. 7 for excess. Find how much luggage each had, and how mnch is allowed free.*

[*S. F. Addl. 1956 (Comp.)*]

মনে কর, একজন যাত্রীর মালের পরিমাণ x মণ। তাহা হইলে অন্যের মাল $4-x$ মণ। ধর, y মণ মালের ওজন বাদ দেওয়া হয়, এবং বাড়তি মালের প্রতি মণের জন্য z টাকা দিতে হয়।

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$(x-y)z=4 \quad \cdots \quad (i) \qquad (4-x-y)z=2 \quad \cdots \quad (ii)$$

এবং $(4-y)z=7 \quad \cdots \quad (iii)$

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{x-y}{4-x-y}=2$, বা, $3x+y=8 \quad \cdots \quad (iv)$

(i) কে (iii) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{x-y}{4-y}=\frac{4}{7}$, বা, $7x-3y=16 \quad \cdots \quad (v)$

(iv) ও (v) হইতে $x=2\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ যাত্রী দুইজনের মালের পরিমাণ যথাক্রমে $2\frac{1}{2}$ ও $1\frac{1}{2}$ মণ, এবং $\frac{1}{2}$ মণ মাল ছাড়িয়া দেওয়া হয়।

Examples VII (b)

1. If 100 be added to the smaller of two numbers, the sum will be twice the greater ; and if 145 be added to the greater, the sum will be three times the smaller. Find the numbers.

2. Two persons on horseback starting from two places 54 miles apart at the same time meet in 3 hours when they ride in opposite directions and in 9 hours when they ride in the same direction. Find their speed.

3. A certain fraction reduces to $\frac{2}{3}$ when the numerator is doubled and 15 added to the denominator, but when the denominator is doubled and 17 added to the numerator, it becomes equal to $\frac{1}{3}$. Find the fraction.

4. The denominator of a fraction exceeds the numerator by 9 ; and if 5 is taken from each, the sum of the reciprocal of the resulting fraction and 8 times the original one is 9 ; find the original fraction.

5. A number of 2 digits exceeds 8 times the sum of its digits by 4 and the digit in the ten's place exceeds the other digit by 7 ; find the number.

6. *A* starts from a place *P* to go to a place *Q* ; at the same time *B* starts from *Q* for *P*. After meeting they arrive

at their destinations in 2 and 3 hours respectively. Show that the ratio of their speeds (supposed to be uniform) is $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

[*S. F. Addl. 1961*]

7. A person spent Rs. 495 to buy 2 kinds of rice at 65 nP. and 47 nP. a kilogram ; by selling the whole of the rice at 60 nP. per kilogram he makes profit of $9\frac{1}{11}\%$; how much of each kind did he buy ?

8. Ten years ago the sum of the ages of two sons was half of their father's age ; one is four years older than the other, and the present sum of their ages is 14 years less than their father's ; how old are they ?

9. A number consisting of 3 digits is equal to 27 times the sum of its digits and the middle digit is less than the sum of the other two by 1 ; if 99 be added to the number, it will be inverted. Find the number.

10. A wholesale dealer buys a lot of bags of sugar for a lump sum and has the whole amount of sugar weighed out. He then calculates that if he sells all the sugar at Rs. 45 per md. he will make a profit of Rs. 81 ; if he sells the whole at Rs. 39·50 nP. per md. he will lose Rs. 67·50 nP. by the transaction. Find the cost price and the weight of sugar purchased.

11. I have to be at a certain place at a certain time to keep an appointment ; I find that if I start at 3 P.M. and walk 5 miles an hour, I shall be 12 minutes too soon ; and starting at the same time, if I walk 4 miles an hour, I shall be 24 minutes too late. Find the hour of appointment and the distance I have to walk.

12. A man who went out between 2 and 3 o'clock found on his return between 4 and 5 o'clock that the hands of his watch had exactly changed places. Find when he went out, and how long he was out.

13. Find the time between 3 and 4 o'clock, when the minute-hand of a clock is as much ahead of the hour-hand as it was behind 15 minutes ago.

14. If 36 oxen eat up the grass on a field of 20 acres in 4 weeks and what grows upon it during the time, and 21 oxen eat up the same in 9 weeks, how many oxen will it maintain for 18 weeks, supposing the grass to grow uniformly during the time ?

15. A boat can go up-stream 20 miles and come back again in 7 hours ; it can also go down-stream 35 miles in half the time. Find the speed of the boat and of the current.

16. Three kilograms of tea and 4 kilograms of sugar cost Rs 20·00 nP. ; if the price of tea were to fall by 10 p. c. and that of sugar rise by 4 p. c. they would have cost Rs 18·70 nP. Find the price of tea and sugar per kilogram.

17. A cask *P* contains a mixture of 10 gallons of milk and 15 gallons of water and another cask *Q* contains 12 gallons of milk and 6 gallons of water. How many gallons respectively must be drawn from *P* and *Q* to be mixed so that the resulting mixture may contain 4 gallons of milk and 4 gallons of water ?

18. The sum of the present ages of the parents is 5 times the combined ages of their children ; a year ago the sum of their ages was 6 times and 4 years hence it will be $3\frac{1}{7}$ times the combined ages of their children. How many children have they ?

19. A number consists of three digits whose sum is 12. The middle digit is equal to the sum of the other two and if the digits be inverted, the number will be increased by 198. Find the number.

20. A train 220 ft. long passed another train 330 ft. long moving in the same direction in 25 seconds, and in 5 seconds had they been running in opposite directions. Find the speed with which the trains were running.

21. A person bought an article and sold it at a profit of 6%. Had he bought it at 4% less and sold it at Rs 2-6as. more, his profit would have been 12%. For how much did he buy it ?

22. In a mile race A can win by half a minute against B, and by 88 yds. against C; also B can win by 20 seconds against C. Find the time required by C in running a mile.
[*S. F. Addl. 1960*]

23. Show that if a number formed of two digits is four times the sum of the digits, the number formed by interchanging the digits is seven times the sum of the digits.
[*S. F. 1956*]

24. A father's age is four times that of his elder son and five times that of his younger son; when the elder son has lived to three times his present age, the father's age will exceed twice that of his younger son by 4 years. Find their present ages. [*S. F. 1953*]

25. A man buys 4 horses and 9 cows for Rs 1340. He sells the horses at a profit of 10 p. c. and the cows at a profit of 20 p. c.; his whole gain is Rs 188; what price did he pay for a horse?

26. The expenses of a family when rice sells at 2 seers per rupee are Rs 250 a month, and Rs 244 when the price of rice is 20% less. What will be the expenses when the price of rice is $33\frac{1}{3}$% less? [*S. F. Addl. 1955*]

27. A mixture contains wine and water in the ratio of 3 : 5 and another in the ratio of 5 : 7. In what ratio must the two mixtures be mixed so that the ratio of wine to water in the resulting mixture may be in the ratio of 2 : 3?

28. The ratio of the annual incomes of two persons is as 7 : 4 and that of their annual expenditure is as 11 : 5. Each of them saves Rs 1500 per year. Find their incomes.

29. A railway train after running for an hour and a half meets with an accident and is detained for an hour and a half; after this it proceeds on its journey at $\frac{4}{5}$ths of its former speed and arrives at its destination two hours and a half behind time. Had the accident occurred 40 miles further on, it would have

been two hours and eighteen minutes behind time. Find the length of the journey.

30. Two guns are fired from the same place after an interval of 23 minutes, and a person approaching the place in a railway train observes that 22 min. 30 sec. elapse between the reports ; what was his rate of progress ?

[Sound travels 1125 ft. per second.]

31. Guns are fired from a place at regular intervals of 12 minutes, but a person moving away from the place in a train hears the reports at intervals of 12 min. 30 sec. ; if sound travels 1125 ft. per sec., find the speed of the railway train.

32. Two guns are fired from a station at an interval of 10 minutes ; a person approaching the place in a train running at the rate of $40\frac{5}{15}$ miles per hour hears the reports at an interval of 9 min. 30 secs., but a person moving away from the station in a passenger train hears the reports at an interval of 10 min. 30 secs. Find the velocity of sound and the rate at which which the passenger train is running

ANSWERS

1. 78, 89. **2.** 12 miles per hour, 6 miles per hour. **3.** $\frac{16}{33}$.
4. $\frac{7}{18}$. **5.** 92. **7.** 400 kg. of the first kind and 500 kg. of the second.
8. Father 58 years, sons 24 and 20 years. **9.** 243. **10.** Rs 1134, 27 mds.
11. 5 hrs. 36 m. P. M. ; 12 miles. **12.** 2 hrs. $20\frac{140}{143}$ m. P. M. ; 1 hr. $50\frac{10}{13}$ m. **13.** 3 hrs. $23\frac{9}{22}$ m. P.M. **14.** 15.
15. 7 and 3 miles per hour. **16.** Rs 5·00 ; Rs 1·25.
17. 5 from P, 3 from Q. **18.** 3. **19.** 264. **20.** 45 and 30 miles per hour.
21. Rs 156-4as. **22.** $16\frac{2}{3}$ minutes. **24.** Father 40 years, sons 10 and 8 years. **25.** Rs 200. **26.** Rs 240. **27.** 2 : 3.
28. Rs 7000, Rs 4000. **29.** 275 miles. **30.** $17\frac{1}{22}$ m/h.
31. $30\frac{15}{22}$ m/h. **32.** 1122 ft./sec. ; $36\frac{3}{7}$ m/h.

অষ্টম অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ

(Quadratic Equations)

8·1. দ্বিঘাত সমীকরণ।

যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির বর্গ বা দ্বিতীয় ঘাতবিশিষ্ট পদ থাকে, তদতিরিক্ত শক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না, এবং কোন পদে অজ্ঞাত রাশির ঘাত ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক নয়, তাহাকে **দ্বিঘাত সমীকরণ** (Quadratic Equation) বলে। একটি অজ্ঞাত রাশি x-সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সরলতম রূপ $ax^2+bx+c=0$, যেখানে a, b, c যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবক রাশি হইতে পারে, কিন্তু $a \neq 0$.

যে ক্ষেত্রে $b=0$, অর্থাৎ যে দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির কেবলমাত্র দ্বিতীয় শক্তিবিশিষ্ট পদ থাকে, প্রথম শক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না, তাহাকে **বিশুদ্ধ** বা **অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** (Pure Quadratic Equation) বলে। সমস্ত বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+c=0$ এই আকারের হয়। $4x^2-25=0$, $3x^2+7=0$, $16x^2=9$ প্রভৃতি বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ।

যে ক্ষেত্রে $b \neq 0$, অর্থাৎ যে দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির প্রথম এবং দ্বিতীয় উভয় শক্তিবিশিষ্ট পদ থাকে, তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** (Adfected Quadratic Equation) বলে। সকল মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সরল করণান্তে $ax^2+bx+c=0$ এই আকারে পরিণত হয়। $9x^2-6x-8=0$, $5x^2+4x+1=0$ প্রভৃতি সমীকরণ মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ।

8·2. বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান।

এই শ্রেণীর সমীকরণ শেষপর্যন্ত $ax^2+c=0$ তে পরিণত হওয়ায় ইহার সমাধানে x^2 অর্থাৎ অজ্ঞাত রাশির বর্গের মান সহজেই নির্ণয় করা যায়। এই নির্ণীত মানের বর্গমূল সমীকরণের নির্ণেয় মূল। মনে কর, $5x^2-125=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

পক্ষান্তর করিয়া আমরা পাই $5x^2=125$ বা $x^2=25$.

এখন উভয় পক্ষের বর্গমূল লইলে $x=\pm 5$.

এই ± 5 অর্থাৎ 5 বা -5 উভয়েই $5x^2-125=0$ সমীকরণের মূল।

যেহেতু, ধনরাশি এবং ঋণরাশি উভয় প্রকার রাশির বর্গ একটি ধনরাশি, সুতরাং কোন ধনরাশির বর্গমূল সমমানবিশিষ্ট বিপরীত চিহ্নযুক্ত দুইটি হইবে। সেইজন্য কোন ধনরাশির বর্গমূল নির্ণয় করিলে নির্ণীত মূলের পূর্বে '±' চিহ্নযুক্ত করিতে হয়।

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Solve* $\frac{5x^2}{9}+2=\frac{2x^2}{3}+1$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{5x^2}{9}-\frac{2x^2}{3}=1-2$, বা, $-\frac{x^2}{9}=-1$,

বা, $x^2=9$. $\therefore\ x=\pm 3$.

Ex. 2. *Solve* $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=2\frac{4}{15}$.

এখানে, $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{4x^2-1}=\frac{34}{15}$, বা, $\frac{2(4x^2+1)}{4x^2-1}=\frac{34}{15}$,

বা, $\frac{4x^2+1}{4x^2-1}=\frac{17}{15}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $4x^2=16$, বা, $x^2=4$.

$\therefore\ x=\pm 2$.

Ex. 3. *Solve* $(x-2)(x-9)+(2x+1)(x+5)=50$.

এখানে, $x^2-11x+18+2x^2+11x+5=50$,

বা, $3x^2+23=50$, বা, $3x^2=50-23=27$,

বা, $x^2=9$. $\therefore\ x=\pm 3$.

8·3. মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান।

এই শ্রেণীর সমীকরণ প্রধানতঃ দুইপ্রকারে সমাধান করা যায়—

(A) প্রদত্ত সমীকরণ সরল করিয়া মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার $ax^2+bx+c=0$ তে পরিণত করতঃ প্রাপ্ত রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া; এবং

(B) অজ্ঞাত রাশি x-সম্বলিত সমস্তপদ বাম পক্ষে এবং ধ্রুবক পদগুলি দক্ষিণ পক্ষে লইয়া উভয় পক্ষে এমন একটি রাশি যোগ করিতে হয়, যাহাতে বাম পক্ষ একটি পূর্ণবর্গ হয়, এবং তারপর উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া।

মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের এই দুই পদ্ধতি (A) উৎপাদকে বিশ্লেষণ-পদ্ধতি এবং (B) পূর্ণবর্গীকরণ-পদ্ধতি নামে অভিহিত।

(A) উৎপাদকে বিশ্লেষণ-পদ্ধতি।

সমীকরণের সমস্তপদ বাম পক্ষে লইয়া লব্ধ রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া x-সম্বলিত প্রত্যেক উৎপাদক 0 ধরিয়া xএর মান প্রদত্ত সমীকরণের মূল হইবে।

Ex. 1. *Solve* $6x^2 - x = 15$.

পক্ষান্তর করিয়া, $6x^2 - x - 15 = 0$, বা, $6x^2 + 9x - 10x - 15 = 0$,

বা, $3x(2x+3) - 5(2x+3) = 0$, বা, $(2x+3)(3x-5) = 0$.

$\therefore$ $2x + 3 = 0$, বা, $2x = -3$, বা, $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

অথবা, $3x - 5 = 0$, বা, $3x = 5$, বা, $x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

$\therefore$ $x = -1\frac{1}{2}$ বা $1\frac{2}{3}$.

দ্রষ্টব্য। বাম পক্ষের রাশিমালা $= (3x-5)(2x+3)$ এবং ইহা শূন্য বলিয়া উৎপাদক দুইটির যে-কোন একটি 0 হইলে সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। সুতরাং, $2x+3$ অথবা $3x-5$ উভয়েই শূন্য হইতে পারে।

Ex. 2. *Solve* $(a+b)x^2 + (b+c)x = a + 2b + c$.

এখানে, $(a+b)x^2 + (b+c)x - (a+2b+c) = 0$,

বা, $(a+b)x^2 + \{(a+2b+c) - (a+b)\}x - (a+2b+c) = 0$,

বা, $(a+b)x^2 - (a+b)x + (a+2b+c)x - (a+2b+c) = 0$,

বা, $x(a+b)(x-1) + (a+2b+c)(x-1) = 0$,

বা, $(x-1)\{x(a+b) + a + 2b + c\} = 0$,

$\therefore$ $x - 1 = 0$, বা, $x = 1$,

অথবা, $x(a+b) + a + 2b + c = 0$, বা, $x = -\dfrac{a+2b+c}{a+b}$.

$\therefore$ $x = 1$ বা $-\dfrac{a+2b+c}{a+b}$.

(B) পূর্ণবর্গীকরণ-পদ্ধতি।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকারে লইয়া নিম্নলিখিতরূপে বামপক্ষস্থ x-সম্বলিত রাশিমালাকে পূর্ণবর্গ করিয়া সমীকরণ সমাধান করিতে হয়।

আমরা এখানে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ লইয়া আলোচনা করিব।

$$ax^2 + bx + c = 0. \text{ পক্ষান্তর করিয়া, } ax^2 + bx = -c.$$

উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$.

উভয় পক্ষে xএর সহগ $\frac{b}{a}$ এর অর্ধেক $\frac{b}{2a}$এর বর্গ $\frac{b^2}{4a^2}$ যোগ করিয়া,

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},\text{ বা, }\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\mathbf{b}\pm\sqrt{\mathbf{b^2-4ac}}}{\mathbf{2a}}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\text{ বা, }\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

8·4. হিন্দু গণিতবিৎ শ্রীধরাচার্য দ্বিঘাত সমীকরণের x-সম্বলিত রাশিমালাকে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিবার নিম্নলিখিত পদ্ধতি উদ্ভাবন করিয়াছেন। এই পদ্ধতি ভাস্করাচার্য প্রণীত বীজগণিতের পঞ্চম অধ্যায়ে বর্ণিত আছে।

শ্রীধরাচার্যের পদ্ধতি ঃ

মনে কর, প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$.

পক্ষান্তর করিয়া, $ax^2+bx=-c$.

উভয় পক্ষকে x^2 এর সহগের চারিগুণ অর্থাৎ $4a$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

উভয় পক্ষে b^2 যোগ করিয়া, $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$,

বা, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$.

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া,

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$, বা, $2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$.

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

8·5. আমরা পূর্বেই লক্ষ্য করিয়াছি যে, যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের রাশিমালাকে $(x-\alpha)(x-\beta)$[α, β মূলদ রাশি] এই দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে α এবং β রাশি দুইটি প্রদত্ত সমীকরণের মূল হইবে। বিপরীত ক্রমে যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুই মূলদ রাশি α, β হয়, তবে সমীকরণের প্রদত্ত রাশিমালা, $(x-\alpha)(x-\beta)$ এই দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির প্রাপ্ত দুইটি মান $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. এই দুই মানের সাহায্যে আমরা প্রদত্ত সমীকরণের ধ্রুবক রাশি a, b, c হইতে স্থির করিতে পারি ax^2+bx+c উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় কিনা। এই মান দুইটি একটু পর্যালোচনা করিলে আমরা দেখিতে পাই প্রাপ্ত মূলের বর্গমূলের মধ্যস্থিত অংশ b^2-4ac যদি একটি পূর্ণবর্গ রাশি m^2 হয়, তবে $\sqrt{b^2-4ac}=m$ হইবে। তখন মূল দুইটি $\frac{-b+m}{2a}$ এবং $\frac{-b-m}{2b}$ হইবে এবং $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b-m}{2a}\right)\left(x+\frac{b+m}{2a}\right)$ হইবে অর্থাৎ রাশিমালাটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে।

$\therefore$ b^2-4ac যদি একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয়, তবে ax^2+bx+c রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে।

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানে যেখানে প্রদত্ত রাশিমালা উৎপাদকে বিশ্লেষণ সহজসাধ্য, সেখানে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া সমাধানই প্রশস্ত, কারণ, এইভাবে সমাধান সহজ এবং সংক্ষিপ্ত।

দ্বিঘাত সমীকরণ-সমাধানে প্রদত্ত রাশিমালাকে সকল ক্ষেত্রে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বা পূর্ণবর্গ করিয়া সমাধান না করিয়া **দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$** প্রয়োগ করিয়া অতি সহজেই দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, $9x^2+11x-20=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে। এখানে মূল নির্ণয়ের উপরিলিখিত সাধারণ সূত্র প্রয়োগ করিয়া এই সমীকরণের মূল পাই

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4.9.(-20)}}{2.9}=\frac{-11\pm\sqrt{121+720}}{18}$$

$$=\frac{-11\pm29}{18}=1 \text{ বা } -\frac{20}{9}.$$

8·6. বিবিধ উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Solve* $x^2+15x-42=3(7-x)$.

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2+15x-42-21+3x=0$,

বা, $x^2+18x-63=0$, বা, $(x+21)(x-3)=0$.

$\therefore\ x=-21$ বা 3.

Ex. 2. *Solve* $7(x-5)^2-5(x-3)^2+2(x-5)(x-3)=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$7(x-5)^2+7(x-5)(x-3)-5(x-5)(x-3)-5(x-3)^2=0,$$

বা, $7(x-5)(x-5+x-3)-5(x-3)(x-5+x-3)=0$,

বা, $(2x-8)(7x-35-5x+15)=0$,

বা, $2(x-4)(2x-20)=0$, বা, $4(x-4)(x-10)=0$.

$\therefore\ x=4$ বা 10.

Ex. 3. *Solve* $(a-b)x^2-(a+b)x+2b=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $x^2-\dfrac{a+b}{a-b}x+\dfrac{2b}{a-b}=0$,

বা, $x^2-\dfrac{a-b+2b}{a-b}x+\dfrac{2b}{a-b}=0$.

বা, $x^2-\left(1+\dfrac{2b}{a-b}\right)x+\dfrac{2b}{a-b}=0$, বা, $x^2-x-\dfrac{2bx}{a-b}+\dfrac{2b}{a-b}=0$,

বা, $x(x-1)-\dfrac{2b}{a-b}(x-1)=0$, বা, $\left(x-1\right)\left(x-\dfrac{2b}{a-b}\right)=0$.

$\therefore\ x=1$ বা, $\dfrac{2b}{a-b}$.

এই সমীকরণ নিম্নলিখিত উপায়েও সমাধান করা যাইতে পারে

$$x^2-\frac{a+b}{a-b}x=-\frac{2b}{a-b}.$$

উভয় পক্ষে $\left\{\dfrac{(a+b)}{2(a-b)}\right\}^2$ যোগ করিয়া,

$$x^2-\frac{a+b}{a-b}x+\frac{(a+b)^2}{4(a-b)^2}=\frac{(a+b)^2}{4(a-b)^2}-\frac{2b}{a-b},$$

বা, $\left\{x-\dfrac{a+b}{2(a-b)}\right\}^2=\dfrac{(a+b)^2-8b(a-b)}{4(a-b)^2}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-8ab+8b^2}{4(a-b)^2}=\frac{(a-3b)^2}{4(a-b)^2}.$$

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া, $x-\frac{a+b}{2(a-b)}=\pm\frac{a-3b}{2(a-b)}$,

$$\text{বা, } x=\frac{a+b}{2(a-b)}\pm\frac{a-3b}{2(a-b)}=1 \text{ বা, } \frac{2b}{a-b}.$$

Ex. 4. *Solve* $\frac{x^2}{a+b}-(a-b)x=\frac{1}{(a^2b^4)^{-\frac{1}{2}}+(a^4b^2)^{-\frac{1}{2}}}$.

উভয় পক্ষকে $a+b$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$x^2-(a^2-b^2)x=\frac{a+b}{a^{-1}b^{-2}+a^{-2}b^{-1}}=\frac{a+b}{\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}}=\frac{a+b}{\frac{a+b}{a^2b^2}}=a^2b^2,$$

$$\text{বা, } x^2-a^2x+b^2x-a^2b^2=0,$$

$$\text{বা, } x(x-a^2)+b^2(x-a^2)=0, \text{ বা, } (x-a^2)(x+b^2)=0,$$

$$\therefore\ x=a^2 \text{ বা } -b^2.$$

Ex. 5. *Solve* : (i) $5x^2=17x-10$.

(ii) $(x+2a)(x+3a)=a^2(1+\sqrt{2})$.

(i) এখানে $5x^2-17x+10=0$.

$$\therefore \text{ সূত্রানুযায়ী, } x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4.5.10}}{2.5}=\frac{17\pm\sqrt{89}}{10}.$$

$$\therefore\ x=\frac{17+\sqrt{89}}{10} \text{ বা, } \frac{17-\sqrt{89}}{10}.$$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$x^2+5ax+6a^2=a^2(1+\sqrt{2}),$$

$$\text{বা, } x^2+5ax+(5-\sqrt{2})a^2=0.$$

$$\therefore \text{ সূত্রানুযায়ী, } x=\frac{-5a\pm\sqrt{25a^2-4.1.(5-\sqrt{2})a^2}}{2.1}$$

$$=\frac{-5a\pm a\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{a}{2}\{-5\pm\sqrt{5+4\sqrt{2}}\}.$$

Ex. 6. *Solve* $\frac{1}{x+a+\frac{1}{x+b}}=\frac{1}{x-a+\frac{1}{x-b}}$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে সরল করিয়া,

$$\frac{x+b}{x^2+x(a+b)+ab+1}=\frac{x-b}{x^2-x(a+b)+ab+1}.$$

বজ্রগুণন করিয়া,

$$x^3-ax^2+(1-b^2)x+b(ab+1)=x^3+ax^2+(1-b^2)x-b(ab+1).$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$-2ax^2=-2b(ab+1),\ \text{বা,}\ x^2=\frac{b}{a}(ab+1).$$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}(ab+1)}.$$

Ex. 7. *Solve* $\dfrac{ax+1+\sqrt{a^2x^2-1}}{ax+1-\sqrt{a^2x^2-1}}=\dfrac{b^2x}{2}.$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{ax+1}{\sqrt{a^2x^2-1}}=\dfrac{b^2x+2}{b^2x-2},$

অর্থাৎ, $\sqrt{\dfrac{ax+1}{ax-1}}=\dfrac{b^2x+2}{b^2x-2}.$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $\dfrac{ax+1}{ax-1}=\dfrac{b^4x^2+4b^2x+4}{b^4x^2-4b^2x+4}.$

পুনরায় যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করিয়া, $ax=\dfrac{b^4x^2+4}{4b^2x},$

বা, $b^4x^2+4=4ab^2x^2$, বা, $x^2b^2(b^2-4a)=-4.$

$$\therefore\ x^2=\frac{4}{b^2(4a-b^2)},\ \text{বা,}\ x=\pm\frac{2}{b\sqrt{4a-b^2}}.$$

Ex. 8. *Solve* $\dfrac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}}=\dfrac{x}{a-x}.$

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে

$$\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{a}{a-2x}\ \text{বা,}\ \sqrt{2ax-x^2}=a-2x.$$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $2ax-x^2=a^2-4ax+4x^2.$

পক্ষান্তর করিয়া, $5x^2-6ax+a^2=0$, বা, $(x-a)(5x-a)=0.$

সুতরাং, $x-a=0$, অর্থাৎ $x=a.$

অথবা, $5x - a = 0$, অর্থাৎ $5x = a$ বা $x = \frac{1}{5}a$.

$\therefore \quad x = a$ বা $\frac{1}{5}a$.

Ex. 9. *Solve* $\sqrt{7x^2+3x+2} + \sqrt{7x^2+3x-2}$

$$= 6 + 4\sqrt{2} \quad \cdots \text{(i)}$$

আমরা জানি, $(7x^2+3x+2) - (7x^2+3x-2) = 4. \quad \cdots \text{(ii)}$

[একটি অভেদ]

$\therefore$ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\sqrt{7x^2+3x+2} - \sqrt{7x^2+3x-2} = \frac{4}{6+4\sqrt{2}}$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}. \quad \cdots \text{(iii)}$$

(i) এবং (iii) যোগ করিয়া,

$$2\sqrt{7x^2+3x+2} = 12, \text{ বা, } \sqrt{7x^2+3x+2} = 6.$$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $7x^2+3x+2 = 36$,

বা, $7x^2+3x-34 = 0$, বা, $(x-2)(7x+17) = 0$.

$\therefore \quad x = 2$, বা, $-2\frac{3}{7}$.

Ex. 10. *Solve* $(x-a)(x-b) = \dfrac{n(a-b)+1}{n^2}$.

উভয় পক্ষে n^2 দ্বারা গুণ করিয়া, $n^2(x-a)(x-b) = n(a-b)+1$,

বা, $(nx-na)(nx-nb) = n(a-b)+1$.

পক্ষান্তর করিয়া, $(nx-na)(nx-nb) - n(a-b) - 1 = 0$,

বা, $(nx-na)(nx-nb) + (nx-na) - (nx-nb) - 1 = 0$,

বা, $(nx-na)(nx-nb+1) - 1(nx-nb+1) = 0$,

বা, $(nx-nb+1)(nx-na-1) = 0$.

$\therefore \quad nx-nb+1 = 0$, অর্থাৎ $nx = nb-1$, বা, $x = b - \dfrac{1}{n}$.

অথবা, $nx-na-1 = 0$, অর্থাৎ $nx = na+1$, বা, $x = a + \dfrac{1}{n}$.

$\therefore \quad x = b - \dfrac{1}{n}$ বা $a + \dfrac{1}{n}$.

Ex. 11. *Solve* $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

বা, $\frac{x-a-b-x}{x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$, বা, $\frac{-(a+b)}{x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$.

উভয় পক্ষকে $a+b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{-1}{x(a+b+x)}=\frac{1}{ab}$,

বা, $x(a+b+x)=-ab$,

বা, $x^2+x(a+b)+ab=0$,

বা, $(x+a)(x+b)=0$. $\therefore$ $x=-a$ বা $-b$.

Ex. 12. *Solve* $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$.

মনে কর, $\frac{x}{x+1}=y$, $\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায় $y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}$,

বা, $\frac{y^2+1}{y}=\frac{13}{6}$.

বজ্রগুণন করিয়া, $6y^2+6=13y$, বা, $6y^2-13y+6=0$,

বা, $(2y-3)(3y-2)=0$, বা, $y=\frac{3}{2}$ বা $\frac{2}{3}$.

$\therefore$ y এর মান $\frac{x}{x+1}$ বসাইয়া $\frac{x}{x+1}=\frac{3}{2}$, বা, $3x+3=2x$, বা, $x=-3$,

অথবা $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$, বা, $3x=2x+2$, বা $x=2$.

$\therefore$ $x=-3$ বা 2.

Ex. 13. *Solve* $7x^2-9x-3\sqrt{7x^2-9x+6}+2=0$,

এখানে, $7x^2-9x+6-3\sqrt{7x^2-9x+6}-4=0$.

$\sqrt{7x^2-9x+6}=y$, মনে কর।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়, $y^2-3y-4=0$,

বা, $(y-4)(y+1)=0$. $\therefore$ $y=4$ অথবা -1.

এখন $y=4$ হইলে, $\sqrt{7x^2-9x+6}=4$,

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $7x^2-9x+6=16$.

বা, $7x^2-9x-10=0$, বা, $(7x+5)(x-2)=0$.

$\therefore$ $x=2$ অথবা $-\frac{5}{7}$.

আবার $y=-1$ হইলে, $\sqrt{7x^2-9x+6}=-1$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $7x^2-9x+6=1$.

বা, $7x^2-9x+5=0$.

$\therefore$ সূত্র প্রয়োগ করিয়া, $x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-140}}{2.17}=\dfrac{9\pm\sqrt{-59}}{34}$.

এখানে x-এর এই দুইটি মান কাল্পনিক।

Ex. 14. *Solve* $\dfrac{2a^2\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=a^2+b^2$.

বজ্রগুণন এবং পক্ষান্তর করিয়া,

$$x(a^2+b^2)=2a^2\sqrt{1+x^2}-(a^2+b^2)\sqrt{1+x^2},$$

বা, $x(a^2+b^2)=\sqrt{1+x^2}\,(a^2-b^2)$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $x^2(a^2+b^2)^2=(1+x^2)(a^2-b^2)^2$,

পক্ষান্তর করিয়া,

$$x^2\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}=(a^2-b^2)^2,$$

বা, $x^2.4a^2b^2=(a^2-b^2)^2$, বা, $x^2=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}$.

$$\therefore\quad x=\pm\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

Ex. 15. *Solve*

$$(a+\sqrt{a^2-x^2})^{\frac{1}{2}}+(a-\sqrt{a^2-x^2})^{\frac{1}{2}}=n\left\{\frac{a+x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

উভয় পক্ষকে $(a+\sqrt{a^2-x^2})^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a+\sqrt{a^2-x^2}+\{a^2-(a^2-x^2)\}^{\frac{1}{2}}=n(a+x)^{\frac{1}{2}},$$

বা, $a+\sqrt{a^2-x^2}+x=n\sqrt{a+x}$.

উভয় পক্ষকে $\sqrt{a+x}$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=n.$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $a+x+a-x+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2$,

বা, $2\sqrt{a^2-x^2}=n^2-2a.$

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $4(a^2-x^2)=n^4-4an^2+4a^2.$

পক্ষান্তর করিয়া, $-4x^2=n^4-4an^2$,

বা, $x^2=\frac{n^2}{4}(4a-n^2)=n^2\left(a-\frac{n^2}{4}\right).$

$\therefore\ x=\pm n\sqrt{a-\frac{n^2}{4}}.$

Ex. 16. *Solve* $\frac{2x+7}{2x-7}+\frac{2x-7}{2x+7}=15\frac{1}{15}.$

$y=\frac{2x+7}{2x-7}$ ধরিলে সমীকরণটি হয়,

$y+\frac{1}{y}=15\frac{1}{15}$, বা, $\frac{y^2+1}{y}=\frac{226}{15}$, বা, $15y^2+15=226y.$

পক্ষান্তর করিয়া, $15y^2-226y+15=0$,

বা, $(y-15)(15y-1)=0$, $\therefore\ y=15$ বা $\frac{1}{15}$.

yএর মান বসাইয়া, (i) $\frac{2x+7}{2x-7}=15.$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{2x}{7}=\frac{8}{7}.$

$\therefore\ x=4.$

অথবা, (ii) $\frac{2x+7}{2x-7}=\frac{1}{15}.$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{2x}{7}=-\frac{8}{7}.$

$\therefore\ x=-4,\quad \therefore\ x=\pm 4.$

বিকল্প পদ্ধতি :

$\frac{2x+7}{2x-7}+\frac{2x-7}{2x+7}=15\frac{1}{15}$,

বা, $\frac{(2x-7)+14}{2x-7}+\frac{(2x+7)-14}{2x+7}=15\frac{1}{15}$,

বা, $1+\frac{14}{2x-7}+1-\frac{14}{2x+7}=15\frac{1}{15}$,

বা, $\frac{14}{2x-7}-\frac{14}{2x+7}=13\frac{1}{15}=\frac{196}{15}.$

উভয় পক্ষকে 14 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{2x-7}-\frac{1}{2x+7}=\frac{14}{15}, \text{ বা, } \frac{2x+7-2x+7}{4x^2-49}=\frac{14}{15},$$

বা, $4x^2-49=15$, বা, $4x^2=64$, বা, $x^2=16$.

$$\therefore \quad x=\pm 4.$$

Ex. 17. *Solve* $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া,

বা, $a-x+b+x+2\sqrt{(a-x)(b+x)}=a+b+2\sqrt{ab}$.

$a+b+2\sqrt{(a-x)(b+x)}=a+b+2\sqrt{ab}$,

বা, $\sqrt{(a-x)(b+x)}=\sqrt{ab}$. পুনরায় বর্গ করিয়া,

$(a-x)(b+x)=ab$, বা, $ab-x^2+x(a-b)=ab$.

বা, $x(a-b-x)=0$. $\therefore$ $x=0$ বা $a-b$.

Ex. 18. *Solve* $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\frac{1}{4}$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\frac{1}{4}$

বা, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-11\frac{1}{4}=0$.

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করিয়া এবং $x+\frac{1}{x}=y$ ধরিয়া সমীকরণটি হয়

$4y^2+8y-45=0$, বা, $4y^2+18y-10y-45=0$,

বা, $2y(2y+9)-5(2y+9)=0$ বা $(2y+9)(2y-5)=0$.

$$\therefore \quad y=\tfrac{5}{2} \text{ বা } -\tfrac{9}{2}.$$

$\therefore$ (i) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, বা, $2x^2-5x+2=0$, বা, $(x-2)(2x-1)=0$.

$$\therefore \quad x=2 \text{ বা } \tfrac{1}{2}.$$

এবং (ii) $x+\frac{1}{x}=-\frac{9}{2}$, বা, $2x^2+9x+2=0$.

$$\therefore \quad x=\frac{-9\pm\sqrt{81-4.2.2}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{65}}{4}.$$

Ex. 19. *Solve* $9^{1+x}+9^{1-x}=30$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $9.9^x+\frac{9}{9^x}=30$, বা, $3.9^x+\frac{3}{9^x}=10$.

[3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

এখন $9^x=y$ ধরিয়া প্রদত্ত সমীকরণটি হয়

$$3y+\frac{3}{y}=10, \quad \text{বা, } 3y^2-10y+3=0,$$

বা, $(y-3)(3y-1)=0$. $\therefore$ $y=3$ বা $\frac{1}{3}$.

$\therefore$ $9^x=3$ বা $3^{2x}=3$. $\therefore$ $2x=1$ বা $x=\frac{1}{2}$.

অথবা, $9^x=\frac{1}{3}=3^{-1}$ বা $3^{2x}=3^{-1}$ $\therefore$ $2x=-1$ বা, $x=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{2} \text{ বা } -\tfrac{1}{2}.$$

Ex. 20. *Solve* $3^{x^2}:3^{2x}=27:1$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $\frac{3^{x^2}}{3^{2x}}=3^3$, বা, $3^{x^2-2x}=3^3$.

$\therefore$ $x^2-2x=3$, বা, $x^2-2x-3=0$,

বা, $(x-3)(x+1)=0$. $\therefore$ $x=3$ বা -1.

8·7. দ্বিঘাত সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী।

সরল এবং সহ-সমীকরণের সাহায্যে কেমন করিয়া পাটীগণিতের অনেক দুরূহ প্রশ্ন অতি সহজে সমাধান করা যায়, তাহা পূর্বে দেখানো হইয়াছে। ঐরূপ প্রশ্ন সমাধানে অনেক ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণের সাহায্য প্রয়োজন হয়। নিম্নে দ্বিঘাত সমীকরণ-ঘটিত কতকগুলি প্রশ্নের সমাধান করিয়া উহাদের সমাধান-পদ্ধতি প্রদর্শিত হইল।

Ex. 1. *Find a positive number, the excess of whose square over 121 is equal to 16 times the number diminished by* 1.

মনে কর, সংখ্যাটি x, সুতরাং, ইহার বর্গ $=x^2$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$x^2-121=16(x-1), \quad \text{বা, } x^2-16x-105=0,$$

বা, $(x-21)(x+5)=0$. $\therefore$ $x=-5$ বা 21.

এখানে ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয় বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যা $=21$.

Ex. 2. *A man travels 126 miles, and finds that he could have made the journey in 4 hours less time, had he travelled 2 miles an hour faster; find the rate of his travelling.*

মনে কর, তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় x মাইল।

$\therefore$ 126 মাইল যাইতে তাহার সময় লাগে $\frac{126}{x}$ ঘণ্টা।

তাহার গতিবেগ 2 মাইল বেশী হইয়া ঘণ্টায় $(x+2)$ মাইল হইলে, 126 মাইল যাইতে তাহার সময় লাগে $\frac{126}{x+2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{126}{x}-\frac{126}{x+2}=4$, বা, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{63}$,

বা, $\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{63}$, বা, $x(x+2)=63$,

বা, $x^2+2x-63=0$, বা, $(x+9)(x-7)=0$.

$\therefore$ $x=-9$ বা, 7.

ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয় বলিয়া নির্ণেয় গতিবেগ $=7$ মাইল প্রতি ঘণ্টায়।

Ex. 3. *A cistern is filled by 2 pipes running together in 35 minutes; the larger pipe would fill it in 24 minutes less time than the smaller; find the time taken by each running singly to fill the cistern.*

মনে কর, ক্ষুদ্র নল x মিনিটে এবং বড় নল $(x-24)$ মিনিটে চৌবাচ্চা পূর্ণ করে।

$\therefore$ দুই নল একসঙ্গে খোলা থাকিলে চৌবাচ্চার $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-24}\right)$ অংশ 1 মিনিটে পূর্ণ হয়। কিন্তু, প্রদত্ত শর্তানুসারে দুই নল চৌবাচ্চার $\frac{1}{৩৫}$ অংশ একত্রে 1 মিনিটে পূর্ণ করে।

$\therefore$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-24}=\frac{1}{35}$, বা, $35(2x-24)=x(x-24)$,

বা, $x^2-94x+840=0$, বা, $(x-84)(x-10)=0$.

$\therefore$ $x=84$ বা 10.

$\therefore$ ক্ষুদ্র নল 84 মিনিটে এবং বড় নল (84 – 24) বা 60 মিনিটে চৌবাচ্চা পূর্ণ করে।

[এখানে x-এর 10 মান গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা 10 মিনিটের 24 মিনিট কম অর্থহীন।]

Ex. 4. *A man takes $2\frac{1}{2}$ hours to swim 5 miles up-stream and $2\frac{3}{4}$ miles down-stream. The river flows at the rate of $1\frac{1}{2}$ miles per hour. Find the rate at which the man can swim in still water.*

মনে কর, লোকটি স্থির জলে ঘণ্টায় x মাইল বেগে সাঁতার দিতে পারে। তাহা হইলে, স্রোতের বিপরীতে তাহার গতিবেগ হইবে ঘণ্টায় $x - 1\frac{1}{2}$ মাইল, এবং স্রোতের দিকে তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় $x + 1\frac{1}{2}$ মাইল।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{5}{x-1\frac{1}{2}} + \frac{2\frac{3}{4}}{x+1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}, \quad \text{অর্থাৎ,} \quad \frac{10}{2x-3} + \frac{11}{4x+6} = \frac{5}{2},$$

বা, $2\{10(4x+6) + 11(2x-3)\} = 5(2x-3)(4x+6)$,

বা, $124x + 54 = 40x^2 - 90$, বা, $40x^2 - 124x - 144 = 0$,

বা, $10x^2 - 31x - 36 = 0$, বা, $(x-4)(10x+9) = 0$.

$\therefore$ $x = 4$ অথবা $-\frac{9}{10}$. এক্ষেত্রে গতিবেগের ঋণাত্মক মান অর্থহীন এবং গ্রহণযোগ্য নয় বলিয়া $x = 4$.

$\therefore$ লোকটি স্থির জলে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে সাঁতার দিতে পারে।

Ex. 5. *A train leaves the station A at 8 A.M. for another station B 225 miles off, and runs uniformly; a second train leaves A at 9 A.M., and after running uniformly for an hour and a half comes to a point which A passed 50 minutes earlier. The speed of the second train is now increased by 10 miles per hour, and it reaches B simultaneously with the first train. Find the rates of motion of the two trains at starting.*

মনে কর, দ্বিতীয় ট্রেনখানি 9 A. M.-এ রওনা হইয়া $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে, অর্থাৎ 10-30 A. M.-এ A হইতে x মাইল দূরে P বিন্দুতে পৌছিল। তাহা হইলে PB দূরত্ব $225 - x$ মাইল। প্রথম ট্রেণ P ছাড়িয়াছে 50 মিনিট আগে, অর্থাৎ

9-40 A. M. সময়। 8 A. M.-এ A হইতে রওনা হওয়ায় x মাইল আসিতে ইহার সময় লাগিয়াছে 1 ঘণ্টা 40 মিনিট অর্থাৎ $1\frac{2}{3}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ ইহার গতিবেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{1\frac{2}{3}} = \frac{3x}{5}$ মাইল।

দ্বিতীয় ট্রেনখানি x দূরত্ব আসিয়াছে $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়।

$\therefore$ দ্বিতীয় ট্রেনের গতিবেগ $\frac{x}{1\frac{1}{2}} = \frac{2x}{3}$ মাইল ঘণ্টায়।

P বিন্দুতে গতিবেগ বাড়িয়া ঘণ্টায় $\frac{2}{3}x + 10$ মাইল হইল।

$\therefore$ $PB = 225 - x$ মাইল যাইতে ইহার $\frac{225 - x}{\frac{2}{3}x + 10}$ ঘণ্টা লাগিল।

প্রথম ট্রেনের PB যাইতে লাগিয়াছে $\frac{225 - x}{\frac{3}{5}x}$ ঘণ্টা।

দুইটি ট্রেনই একসঙ্গে B-তে পৌছায়, এবং প্রথম ট্রেন 1 ঘণ্টা আগে রওনা হওয়ায় A হইতে B যাইতে প্রথম ট্রেনের মোট 1 ঘণ্টা বেশী সময় লাগিয়াছে।

$$\therefore \quad 1\tfrac{2}{3} + \frac{225 - x}{\frac{3}{5}x} = 1\tfrac{1}{2} + \frac{225 - x}{\frac{2}{3}x + 10} + 1.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{5(225 - x)}{3x} - \frac{3(225 - x)}{2x + 30} = \frac{5}{6}$.

অর্থাৎ, $(225 - x)\left\{\frac{5(2x + 30) - 9x}{3x(2x + 30)}\right\} = \frac{5}{6}$,

অথবা, $(225 - x)(x + 150) = 5x(x + 15)$,

বা, $225.150 + 75x - x^2 = 5x^2 + 75x$.

$\therefore$ $6x^2 = 150.225$, বা, $x^2 = 25.225$. $\therefore$ $x = 5 \times 15 = 75$.

$\therefore$ প্রথম ট্রেনের গতিবেগ $\frac{3}{5}x = 45$ মাইল ঘণ্টায়,

এবং দ্বিতীয় ট্রেনের রওনা হওয়ার সময় গতিবেগ $\frac{2}{3}x = 50$ মাইল ঘণ্টায়।

Examples VIII

Solve the following equations :

1. (*i*) $6(x^2 + 6) = 7x^2$. (*ii*) $5x^2 - 17 = 4(x^2 - 4)$.

(*iii*) $(8 + 3x)(8 - 3x) = 28$. (*iv*) $3x(2x + 5) = 5x(x + 3) + 81$.

(v) $(x-2a)^2-4a(a-x)=9a^2.$

(vi) $\dfrac{5x^2+6}{7}+\dfrac{4x^2+3}{5}=\dfrac{23x^2-8}{35}+4.$

(vii) $12x-\dfrac{13}{x}=\dfrac{155}{x}.$

2. (i) $2\left(\dfrac{2x^2+45}{x^2+9}\right)-3\left(\dfrac{9-x^2}{x^2+3}\right)=7.$

(ii) $\dfrac{2x+3}{2x(2x-3)}-\dfrac{2x-3}{2x(2x+3)}=\dfrac{48}{x^2-6}.$

3. (i) $8x^2+x=30.$ (ii) $x^2-9x-70=0.$

(iii) $6x^2-x-15=0.$ (iv) $(2x+a)(2x+b)=4x(a+b).$

(v) $x^2-\frac{3}{5}x=\frac{2}{5}.$ (vi) $20x^2=12-x.$

(vii) $5x^2+17x=12.$ (viii) $5x^2-17=12x.$

(ix) $x^2-8x=2009.$ (x) $3x^2+x=704.$

4. (i) $x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+6=0.$ (ii) $6x^{-\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{5}}=1.$

5. $\dfrac{x+3}{2x-7}-\dfrac{2x-1}{x-3}=0.$

6. $\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{1}{6}.$

7. $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-1}{x-2}=5\frac{1}{3}.$

8. $\dfrac{x-5}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-5}=8\frac{1}{8}.$

9. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+3=0.$

10. $\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{3x+4}{x-2}=\dfrac{4x-5}{x+4}.$

11. $\dfrac{2}{3x-2a}+\dfrac{3}{2x-3a}=\dfrac{7}{2a}.$

12. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$

13. $a^2b^2x^2-2a^2bx+a^2-b^2=0.$

14. $x^2-2ax+4ab=2bx.$

15. $x^2(b-c)+ax(c-a)+a^2(a-b)=0.$

16. $\dfrac{x^2}{a+b}+(a-b)=\dfrac{2ax}{a+b}.$

17. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{a-b}{x-(a+b)}.$

18. $2cx^2-abx+2abd=4cdx.$

19. $\frac{a^2 b}{x^2} + \left(1 + \frac{b}{x}\right) a = 2b + \frac{a^2}{x}.$

20. $(2x+5)(x-7) + (2x-1)(5x+1) = x^2 + 3(x+6).$

21. $2^{x^2-2x+5} \times 5^{x^2-2x+3} = 400.$ 22. $9^{x+2} - 84.3^{x+1} + 27 = 0.$

23. $5^x + 5^{-x} = 25\frac{1}{25}.$ 24. $2^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{\sqrt{2^x}} = \frac{17}{4}.$

25. $3^{(2x+3)} + 3^{2x} = 4(3^{x+3} + 3^x - 21).$

26. $10(3^{2x} + 1) = (9^x + 82.3^x + 1).$ 27. $3^{2x} + 9 = 10.3^x.$

28. $2^{2x+1} + 1 = 3.2^x.$

29. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}.$

30. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+36}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+64}}.$

31. $\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+100}} = \frac{x-7}{\sqrt{x^2-14x+196}}.$

32. $\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x-4} + 5\sqrt{x-7} = 0.$

33. $\sqrt{x^2-4x+8} - \sqrt{x^2-4x-2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}.$

34. $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \frac{12}{\sqrt{5+x}}.$

35. $(a+x)^{\frac{2}{3}} + (a-x)^{\frac{2}{3}} = 3(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}.$

36. $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 2(\sqrt{x} + \frac{3}{2}).$

37. $\frac{a+2x+\sqrt{a^2+2x^2}}{a+2x-\sqrt{a^2+2x^2}} = \frac{2x}{a}.$

38. $2\sqrt{x^2-9x+18} - \sqrt{x^2-4x-12} = x-6.$

39. $\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-3x-6} = \sqrt{20} - \sqrt{12}.$

40. $\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{x}.$

41. $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = 0.$

42. $(a+x)^{\frac{1}{3}} + (a-x)^{\frac{1}{3}} = b.$

43. Find a number such that twice its square diminished by 7 is equal to 5 times the number.

44. The denominator of a fraction is 2 more than its numerator and the sum of the fraction and its reciprocal is $2\frac{4}{63}$. Find the fraction.

45. The sum of 13 times a proper fraction and 18 times its reciprocal is $32\frac{7}{15}$; find the fraction.

46. Find three consecutive odd numbers such that the sum of their squares is 2195.

47. A man travels 90 miles at a certain speed and finds that he could have made the journey in 3 hours less time had he increased his speed by 1 mile an hour ; find the rate of his travelling.

48. The circumference of the wheel of a moving carriage is $14\frac{2}{3}$ ft. ; if the wheel takes half a second more to make one complete revolution, the rate of the carriage will be $3\frac{1}{3}$ miles less per hour ; how fast is the carriage running ?

49. The area of a rectangular garden is 2000 sq. yds. The area of a pathway 2 yds. wide just inside and around the garden is 344 sq. yds. Find the dimensions of the garden.

50. A trader byes a number of tables for Rs. 480. If the price of each table were Rs. 2 less, he could buy 20 more for the same money. Find the number of tables purchased.

51. A cistern is filled by two pipes running together in $52\frac{1}{2}$ minutes ; the larger pipe would fill it in 36 minutes less time than the smaller ; find the time taken by each separately to fill the cistern.

52. Two trains start simultaneously from two stations A and B, 270 miles apart, each to the opposite station ; they reach their destination in $6\frac{1}{4}$ hours and 4 hours after they meet. Find the rate at which each train travels.

53. Two trains A and B travelling uniformly leave Howrah at 3 P. M. and 4 P. M. respectively for a place 144 miles off ; at 6 P. M. the second train B comes to a point which the first train A had passed at 5-24 P. M. The speed of the second train is increased by 4 miles an hour and it reaches the destination at the same time as A. Find the speed of the two trains at start.

54. A regiment of soldiers is in the form of a solid square. When they are formed into a hollow square 5 deep, the number of soldiers in the front is 80 more than original. Find the number of soldiers in the regiment.

ANSWERS

1. (i) ± 6. (ii) ± 1. (iii) ± 2. (iv) ± 9. (v) $\pm 3a$. (vi) $\pm 3\sqrt{\frac{3}{10}}$. (vii) $\pm\sqrt{14}$. **2.** (i) ± 3. (ii) $\pm\sqrt{2}$.
3. (i) $1\frac{7}{8}$ or -2. (ii) 14 or 5. (iii) $\frac{5}{3}$ or $-\frac{3}{2}$. (iv) $\frac{1}{2}a$ or $\frac{1}{2}b$. (v) 1 or $-\frac{2}{5}$. (vi) $\frac{3}{4}$ or $-\frac{4}{5}$. (vii) $\frac{3}{5}$ or -4. (viii) -1 or $3\frac{2}{5}$. (ix) 49 or -41. (x) $\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{8449})$. **4.** (i) 8 or 27. (ii) 32 or -243. **5.** 4 or $\frac{4}{3}$. **6.** 1 or 14. **7.** 5 or $\frac{21}{10}$.
8. 6 or -3. **9.** $\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{3}$. **10.** 0 or $3\frac{7}{8}$. **11.** $2a$ or $\frac{11}{14}a$.
12. $\frac{a+b}{a-b}$ or $\frac{a-b}{a+b}$. **13.** $\frac{a\pm b}{ab}$. **14.** $2a$ or $2b$. **15.** a or $\frac{a(a-b)}{(b-c)}$.
16. $a+b$ or $a-b$. **17.** $a+b\pm\sqrt{ab}$. **18.** $\frac{ab}{2c}$ or $2d$. **19.** a or $\frac{ab}{a-2b}$.
20. 3 or $-1\frac{7}{11}$. **21.** 1. **22.** 1 or -2. **23.** ± 2.
24. ± 4. **25.** 0 or 1. **26.** ± 2. **27.** 0 or 2.
28. 0 or -1. **29.** a or b. **30.** 0 or $3\frac{3}{7}$. **31.** 0 or $5\frac{5}{6}$.
32. 8. **33.** $2\pm 2\sqrt{2}$. **34.** 3 or 4. **35.** $\pm\frac{2a}{\sqrt{5}}$.
36. $\frac{1}{4}$ or $\frac{9}{4}$. **37.** $2a$ or $-\frac{1}{2}a$. **38.** 6 or 7. **39.** 6 or -3.
40. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **41.** $-\frac{1}{3}\{(a+b+c)\pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}\}$.
42. $\pm\left\{a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b^3}\right\}^{\frac{1}{2}}$. **43.** -1 or $3\frac{1}{2}$. **44.** $\frac{7}{9}$. **45.** $\frac{162}{195}$.
46. 25, 27, 29. **47.** 5 miles/hr. **48.** 10 miles/hr.
49. Length 50 yds., breadth 40 yds. **50.** 60.
51. 90 min., 126 min. **52.** 24 miles/hr., 30 miles/hr.
53. 30 m./h., 36 m./h. **54.** 2500.

নবম অধ্যায়

লেখ ও লেখ সাহায্যে সমাধান

(Graphs & Graphical Solutions)

9·1. লেখ-সম্বন্ধে সাধারণ নিয়ম। লেখ-অঙ্কনের সাধারণ নিয়ম এবং একঘাত-সমীকরণের লেখ, অর্থাৎ সরলরেখার লেখ-র সহিত ছাত্রগণ পূর্বেই পরিচিত। এখানে আমরা প্রধানতঃ দ্বিঘাত-সমীকরণের লেখ, লেখ-র সাহায্যে সহ-সমীকরণের সমাধান, এবং বিবিধ প্রশ্নের সমাধানে লেখ-র প্রয়োগ ইত্যাদি বিষয় আলোচনা করিব।

এখানে লেখ-অঙ্কনের নিয়মের প্রধান নির্দেশগুলি ছাত্রদের মনে করাইয়া দেওয়া অপ্রাসঙ্গিক হইবে না।

১। ছক-কাগজের উপর বাম হইতে দক্ষিণে এবং উপর হইতে নীচে অক্ষরেখারূপে গৃহীত পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব সরলরেখা বিশেষ করিয়া পেন্সিলে আঁকিয়া দেখাইয়া দিতে হইবে। ইহাদের ছেদবিন্দু অর্থাৎ মূলবিন্দুতে O অক্ষর বসাইয়া, আড়া-আড়ি রেখাটির বামদিকে X' এবং দক্ষিণে X অক্ষর এবং খাড়া রেখাটির উপরে Y এবং নীচে Y' অক্ষর বসাও।

মনে রাখিবে, $X'OX$ রেখা x-অক্ষ অর্থাৎ ভুজাক্ষ, YOY' রেখা y-অক্ষ অর্থাৎ কোটি-অক্ষ ; O হইতে OX-এর দিকে (ডানদিকে) x-এর মান ধনাত্মক, OX'-এর দিকে উহা ঋণাত্মক, এবং OY-এর দিকে (উপরদিকে), y-এর মান ধনাত্মক এবং OY'-এর দিকে উহা ঋণাত্মক।

লেখ-অঙ্কনের সময় সর্বদাই অক্ষদ্বয় ও মূলবিন্দু নির্দিষ্টভাবে দেখাইয়া দেওয়া বিশেষ প্রয়োজন।

২। এক্ষণে উত্তর-পত্রে প্রদত্ত সমীকরণটি (একঘাত, দ্বিঘাত বা যাহাই হউক না কেন) লিখিয়া উহাতে x-এর সুবিধামত বিভিন্ন মান বসাইয়া তাহা হইতে y-র মান বাহির করিবে, কিংবা y-এর সুবিধামত বিভিন্ন মান বসাইয়া x-এর মান বাহির করিবে, যাহাতে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে **x এবং y এর যথাযথ মানের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক একটি তালিকা প্রস্তুত করিবে।** ঐরূপে প্রাপ্ত মান পূর্ণসংখ্যা না হইলে সাধারণতঃ আসন্ন এক বা দুই দশমিক পর্যন্ত লইয়া তালিকা ভুক্ত করিতে হয়।

৩। ইহার পর ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের কয়টি বাহু একক ধরিলে, তাহা বিশেষভাবে উল্লেখ করিবে। প্রদত্ত ছক-কাগজ ও তালিকার মানগুলি পর্যবেক্ষণ করিয়া উপযুক্ত একক নির্ণয় করিবে, যাহাতে লেখটি ছক-কাগজে উত্তমরূপে ধরে, অথচ অযথা ক্ষুদ্র না হয়।

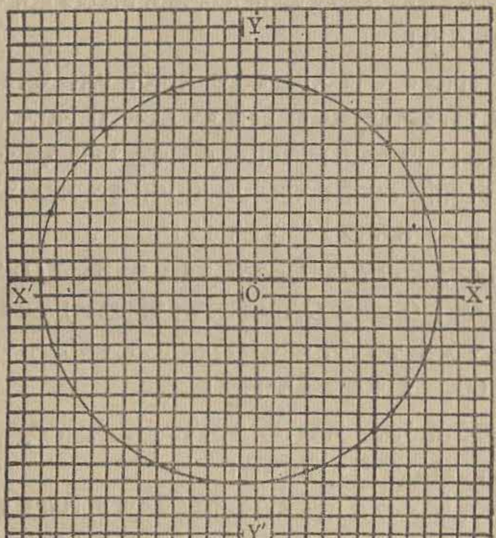
৪। এইবার x এবং y এর অনুরূপ মানগুলি ভুজ ও কোটি লইয়া উল্লিখিত একক অনুযায়ী* ছক-কাগজে তালিকার নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

ঐগুলি পেন্সিল দিয়া যোগ করিলেই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ হইল।

নিম্নে দ্বিঘাত-সমীকরণের কয়েকটি লেখ উদাহরণস্বরূপ প্রদত্ত হইল।

9·2. কয়েকটি বিশেষ দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ।

Ex. 1. *Graph of* $\mathbf{x^2+y^2=36}$.



প্রদত্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y এর যথাযথ কতকগুলি মানের তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

---

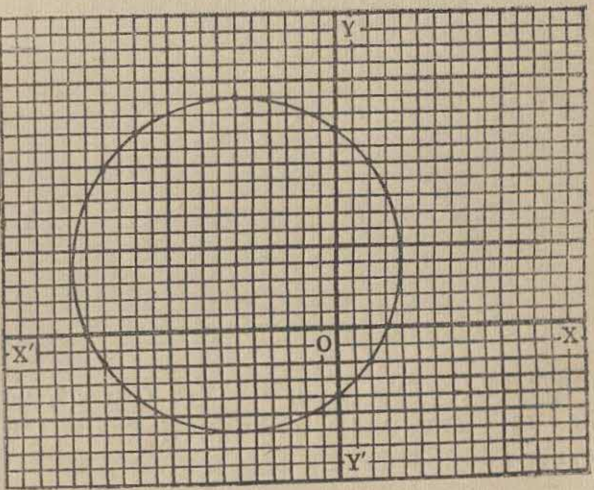
* বিন্দু-স্থাপনের সময় x বা y-এর দশমিক অংশের মান একক অনুযায়ী চোখের আন্দাজমত স্থির করিতে হইবে।

x	0	± 6	± 2	$\pm 5{\cdot}66$	± 4	$\pm 4{\cdot}47$
y	± 6	0	$\pm 5{\cdot}66$	± 2	$\pm 4{\cdot}47$	± 4

এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক লইয়া উপরের তালিকার বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল।

ইহাই নির্ণেয় লেখ। দেখা যাইতেছে যে, এই লেখ একটি বৃত্ত। ইহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ 6.

Ex. 2. *Graph of* $(x+3)^2+(y-2)^2=25$.



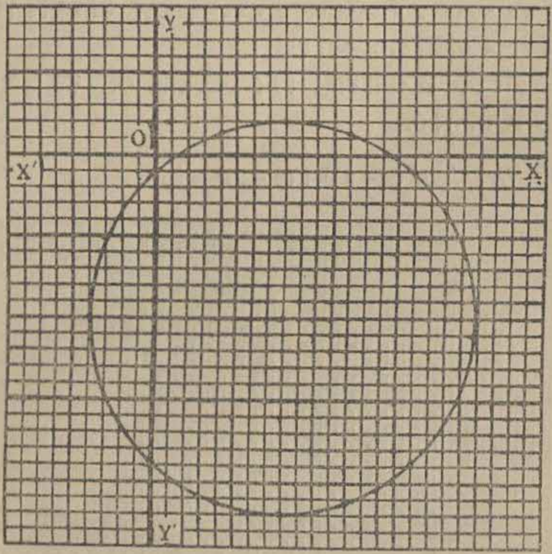
প্রদত্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

x	-3	2 or -8	1 or -7	0 or -6	$1{\cdot}58$ or $-7{\cdot}58$
y	7 or -3	2	5 or -1	6 or -2	0 or 4

এক্ষণে ছক-কাগজে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল।

ইহাই নির্ণেয় লেখ। দেখা যাইতেছে যে, এই লেখ একটি বৃত্ত, ইহার কেন্দ্র $(-3, 2)$ বিন্দুতে, এবং ব্যাসার্ধ 5.

Ex. 3. *Graph of* $\mathbf{x^2+y^2-8x+10y+5=0}$.

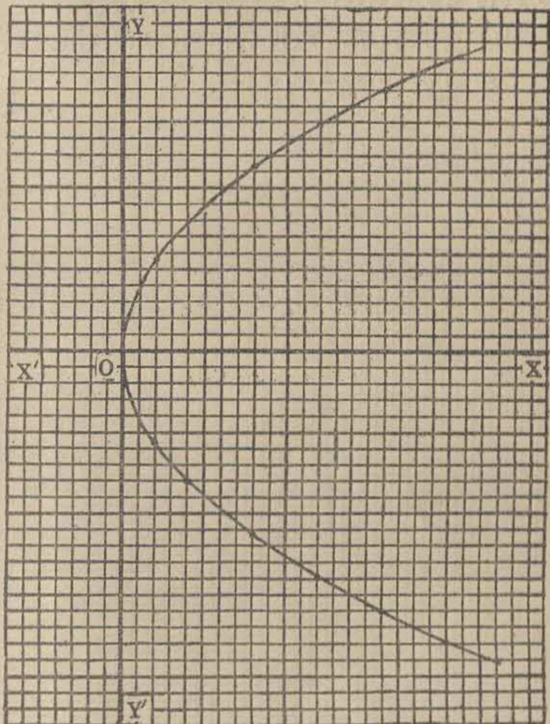


প্রদত্ত সমীকরণটি $(x-4)^2+(y+5)^2=36$ রূপে লেখা যায়, এবং ইহা হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

x	4	10 or −2	2	0	8	6
y	1 or −11	−5	·66 or −10·66	−·53 or −9·47	−·53 −9·47	·66 or −10·66

এক্ষণে ছক-কাগজে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। ইহাই নির্ণেয় লেখ। লেখ হইতে দেখা যায় যে, ইহা একটি বৃত্ত, ইহার কেন্দ্র $(4, -5)$ বিন্দুতে, এবং ব্যাসার্ধ 6.

Ex. 4. *Graph of* $\mathbf{y^2 = 8x}$.



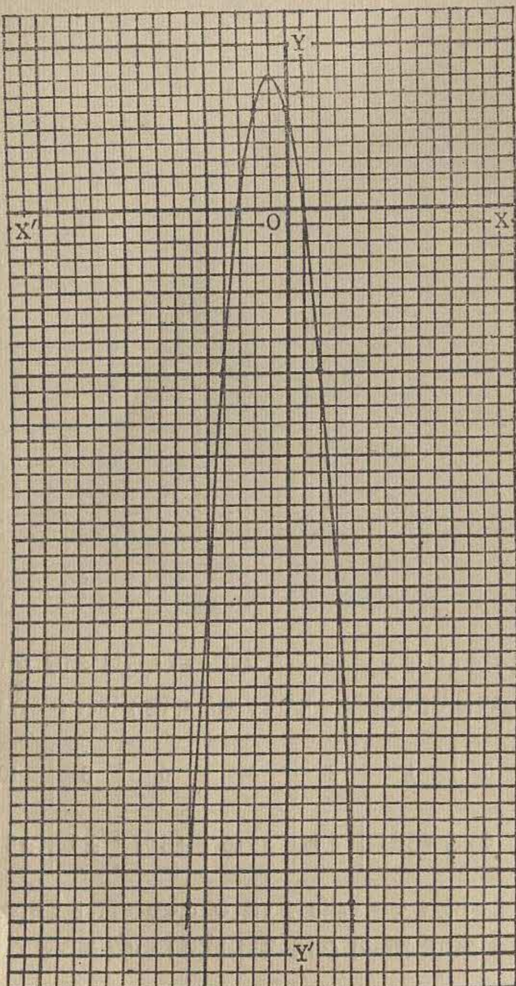
প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $y = \pm\sqrt{8x}$, এবং ইহা হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল :

x	0	1	2	4	6	8	10
y	0	±2·83	±4	±5·66	±6·93	±8	±8·94

এক্ষণে ছক-কাগজে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। এই অঙ্কিত রেখাই নির্ণেয় লেখ।

এই লেখটি একটি অধিবৃত্ত (Parabola)। মূলবিন্দু ইহার শীর্ষবিন্দু (vertex) এবং x-অক্ষ ইহার অক্ষ (axis)। এই অক্ষের দুইদিকে অধিবৃত্তটি প্রতিসম (symmetrical)। শীর্ষবিন্দুর বামে ইহার কোন অংশ নাই, দক্ষিণে ইহা অসীম।

Ex. 5. *Graph of* $\mathbf{y=3-4x-4x^2}$.



প্রদত্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

x	0	1	−1	2	−2	−3	·5	−·5	1·5	−1·5	−2·5
y	3	−5	3	−21	−5	−21	0	4	−12	0	−12

এক্ষণে ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। এই অঙ্কিত রেখাই নির্ণেয় লেখ। এটি একটি অধিবৃত্ত।

লেখ হইতে স্পষ্টতঃই প্রতীয়মান যে, y-এর **সর্বোচ্চ (maximum) মান** 4, এই মানের x-এর অনুরূপ মান $-·5$.

$(-·5, 4)$ বিন্দুটি এই অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং ইহার অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল ; শীর্ষবিন্দু হইতে নীচের দিকে।

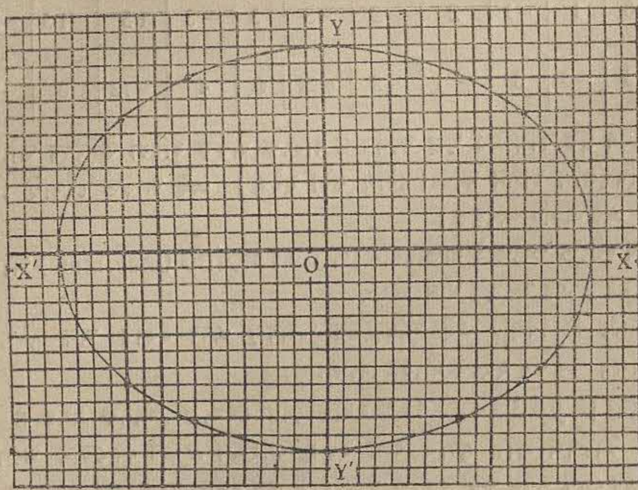
দ্রষ্টব্য। $y=3-4x-4x^2$ সমীকরণের লেখকে অনেক সময় $\mathbf{3-4x-4x^2}$ **রাশিমালার লেখ** বলা হয়। সেইরূপ x-এর যে-কোন অপেক্ষক '$f(x)$-এর লেখ অঙ্কন কর' বলিলে $y=f(x)$, এই সমীকরণের লেখ অঙ্কন করিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $7x-3$ এর লেখ অঙ্কন করিতে বলিলে $y=7x-3$ -এর লেখ অঙ্কন করিতে হইবে ; $\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ এর লেখ অঙ্কন করিতে বলিলে, $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, অর্থাৎ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ সমীকরণের লেখ আঁকিতে হইবে ; $\frac{4}{x}$ এর লেখ আঁকিতে বলিলে, $y=\frac{4}{x}$, অর্থাৎ $xy=4$ সমীকরণের লেখ অঙ্কন করিতে হইবে, ইত্যাদি।

Ex. 6. *Graph of* $\mathbf{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.}$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ বা, $x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$, এবং ইহা হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

x	0	±4	±2	±3
y	±3	0	±2·60	±1·98

এক্ষণে ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 4 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। এই অঙ্কিত রেখাই নির্ণেয় লেখ।



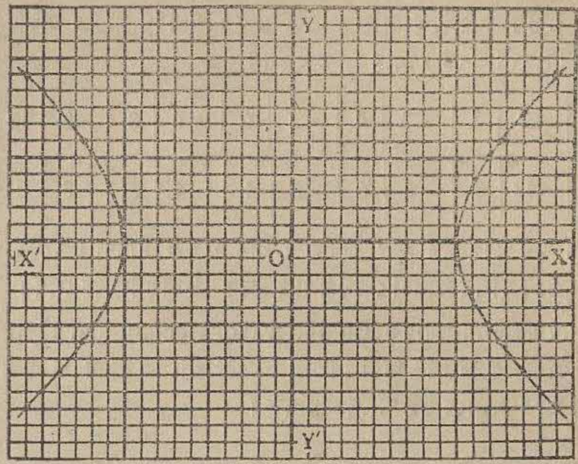
এই লেখ একটি উপবৃত্ত (Ellipse)। মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র (Centre)। ইহা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ দুই অক্ষেরই প্রতিসম। x-অক্ষ বরাবর ইহার ছিন্নাংশ 8 ইহার (major axis), এবং y-অক্ষ বরাবর ছিন্নাংশ 6 ইহার (minor axis)। লেখটি চতুর্দিকে সীমাবদ্ধ।

Ex. 7. *Graph of* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে দেওয়া হইল।

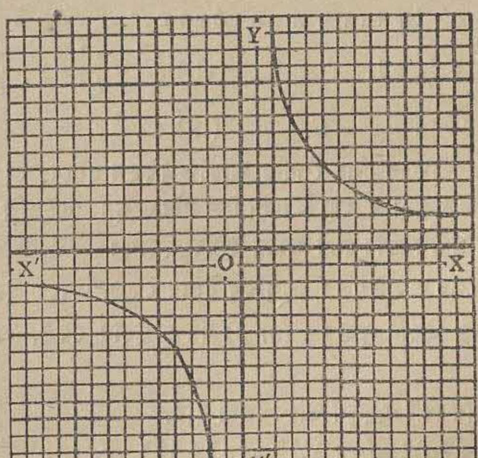
x	± 5	± 6	$\pm 6{\cdot}25$	± 7	± 8
y	0	$\pm 2{\cdot}65$	± 3	$\pm 3{\cdot}92$	$\pm 4{\cdot}99$

এক্ষণে ছক কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। ইহাই নির্ণেয় লেখ।



এই লেখ একটি পরাবৃত্ত (Hyperbola), মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র। লেখটি দুই অক্ষেরই প্রতিসম, এবং $x=5$ হইতে দক্ষিণে এবং $x=-5$ হইতে বামে দুইটি পৃথক্ অংশে বিভক্ত। মধ্যে ইহার কোন অংশ নাই।

Ex. 8. *Graph of* $\mathbf{xy=24}$.



প্রদত্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) নিম্নে প্রদত্ত হইল।

x	2	−2	3	−3	4	−4	6	−6	8	−8	12	−12
y	12	−12	8	−8	6	−6	4	−4	3	−3	2	−2

এক্ষণে ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহু একক ধরিয়া উপরের তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। ইহাই নির্ণেয় লেখ।

এই লেখ একটি সম-পরাবৃত্ত (Equilateral or Rectangular Hyperbola)। এটি লেখ-কাগজের অক্ষদ্বয় দ্বারা বিভক্ত চারিটি পাদের প্রথম ও তৃতীয় পাদে কোণাকুণি প্রতিসমভাবে দুই অংশে অবস্থিত।

9·3. বিশিষ্ট কয়েকটি দ্বিঘাত সমীকরণ-সম্বন্ধে জ্ঞাতব্য বিষয়।

পূর্ব অনুচ্ছেদে যে দ্বিঘাত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত হইয়াছে তাহাদের সাধারণ রূপ নিম্নে প্রদত্ত হইল :

(i) $x^2+y^2=a^2$. (ii) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$.

(iii) $x^2+y^2+ax+by+c=0$. (iv) $y^2=ax$; $x^2=ay$.

(v) $y=a+bx+cx^2$; $x=a+by+cy^2$.

(vi) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (vii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{y^2}{c^2}-\frac{x^2}{d^2}=1$.

(viii) $Ax^2+By^2=C$. (ix) $xy=c$.

এক্ষণে এই সমীকরণগুলির লেখ-র আকৃতি কিরূপ হইবে, তাহা পূর্ব-অঙ্কিত লেখগুলির সহিত তুলনা করিয়া আলোচিত হইতেছে। এইগুলি মনে রাখিলে ছাত্রদের এইরূপ সমীকরণের লেখ-অঙ্কনে সুবিধা হইবে।

(i) এই লেখ একটি বৃত্ত। মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র, এবং a ইহার ব্যাসার্ধ।

(ii) এটিও একটি বৃত্ত। (α, β) বিন্দু ইহার কেন্দ্র, এবং a ইহার ব্যাসার্ধ।

(iii) সমীকরণটি এইরূপ ভাবে লেখা যায়,

$$(x+\tfrac{1}{2}a)^2+(y+\tfrac{1}{2}b)^2=\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2-c,$$

অর্থাৎ, $\{x-(-\tfrac{1}{2}a)\}^2+\{y-(-\tfrac{1}{2}b)\}^2=\{\sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2+(\tfrac{1}{2}b)^2-c}\}^2$.

এক্ষণে (ii) সমীকরণের সহিত তুলনা করিলে দেখা যায় যে, এই সমীকরণের লেখও একটি বৃত্ত। ইহার কেন্দ্র বিন্দু $(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ এবং ইহার ব্যাসার্ধ $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{1}{2}b)^2-c}$.

(iv) $y^2=ax$ সমীকরণের লেখ একটি অধিবৃত্ত (Parabola), মূলবিন্দু ইহার শীর্ষবিন্দু (Vertex), এবং x-অক্ষ ইহার অক্ষ। অক্ষের উপরে ও নীচে ইহা প্রতিসম, এবং শীর্ষবিন্দু হইতে একদিকে (a ধনাত্মক হইলে, x-এর ধনাত্মক দিকে, a ঋণাত্মক হইলে x-এর ঋণাত্মক দিকে) বিস্তৃত। সেইরূপ, $x^2=ay$ সমীকরণের লেখ ও একটি অধিবৃত্ত, মূলবিন্দু ইহার শীর্ষবিন্দু এবং y-অক্ষ ইহার অক্ষ।

(v) $y=a+bx+cx^2$ সমীকরণের লেখটিও একটি অধিবৃত্ত। সমীকরণটিকে $c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2=y-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)$ রূপে লেখা যায়। ইহার শীর্ষবিন্দু $\left(-\frac{b}{2c},\ a-\frac{b^2}{4c}\right)$, এবং অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, c ধনাত্মক হইলে অক্ষ উপরদিকে, এবং ঋণাত্মক হইলে অক্ষ নীচের দিকে হইবে।

সেইরূপ $x=a+by+cy^2$ সমীকরণের লেখও অধিবৃত্ত, এবং ইহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

(vi) এই লেখ একটি উপবৃত্ত (ellipse), মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র, এবং ইহা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়েরই প্রতিসম।

(vii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-এর লেখ একটি পরাবৃত্ত (Hyperbola) এবং মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র। ইহা y-অক্ষের দুইদিকে বিচ্ছিন্নভাবে দুই অংশে অবস্থিত। x-অক্ষ ইহাকে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$ দুই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। লেখটি দুই অক্ষেরই প্রতিসম, $(a, 0)$ বিন্দু হইতে দক্ষিণে এবং $(-a, 0)$ হইতে বামে বিস্তৃত।

$\frac{y^2}{c^2}-\frac{x^2}{d^2}=1$ এর লেখও পরাবৃত্ত। ইহা y-অক্ষকে ছেদ করে, এবং x-অক্ষের উপরে ও নীচে বিচ্ছিন্ন দুই অংশে বিস্তৃত।

(viii) $Ax^2+By^2=C$ সমীকরণকে

$$\frac{x^2}{A/C}+\frac{y^2}{B/C}=1 \text{ রূপে লেখা যায়।}$$

এক্ষণে (vi) ও (vii) সমীকরণের সহিত তুলনা করিলে দেখা যায় যে, A/C ও B/C ধনাত্মক হইলে লেখটি একটি উপবৃত্ত, এবং A ও B বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে লেখটি পরাবৃত্ত হইবে।

(ix) এই লেখ একটি সম-পরাবৃত্ত। c ধনাত্মক হইলে ইহা প্রথম ও তৃতীয় পাদে কোণাকুণি ভাবে এবং c ঋণাত্মক হইলে দ্বিতীয় ও চতুর্থ পাদে কোণাকুণি ভাবে অবস্থিত হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, এই সকল বিশেষ আকারের সমীকরণগুলির লেখ-র আকার ছাত্রদের জানা থাকিলে লেখ-অঙ্কনের সময় অনেক সুবিধা হয়। কিন্তু মনে রাখা প্রয়োজন যে, কোন **লেখ অঙ্কন করিতে দিলে সর্বক্ষেত্রেই সমীকরণ হইতে x এবং y-এর যথাযথ মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করিয়া লেখ-কাগজে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি নির্দিষ্ট এককানুযায়ী স্থাপন করিয়া, এবং সেই বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখ অঙ্কন করিতে হইবে।** কোন ক্ষেত্রেই সমীকরণের আকার হইতে জানা থাকিলেও "এই লেখ একটি বৃত্ত, উহার কেন্দ্র (α, β) এবং ব্যাসার্ধ 'a'" বলিয়া বৃত্তটি আঁকিয়া দিলে চলিবে না। প্রকৃতপক্ষে উপরের আলোচনা হইতে এই বিশেষ সমীকরণগুলির লেখ সম্বন্ধে পূর্বজ্ঞান, ঐ লেখার তালিকা প্রস্তুত ও বিন্দুস্থাপনে সহায়তা করিবে, কিন্তু তালিকা প্রস্তুত ও বিন্দুস্থাপন না করিয়া কেবলমাত্র ঐ জ্ঞান হইতে লেখটি অঙ্কন করিলে হইবে না।

(iv) এবং (v)-জাতীয় সমীকরণের লেখ অঙ্কন করিবার সময় ন্যূনপক্ষে 7টি বিন্দু স্থাপন করিতে হইবে। অন্যান্য দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে অন্ততঃ 8টি বিন্দুস্থাপন বাঞ্ছনীয়।

9·4. লেখ-সাহায্যে সমীকরণ-সমাধান।

লেখ-র বহুবিধ প্রয়োগের মধ্যে ইহার সাহায্যে সমীকরণ-সমাধান অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। নিম্নে ইহার কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Solve graphically the equations* $x-2y+11=0$, $2x-3y+18=0$.

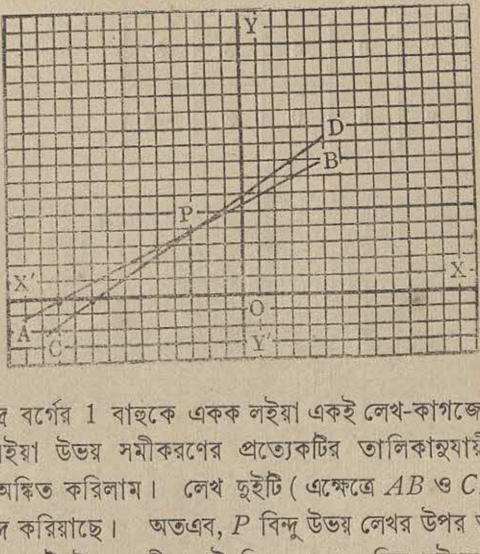
প্রথমে আমরা সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করিব।

(i) $x-2y+11=0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে পাই

x	-11	-5	-1	3
y	0	3	5	7

(ii) $2x-3y+18=0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে পাই

x	0	-9	-3	3
y	6	0	4	8



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহুকে একক লইয়া একই লেখ-কাগজে একই মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয় লইয়া উভয় সমীকরণের প্রত্যেকটির তালিকানুযায়ী বিন্দু স্থাপন করিয়া লেখ অঙ্কিত করিলাম। লেখ দুইটি (এক্ষেত্রে AB ও CD সরল রেখা) P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব, P বিন্দু উভয় লেখর উপর অবস্থিত বলিয়া ইহার ভুজ ও কোটি উভয় সমীকরণই সিদ্ধ করে। চিত্র হইতে দেখা যায় যে, P-এর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে -3 ও 4.

$\therefore\ x=-3,\ y=4$ সমীকরণদ্বয়ের নির্ণেয় সমাধান।

প্রকৃতপক্ষে, x এবং y-এর এই মান সমীকরণ দুইটিতে বসাইয়া সহজেই দেখা যায় যে, উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

Ex. 2. *Solve graphically* $3x-7=8-2x$.

এখানে আমরা প্রথমে

$$y=3x-7 \quad \cdots\cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $$y=8-2x \quad \cdots\cdots \quad \text{(ii)}$$

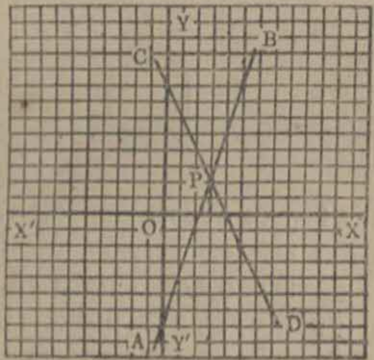
সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করি।

(i) হইতে,

x	0	2	4	5
y	-7	-1	5	8

এবং (ii) হইতে,

x	0	4	3	5
y	8	0	2	-2



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহুকে একক লইয়া একই লেখ-কাগজে প্রত্যেক তালিকানুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া লেখ দুইটি (যথাক্রমে AB ও CD সরল রেখা) অঙ্কন করিলাম। লেখ দুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিল। এই বিন্দুতে দুইটি লেখ-র y একই হওয়ায় এখানে $3x-7=8-2x$ হইবে। চিত্র হইতে P বিন্দুর $x=3$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ $x=3$.

Ex. 3. *Solve graphically the equations*

(i) $x^2+y^2=100$, (ii) $7y-x=50$.

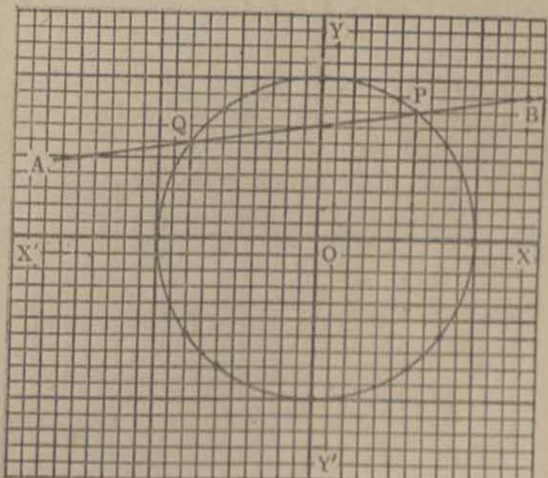
[*S. F. Addl.* 1956 (*Compl.*)]

(i) সমীকরণ হইতে,

x	± 10	0	± 6	± 8
y	0	± 10	± 8	± 6

(ii) সমীকরণ হইতে,

x	-1	6	13	-15
y	7	8	9	5



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহুকে একক ধরিয়া একই লেখ-কাগজে তালিকানুযায়ী বিন্দু স্থাপন করিয়া লেখ দুইটি অঙ্কন করিলাম। (i) সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত এবং (ii) সমীকরণের লেখ AB সরল রেখা। ঐ দুইটি লেখ P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই দুই বিন্দু উভয় লেখ-র উপরেই অবস্থিত বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দুই সমীকরণই সিদ্ধ করে। চিত্র হইতে P বিন্দুর $x=6$, $y=8$ এবং Q বিন্দুর $x=-8$, $y=6$.

∴ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

$$x=6,\ y=8 \text{ এবং } x=-8,\ y=6.$$

Ex. 4. *Solve graphically the equations*

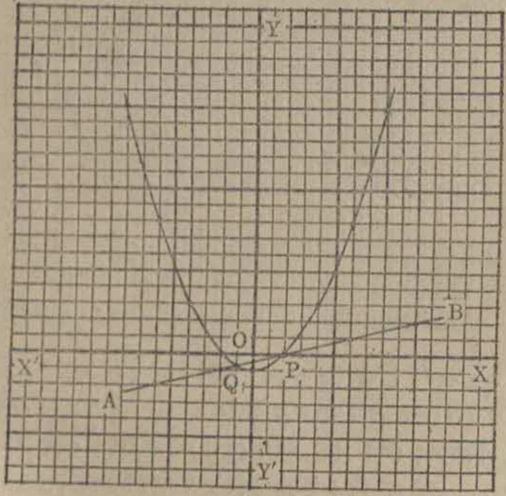
$$\text{(i) } x^2=4(y+1), \quad \text{(ii) } x-4y=2.$$

(i) সমীকরণ হইতে,

x	0	±2	±4	±6	±8
y	−1	0	3	8	15

(ii) সমীকরণ হইতে,

x	−2	6	−6	10
y	−1	1	−2	2



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহুকে একক ধরিয়া একই লেখ-কাগজে তালিকানুযায়ী বিন্দু স্থাপন করিয়া (i) ও (ii) সমীকরণের লেখ দুইটি অঙ্কন করিলাম।

(i) সমীকরণের লেখ একটি অধিবৃত্ত এবং (ii) সমীকরণের লেখ AB সরল রেখা। ঐ দুইটি লেখ P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বিন্দু দুইটি উভয় লেখ-র উপরই অবস্থিত বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দুই সমীকরণই সিদ্ধ করে। চিত্র হইতে P-এর $x=2, y=0$ এবং Q-এর $x=-1, y=-\cdot 75$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

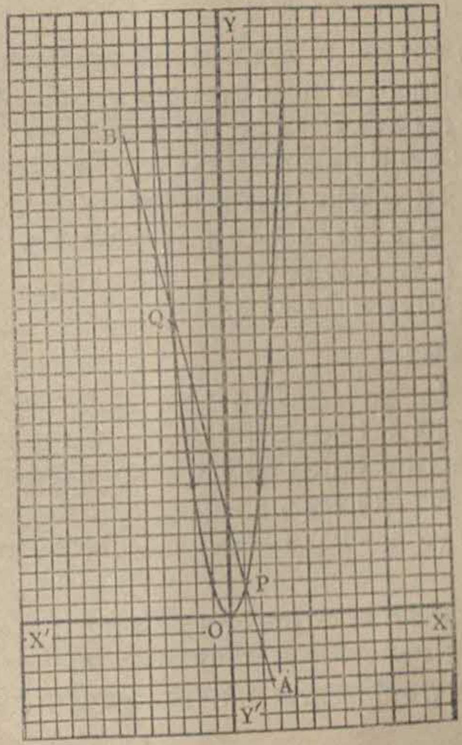
$$x=2,\ y=0 \quad \text{এবং} \quad x=-1,\ y=-\cdot 75.$$

Ex. 5. *Solve graphically the equation*

$$3-4x-4x^2=0.$$ [*S. F. Addl. 1956*]

এখানে আমরা প্রথমে

(i) $y=4x^2$ এবং (ii) $y=3-4x$.



সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করি।

(i) হইতে,

x	0	$\pm\cdot5$	±1	$\pm1\cdot5$	±2
y	0	1	4	9	16

(ii) হইতে,

x	0	1	-1	-2
y	3	-1	7	11

এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক লইয়া একই লেখ কাগজে তালিকানুযায়ী বিন্দু স্থাপন করিয়া (i) ও (ii) সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটি অঙ্কন করিলাম। (i) সমীকরণের লেখ একটি অধিবৃত্ত এবং (ii) সমীকরণের লেখ AB সরল রেখা। ঐ দুইটি লেখ P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বিন্দু দুইটি উভয় লেখ-র উপরই অবস্থিত বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দুই সমীকরণই সিদ্ধ করে। $\therefore$ ঐ দুই বিন্দুতে $4x^2=3-4x$ বা $3-4x-4x^2=0$ সিদ্ধ হইবে। চিত্র হইতে (গৃহীত এককানুযায়ী) P এবং Q-এর ভুজ যথাক্রমে $\cdot5$ বা $-1\cdot5$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ $x=\cdot5,\ -1\cdot5$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

আমরা $y=3-4x-4x^2$ সমীকরণের তালিকা-নিয়মানুযায়ী প্রস্তুত করিয়া নির্দিষ্ট এককানুসারে লেখ অঙ্কন করিতে পারি। ঐ লেখ যেখানে যেখানে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে, সেখানের $y=0$ বলিয়া $3-4x-4x^2=0$ সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। ঐরূপ দুইটি বিন্দু পাওয়া যাইবে, এবং লেখ হইতে ঐ দুই বিন্দুর ভুজ x-এর মান ($\cdot5$ ও $-1\cdot5$) $3-4x-4x^2=0$, অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ হইবে।

দ্রষ্টব্য। এইরূপ প্রশ্নের সমাধানে বিকল্প পদ্ধতি অপেক্ষা প্রথম পদ্ধতি সহজ, কারণ, ঐ ক্ষেত্রে লেখ দুইটি অঙ্কন অপেক্ষাকৃত সহজ। **একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত-সমীকরণের সমাধান, এইরূপে লেখ-সাহায্যে করা যায়।**

Ex. 6. *Solve graphically the equations*

(i) $xy=4$, (ii) $y=x+3$.

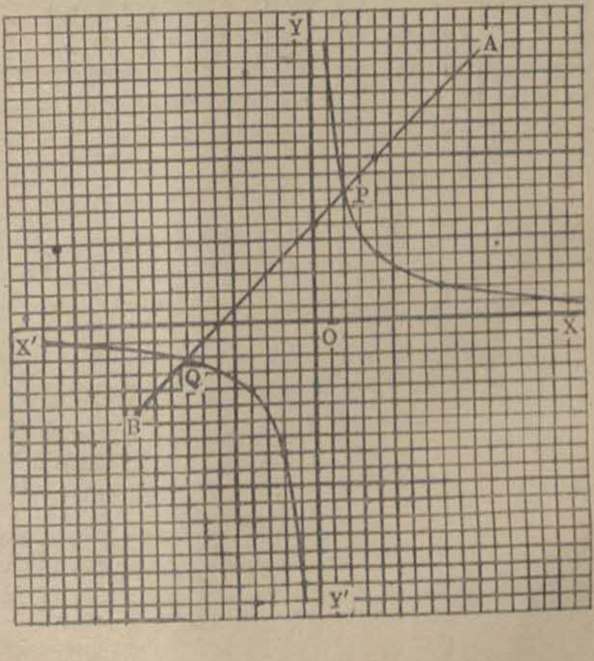
[*S. F. Addl. 1962*]

(i) সমীকরণ হইতে,

x	1	2	4	8	·5	−1	−2	−4	−8	−·5
y	4	2	1	·5	8	−4	−2	−1	−·5	−8

(ii) সমীকরণ হইতে,

x	0	2	4	−3
y	3	5	7	0



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া একই লেখ-কাগজে তালিকানুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া লেখ দুইটি অঙ্কন করিলাম। (i) সমীকরণের লেখ একটি সমপরাবৃত্ত এবং (ii) সমীকরণের লেখ AB সরল রেখা। ঐ দুইটি লেখ P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই দুই বিন্দু উভয় লেখ-র উপরেই অবস্থিত বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দুই সমীকরণই সিদ্ধ করে। লেখ-চিত্র হইতে P বিন্দুর $x=1, y= =4$ এবং Q বিন্দুর $x=-4, y=-1$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

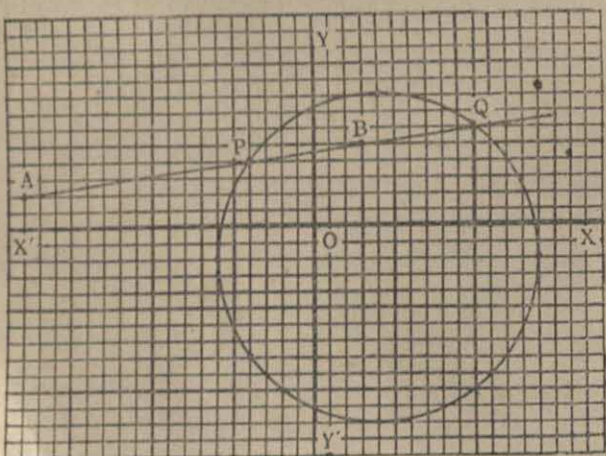
$$x=1,\ y=4 \quad \text{এবং} \quad x=-4,\ y=-1.$$

9·5. লেখ-বিষয়ে কয়েকটি অতিরিক্ত প্রশ্ন।

Ex. 1. *Draw the graph of* $x^2+y^2-4x+2y-20=0$, *and find out the co-ordinates of its points of intersection with the line joining the points* $(-9, 1)$ *and* $(1·5, 2·5)$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

x	2	7 or −3	6	−2	5	−1
y	4 or −6	−1	2 or −4	2 or −4	3 or −5	3 or −5



ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু একক ধরিয়া লেখ-কাগজে তালিকা-নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া এবং যোগ করিয়া লেখটি একটি বৃত্ত পাওয়া গেল।

এক্ষণে ঐ লেখ-কাগজে $A(-9, 1)$ এবং $B(1{\cdot}5, 2{\cdot}5)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া যোগ করিলাম।

দেখা যাইতেছে যে, AB সরল রেখা উপরের লেখটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। চিত্র হইতে (নির্দিষ্ট একক অনুযায়ী) P এর $x=-2$, $y=2$ এবং Q এর $x=5$, $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুদ্বয় $(-2, 2)$ এবং $(5, 3)$.

দ্রষ্টব্য। প্রদত্ত সমীকরণটি $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ রূপে লেখা যায়। এই আকার হইতে x এবং y এর অনুরূপ মানের তালিকা প্রস্তুত করা সহজ। এটি একটি বৃত্ত, ইহার কেন্দ্রবিন্দু $(2, -1)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 জানা থাকায় [§ 9·3 দেখ] তালিকার বিন্দুগুলি ঠিক ইহার উপর অবস্থিত হইতেছে কিনা দেখিয়া তালিকায় বা বিন্দুস্থাপনে কোন ভুল থাকিলে তাহা সহজেই ধরা যায়।

Ex. 2. *Draw the graphs* (i) $x^2+y^2=36$ *and* (ii) $2x+y=10$, *and measure the length of the chord of intersection.*

[*S. F. Addl. 1961 (Compl.)*]

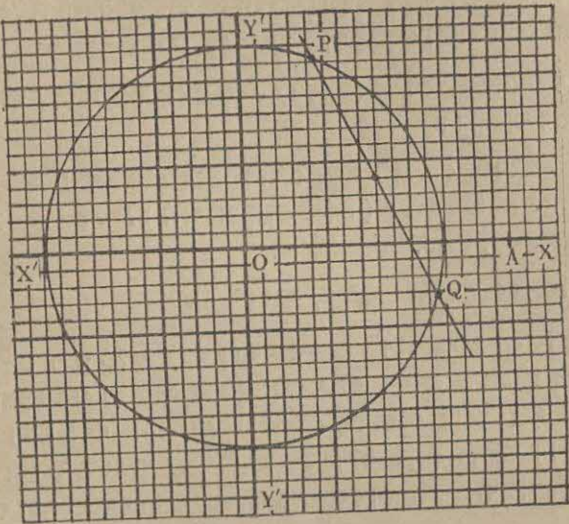
(i) সমীকরণ হইতে,

x	± 6	0	± 4	± 2
y	0	± 6	$\pm 4{\cdot}47$	$\pm 5{\cdot}66$

(ii) সমীকরণ হইতে,

x	4	3	6	5
y	2	4	-2	0

এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু একক লইয়া একই লেখ-কাগজে প্রত্যেক তালিকানুযায়ী বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া (i) এবং (ii) সমীকরণের লেখ দুইটি অঙ্কন



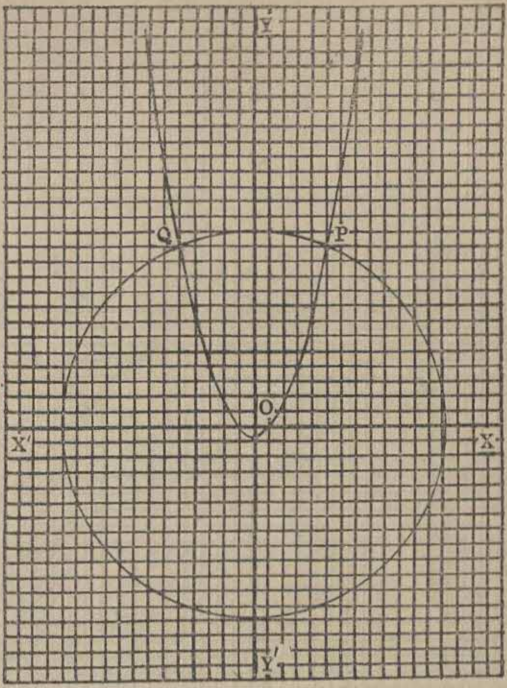
করিলাম। লেখ দুইটি যথাক্রমে একটি বৃত্ত ও একটি সরল রেখা। উহারা P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া কম্পাসের সাহায্যে ভুজাক্ষ OX হইতে OA অংশ কাটিয়া লইয়া লেখ-কাগজে দেখিতেছি ঐ দৈর্ঘ্য 8 একক। $\therefore$ নির্ণেয় ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য $= 8$.

Ex. 3. *Draw the graph* $2y = x^2 - 1$. *Find from your graph, the co-ordinates of the points distant* 13 *from the origin.* [*S. F. Addl.* 1961]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

x	± 1	0	± 3	± 5	± 7
y	0	$-\cdot 5$	4	12	24

ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহু একক লইয়া লেখ-কাগজে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া ও যোগ করিয়া লেখটি অঙ্কন করিলাম। এক্ষণে মূলবিন্দু O-কে কেন্দ্র করিয়া 13 একক ব্যাসার্ধ লইয়া লেখ-কাগজে একটি বৃত্ত অঙ্কিত লেখকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। কাজেই লেখ-র উপর এই দুই বিন্দুর মূলবিন্দু হইতে



দূরত্ব 13. চিত্র হইতে P এর স্থানাঙ্ক $x=5,\ y=12$ এবং Q এর স্থানাঙ্ক $x=-5,\ y=12.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু দুইটি (5, 12) এবং (–5, 12).

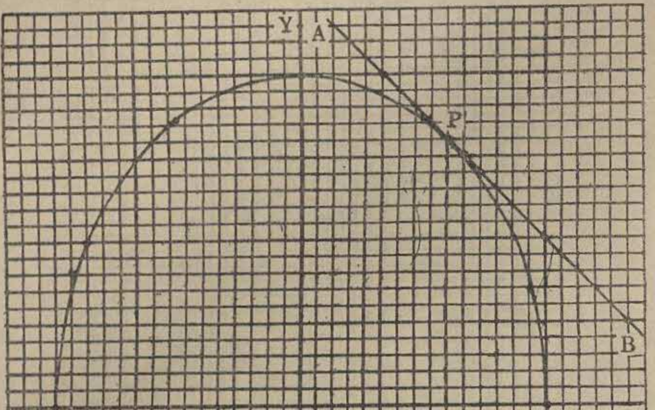
Ex. 4. *Draw the graphs of* (i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ *and* (ii) $x+y=5$, *with the same axes of co-ordinates and same scale, and note that* (ii) *touches* (i). *Find from your graph the co-ordinates of the point of contact.* [*S. F. Addl. 1959*]

(i) সমীকরণ হইতে,

x	± 3	0	$\pm 1\cdot5$	$\pm 2\cdot60$
y	0	± 4	$\pm 3\cdot46$	± 2

(ii) সমীকরণ হইতে

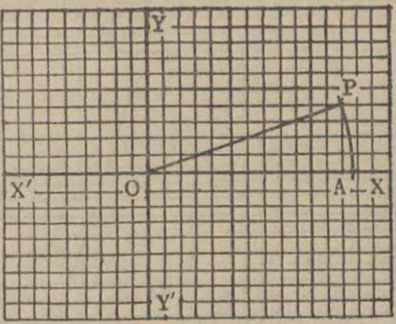
x	1	2	3	4
y	4	3	2	1



এক্ষণে ক্ষুদ্র বর্গের 5 বাহুকে একক ধরিয়া একই লেখ-কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া লেখ তুইটি অঙ্কন করিলাম। (i) সমীকরণের লেখ একটি উপবৃত্ত

ও (ii) সমীকরণের লেখ AB সরল রেখা। চিত্র হইতে দেখা যায় যে, AB সরল রেখা (i) লেখটিকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। লেখ হইতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (নির্দিষ্ট এককানুযায়ী), $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{16}{5}$.

Ex. 5. *Show how you would use graph paper to find* $\sqrt{40}$



লেখ-কাগজে সুবিধামত মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয় লইয়া, ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু একক ধরিয়া (6, 2) বিন্দুটি স্থাপন করিলাম। মনে করি, বিন্দুটি P এবং PN ইহার কোটি। তাহা হইলে $ON=6$, $NP=2$.

$\therefore$ ONP সমকোণী ত্রিভুজ হইতে $OP^2=ON^2+NP^2=6^2+2^2=40$.
$\therefore$ $OP=\sqrt{40}$. এক্ষণে O-কে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া ভুজাক্ষ OX হইতে OA অংশ কাটিয়া লইলাম। তাহা হইলে $OA=\sqrt{40}$. চিত্র হইতে দেখা যায় গৃহীত এককানুযায়ী $OA=6{\cdot}3$ প্রায়।

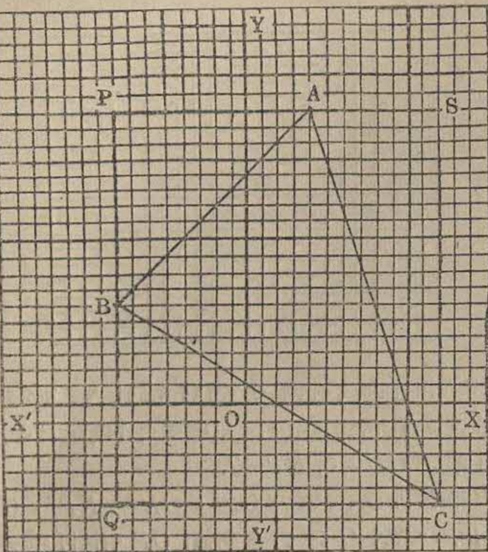
$\therefore$ $\sqrt{40}=6{\cdot}3$ (আসন্ন মান)।

বিকল্প পদ্ধতি :

§ 9·4, Ex. 4-এ $x^2=4(y+1)$ সমীকরণের লেখ অঙ্কিত হইয়াছে। ঐ সমীকরণে $y=9$ বসাইলে, $x^2=4(9+1)=40$, অর্থাৎ $x=\sqrt{40}$ হয়। কাজেই ঐ লেখ-র উপর যে বিন্দুর $y=9$, সেই বিন্দুর ভুজ $x=\sqrt{40}$ হইবে। চিত্র হইতে ঐ x প্রায় 6·3 দেখা যায়।

ঐরূপে $y^2=4x$ কিংবা $y^2=8x$ [§ 9·2, Ex. 4.] লেখ আঁকিয়াও যথাক্রমে উহার যে বিন্দুর $x=10$ বা $x=5$, চিত্র হইতে তাহার y-এর মান, দেখিলে $\sqrt{40}$-এর মান পাওয়া যাইবে।

Ex. 6. *The co-ordinates of the vertices A, B, C of a triangle are respectively* (2, 9), (−4, 3) *and* (6, −3). *Find graphically the area of the triangle ABC.*



লেখ-কাগজে উপযুক্ত অক্ষদ্বয় লইয়া ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু একক ধরিয়া $A(2, 9)$, $B(-4, 3)$ ও $C(6, -3)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করিলাম এবং AB, AC, BC যোগ করিলাম। দেখা যাইতেছে যে, C-র ভুজ বৃহত্তম ও B-র ভুজ ক্ষুদ্রতম। এই দুই বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরল রেখা টানিলাম। অনুরূপে, A-র কোটি বৃহত্তম ও C-র কোটি ক্ষুদ্রতম, এই দুই বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরল রেখা টানিলাম। অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল এই চারিটি রেখা পরস্পর ছেদ করিয়া $PQCS$ আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিল।

এক্ষণে চিত্র হইতে,

$\triangle ABC =$ আয়তক্ষেত্র $PQCS - (\triangle PBA + \triangle BQC + \triangle ACS)$.

আবার চিত্র হইতে দেখা যায় (গৃহীত এককানুযায়ী)

$PQ = 12, PS = 10.$ $\therefore$ আয়তক্ষেত্র $PQCS = PQ \times PS$
$= 12 \times 10 = 120.$

$PA = 6,\ BP = 6.$ $\therefore$ $\triangle PBA = \frac{1}{2} PA \times BP = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18.$

$QB = 6,\ QC = 10.$ $\therefore$ $\triangle BQC = \frac{1}{2} QB.\ QC = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30.$

$AS = 4,\ CS = 12.$ $\therefore$ $\triangle ACS = \frac{1}{2} AS.\ CS = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24.$

$\therefore$ $\triangle ABC = 120 - (18 + 30 + 24) = 48.$

অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 48 বর্গ-একক।

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের বাহু তিনটির সমীকরণ দেওয়া থাকিলে, লেখ-কাগজে উপযুক্ত একক লইয়া ঐ সমীকরণগুলির লেখ, সরল রেখাত্রয় অঙ্কন করিলে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সহজেই পাওয়া যায়, এবং পূর্বের ন্যায় ইহার ক্ষেত্রফল লেখ হইতে নির্ণয় করা যায়। প্রয়োজন হইলে তিনটি শীর্ষবিন্দুর মধ্য দিয়াই অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা টানিতে হইতে পারে।

কোন চতুর্ভুজ বা বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলেও অনুরূপে লেখ-কাগজের সাহায্যে আয়তক্ষেত্র এবং ত্রিভুজে বিশ্লেষণ করিয়া ঐ চতুর্ভুজ বা বহুভুজের ক্ষেত্রফল সহজেই নির্ণয় করা যায়।

Examples IX(a)

Draw the graphs of :

1. (i) $x^2 + y^2 = 25.$ (ii) $x^2 + y^2 = 40.$ (iii) $x^2 + y^2 = 74.$

2. (i) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 49.$ (ii) $(x+6)^2 + (y-4)^2 = 81.$

(iii) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36.$ (iv) $(x+5)^2 + (y+4)^2 = 41.$

3. (i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0.$

(ii) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$

[*S. F. Addl. 1954, Compl.*]

(iii) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 9 = 0.$

(iv) $9x^2 + 9y^2 - 18x - 18y - 7 = 0.$

[*Divide throughout by 9. Take 3 sides of a small square as*

r graph

ht line

4. (i) $y^2=2x$. (ii) $y=4x^2$. (iii) $x^2+3y=0$.
(iv) $3y^2-2x=0$.

5. (i) $y=x^2-2x-3$. [*S. F. Addl. 1963*]
(ii) $y=3x^2-10x+3$. (iii) $y=3-4x-2x^2$.
(iv) $x=y^2-4y+7$. (v) $y=2x+\frac{x^2}{4}$.

6. (i) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$. (ii) $4x^2+9y^2=324$.
(iii) $x^2+16y^2=16$. (iv) $9x^2+4y^2=1$.
[*Take 30 sides of a small square as unit.*]

7. (i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. (ii) $x^2-16y^2=16$.
(iii) $x^2-y^2=1$. (iv) $y^2-9x^2=9$.
(v) $2y^2-3x^2=1$.

8. (i) $xy=40$. (ii) $y=\frac{18}{x}$. (iii) $x=\frac{36}{y}$.
(iv) $4xy=3$.

9. Draw the graphs of the expressions :
(i) $2x^2-9x-5$. (ii) $3+x-5x^2$. (iii) $12x-4x^2$.
(iv) $\frac{15}{x}$. (v) $\sqrt{25-x^2}$. (vi) $3\sqrt{16-x^2}$.
(vii) $\frac{4}{5}\sqrt{x^2+9}$.

10. Solve graphically the equations :
(i) $3x-y-4=0$, and $7x+5y=2$.
(ii) $y=x+2$, and $3x-2y=5$.
(iii) $x+2y=3=4x-y$. (iv) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ and $9x-5y=7$.

এক্ষণে Solve graphically :
△ (i) $\frac{4x-5}{6}=\frac{7x-8}{9}$. (ii) $3x-4=\frac{2-7x}{5}$.

12. Solve graphically the equations :

(i) $x^2+y^2=100$ and $x+y=14$.

(ii) $x^2+y^2=65$ and $x-y=0$.

(iii) $x^2+y^2=25$ and $3x+4y=7$.

(iv) $x+y=8$ and $xy=15$.

(v) $x+y=5$ and $xy=-24$.

(vi) $y^2=x$ and $x=2y$.

(vii) $y=x^2$ and $2y-5x+3=0$.

[*Take 4 sides of a small square as unit.*]

(viii) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ and $4x-5y=4$.

(ix) $x^2-y^2=9$ and $x+y=1$.

13. Solve graphically :

(i) $x^2-x-2=0$.
(ii) $2x^2-9x-5=0$.
(iii) $x^2-2x-15=0$.
(iv) $3x^2-10x+3=0$.

[*Take 3 sides of a small square as unit ; 1954 Addl.*]

14. (i) Solve graphically the equation $6x-x^2-5=0$, by drawing the graphs of $y=x^2$, and $6x-y=5$. [*1959 Addl.*]

(ii) Solve graphically the equation $3-4x-4x^2=0$, by drawing the graphs of $y=4x^2$, and $4x+y=3$. [*1956 Addl.*]

(iii) Solve graphically the equation $3-4x-2x^2=0$ by drawing the graphs of $y=2x^2$, and $4x+y=3$. [*1952 Addl.*]

15. (i) Draw the graph of $y=2x^2$, and from your graph determine the co-ordinates of the points where the straight line joining the points (1, 0) and (0, 1) intersects it.

[*1960 Addl. (1958 Syl.)*]

(ii) Draw the graph of $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, and from your graph obtain the co-ordinates of the points whe· ... ·ght line joining the points $(-4, 12)$ and $(-4, -8)$ *unit.*]

16. (i) Draw the graphs of $x^2+y^2=25$, and $3x+4y=25$, (with the same axes and the same scale of representation) and find the co-ordinates of the points common to the two graphs. [*1953 Addl.*]

(ii) Draw the graphs of $y^2=8x$ and $y=2x+1$ with the same axes and scale of representation, and indicate their common points if any. [*1950 Addl.*]

17. (i) Draw the graph of $xy=24$, plotting at least 8 points. Show that the straight line joining the points (0, 12) and (8, 0) touches your graph, and find from your graph, the co-ordinates of the point of contact. [*1960 Addl.*]

(ii) With the same axes of co-ordinates and same unit draw the graphs of (i) $y^2=2x$, and (ii) $2(y-x)=1$, and show that the second graph touches the first. Indicate the point of contact and write down its co-ordinates. [*1957 Addl.*]

18. With the same axes and same unit, draw the graphs of $y=3-4x^2$ and $8x+y=7$, and determine from your graphs the common points if any.

19. Draw the graph of $y^2=9x$, and write down the co-ordinates of the points on your graph which are distant 20 units from the origin.

20. (i) With the same axes of co-ordinates and same unit draw the graphs of $4y=x^2$ and $2y=x+4$, plotting at least 7 points of the first and 3 points of the second. Determine from your graph the approximate length of the chord of intersection. [*1958 Addl.*]

(ii) With the same axes of co-ordinates and same unit draw the graphs of $x^2+y^2+2x-4y=20$ and $3y=2+x$. Determine from your graph the approximate length of the chord of intersection.

21. (i) Draw the graph of $y=x^2-4x+7$, plotting at least 8 points. From your graph write down the value of x where y is least. [1960 *Addl.*]

(ii) Draw the graph of $y = x^2 + 2x + 5$ in the range $x = -4$ to $x = 2$, and from your graph obtain the least value of $x^2 + 2x + 5$. [*1959 Addl. (1958 Syllabus)*]

22. Draw the graph of $y = 7 + 12x - 4x^2$ plotting at least 9 points. From your graph determine the maximum value of y, and the value of x which makes y maximum.

23. Find graphically (i) the maximum value of $5 - 3x - \frac{1}{4}x^2$ and (ii) the minimum value of $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$.

24. Find graphically :

(i) The area of the triangle, the co-ordinates of whose angular points are $(3, -4)$, $(7, 5)$ and $(-1, 10)$.

(ii) The area of the quadrilateral whose angular points have co-ordinates $(2, 8)$, $(0, -7)$, $(8, -6)$ and $(6, 11)$.

(iii) The area of the triangle formed by the intersection of the lines $2x + y + 5 = 0$, $x + 3y = 0$ and $3x + 4y = 15$.

25. Draw the graphs of :

(i) $y = 1 + \frac{1}{x}$. (ii) $y = \frac{15 - x^2}{x}$. (iii) $y^2 = x^2 - 5x + 4$.

ANSWERS

10. (i) $x = 1, y = -1$. (ii) $x = 9, y = 11$. (iii) $x = 1, y = 1$.
(iv) $x = 3, y = 4$. **11.** (i) $x = \frac{1}{2}$. (ii) $x = 1$.

12. (i) $\left.\begin{matrix} x=8 \\ y=6 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=6 \\ y=8 \end{matrix}\right\}$. (ii) $x = y = \pm 5{\cdot}7$ (approx.)

(iii) $\left.\begin{matrix} x=-3 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=4{\cdot}7 \\ y=-1{\cdot}8 \end{matrix}\right\}$ (approx.)

(iv) $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=5 \end{matrix}\right\}$. (v) $\left.\begin{matrix} x=8 \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=-3 \\ y=8 \end{matrix}\right\}$.

(vi) $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$. (vii) $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=1{\cdot}5 \\ y=2{\cdot}25 \end{matrix}\right\}$.

(viii) $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=2{\cdot}4 \end{matrix}\right\}$ or, $\left.\begin{matrix} x=-3 \\ y=-3{\cdot}2 \end{matrix}\right\}$. (ix) $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=-4 \end{matrix}\right\}$.

13. (i) $x = 2$ or, -1. (ii) $x = 5$ or, $-{\cdot}5$. (iii) $x = 5$ or, -3.
(iv) $x = 3$ or, $\frac{1}{3}$.

14. (i) $x=1$ or, 5. (ii) $x=\cdot5$ or, $-1\cdot5$.
(iii) $x=\cdot6$ or, $-2\cdot6$ (approx.).
15. (i) $(-1, 2)$ and $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (ii) $(-4, 1\cdot8)$ and $(-4, -1\cdot8)$.
16. (i) $(3, 4)$. (ii) $(\frac{1}{2}, 2)$. **17.** (i) $(4, 6)$. (ii) $(\frac{1}{2}, 1)$.
18. $(1, -1)$. **19.** $(16, 12)$ and $(16, -12)$.
20. (i) 6·7 units (approx.) (ii) 9·8 units (approx.)
21. (i) 2. (ii) 4. **22.** 16; $1\frac{1}{2}$.
23. (i) 14. (ii) -9. **24.** 46 sq. units (ii) 96 sq. units.
(iii) 40 sq. units.

9·6. লেখ-সাহায্যে বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

Ex. 1. *If the price of 3 seers of salt be $7\frac{1}{2}$ as., draw a graph to show the price chart of salt, and from your graph find the price of 7 seers of salt, and also determine how much salt is avaitable for Re. 1. 4as.* [*1961 Addl. (1958 Syllabus)*]

মনে কর, x সের লবণের মূল্য y আনা।

প্রদত্ত শর্তানুসারে 3 সের লবণের মূল্য $7\frac{1}{2}$ আনা।

$\therefore$ x সেরের মূল্য $\frac{x \times 7\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{2}x$ আনা।

$\therefore$ $y = \frac{5}{2}x$, এবং ইহাই উদ্দিষ্ট **মূল্য-লেখ (price-graph)** এর সমীকরণ।

এখানে x ওজন (সেরে), এবং y মূল্য (আনায়) নির্দেশ করিতেছে।

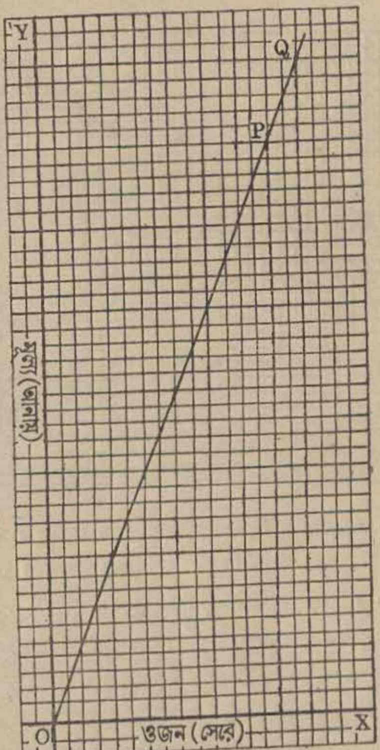
এই সমীকরণ হইতে x এবং y এর অনুরূপ মানের একটি তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হইল

x	2	4	6	8
y	5	10	15	20

এক্ষণে লেখ-কাগজে x অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে 1 সের ওজন, এবং y-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে 1 আনা মূল্য ধরা হইল।

এই লেখ-কাগজে গৃহীত এককানুযায়ী উপরের তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করিলে লেখটি উদ্দিষ্ট মূল্য-লেখ হইল। ইহার যে-কোন

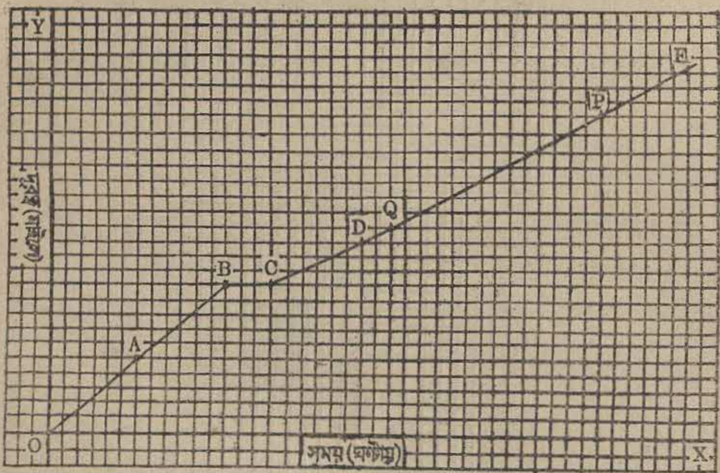
বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে লবণের ওজন (সেরে) এবং ইহার মূল্য (আনায়) নির্দেশ করিবে।



লেখ হইতে এককানুযায়ী দেখা যায় যে, যে বিন্দু P-এর $x=7$ তাহার $y=17\frac{1}{2}$, এবং যে বিন্দু Q-এর $y=20$ (Re. 1-4 as. = 20 as.), তাহার $x=8$. অতএব, 7 সের লবণের মূল্য $17\frac{1}{2}$ আনা = 1 টাকা $1\frac{1}{2}$ আনা এবং 20 আনায় (Re. 1-4as.) 8 সের লবণ পাওয়া যায়।

Ex. 2. *A man runs uniformly at the rate of 5 miles per hour for 2 hours, and then takes rest for half an hour. He then walks at a uniform rate of 3 miles per hour. Draw his*

motion-graph, and from your graph find (i) how far he will be from the starting point after 6 *hours* 10 *min. (ii) at what time from start he will cover a distance of* 14 *miles.*



মনে কর, লেখ-কাগজে x-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 6 বাহু 1 ঘণ্টা (অর্থাৎ 1 বাহু = 10 মিনিট) সূচিত করে, এবং y-অক্ষের উপর 1 বাহু 1 মাইল সূচিত করে। মূলবিন্দু O যাত্রার আদিবিন্দু, এবং তখন হইতে সময় আরম্ভ। তাহা হইলে লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ, আরম্ভ হইতে সময় নির্দেশ করে, এবং ঐ বিন্দুর কোটি, ঐ সময়ে লোকটি কত মাইল পথ অতিক্রম করিয়াছে তাহা নির্দেশ করে।

প্রারম্ভে লোকটি প্রতি 1 ঘণ্টায় 5 মাইল যায়। যদি লেখ-র উপর A বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে (1, 5) হয়, তাহা হইলে A বিন্দু লোকটির 1 ঘণ্টা পর অবস্থান সূচিত করিবে। OA রেখা যোগ করিয়া বর্ধিত করি। যেহেতু লোকটি সমবেগে গতিশীল, অতএব, OA সরলরেখা প্রথম দিকে তাহার গতি-লেখ নির্ণয় করে। OA-র উপর মনে করি B বিন্দুর ভুজ 2, তাহা হইলে ঐ বিন্দু 2 ঘণ্টা পর লোকটির অবস্থান সূচিত করে, এবং ঐ বিন্দুর কোটি হইতে অতিক্রান্ত পথ (মাইল) পাওয়া যাইবে।

ইহার পর লোকটি $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা (অর্থাৎ 30 মিনিট) বিশ্রাম করে। এই সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের কোন বদল হইবে না। অতএব, যদি C বিন্দুর ভুজ B-এর

অপেক্ষা $\frac{1}{3}$ বেশী এবং কোটি সমান হয়, তবে $\frac{1}{3}$ ঘণ্টা পর C বিন্দু লোকটির অবস্থান সূচিত করিবে।

এই বিন্দু হইতে লোকটি প্রতি 1 ঘণ্টায় 3 মাইল যায়। মনে করি, D বিন্দুর ভুজ ও কোটি C বিন্দুর ভুজ ও কোটি অপেক্ষা যথাক্রমে 1 এবং 3 বেশী। তাহা হইলে D বিন্দু C হইতে 1 ঘণ্টা পরে লোকটির অবস্থান সূচিত করিবে।

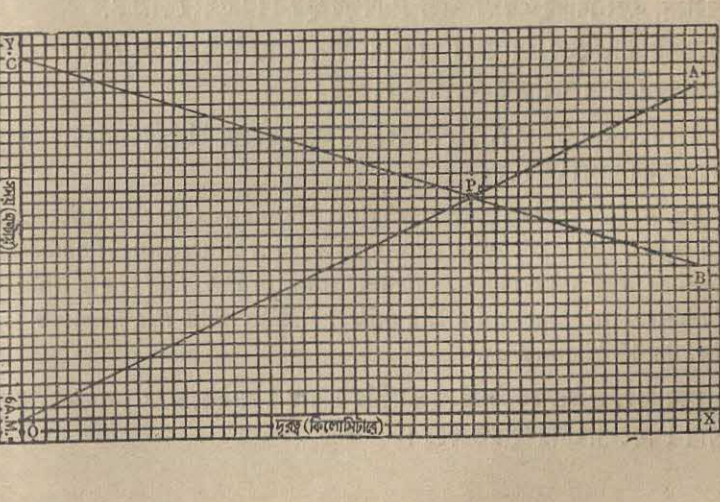
CD যোগ করিয়া বর্ধিত করিলাম। যেহেতু C-এর পর হইতে লোকটি সমবেগে গতিশীল, অতএব, এই সময়ে তাহার গতি-লেখ CDE সরল রেখা দ্বারা সূচিত হইবে।

$\therefore$ $OBCDE$ ভগ্নরেখাটি লোকটির প্রথম হইতে শেষপর্যন্ত উদ্দিষ্ট **গতিলেখ (Motion-graph).**

এই লেখ-অনুসারে, যে বিন্দু P-এর ভুজ 6 ঘণ্টা 10 মিনিট ($6\frac{1}{6}$ ঘণ্টা) নির্দেশ করে, তাহার কোটি 21 মাইল। পুনরায় যে বিন্দু Q-এর কোটি 14 মাইল, উহার ভুজ $3\frac{5}{6}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ আরম্ভ হইতে 6 ঘণ্টা 10 মিনিট পর লোকটি 21 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে, এবং 14 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিতে লোকটির 3 ঘণ্টা 50 মিনিট সময় লাগে।

Ex. 3. *The distance of Durgapur from Howrah is* 171 *kilometres. A passenger train starts from Howrah at* 6 *A.M., and reaches Durgapur at* 10-30 *A.M., and an express*



train starts from Durgapur at 8 A.M., reaching Howrah at 11 A.M. Find graphically when, and where they meet.

মনে করি, লেখ-কাগজে x-অক্ষের উপর হাওড়া হইতে দূরত্ব (কিলোমিটারে) এবং y-অক্ষের উপর 6 A.M. হইতে সময় (ঘণ্টায়) সূচিত হইতেছে।

একক এরূপ ধরিলাম যে, x-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহু 3 কিলোমিটার, এবং y-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 6 বাহু 1 ঘণ্টা (অর্থাৎ 1 বাহু = 10 মিনিট) নির্দেশ করে।

মূলবিন্দু O প্রথম (যাত্রীবাহী) ট্রেনের 6 A.M. সময়ে হাওড়ায় অবস্থান নির্দেশ করে। A বিন্দুর ভুজ 171 এবং কোটি $4\frac{1}{3}$ হইলে এই বিন্দু হাওড়া হইতে 171 কিলোমিটার দূরে (অর্থাৎ দুর্গাপুরে) $6+4\frac{1}{3}=10\frac{1}{3}$ টায় এই ট্রেনের উপস্থিতি সূচিত করে। OA যোগ করিলাম। ট্রেনখানি সমগতিবেগে চলিতেছে বলিয়া OA সরলরেখা উহার গতিলেখ নির্দেশ করিবে।

সেইরূপ, যদি B বিন্দুর ভুজ 171 এবং কোটি 2 হয়, তবে ঐ বিন্দু দুর্গাপুরে দ্বিতীয় (এক্সপ্রেস) ট্রেনের 8 A.M. এ অবস্থান সূচিত করে, এবং C বিন্দুর ভুজ 0 এবং কোটি 5 হইলে, ঐ বিন্দু এক্সপ্রেস ট্রেনের 11 A.M.-এ হাওড়ায় উপস্থিতি নির্দেশ করে। ট্রেন সমবেগে চলিতেছে বলিয়া BC সরলরেখা এই ট্রেনের গতিলেখ নির্দেশ করিবে।

লেখ-কাগজে দেখিতেছি যে, OA ও BC সরলরেখাদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, এবং নির্দিষ্ট এককানুযায়ী P বিন্দুর ভুজ 114 এবং কোটি 3.

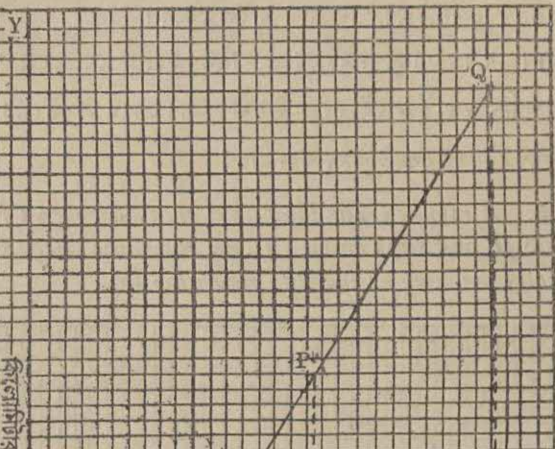
P দুই গতি-লেখ-এর উপর সাধারণ বিন্দু, কাজেই উহা দুই ট্রেনের একই সময়ে একই স্থানে অবস্থিতি নির্দেশ করিতেছে।

কাজেই, $6+3=9$ A.M. সময়ে, হাওড়া হইতে 114 কিলোমিটার দূরে উভয় ট্রেনের সাক্ষাৎ হইবে।

Ex. 4. *It being given that 8 kilometres are equivalent to 5 miles, draw a conversion-graph for converting kilometres to miles and vice-versa. From your graph find how many kilometres are there in $17\frac{1}{2}$ miles. Also find the number of miles in 45 kilometres.*

মনে কর, x-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 1 বাহু 1 মাইল, এবং y-অক্ষের উপর 1 বাহু 1 কিলোমিটার সূচিত করে।

যেহেতু 8 কিলোমিটার = 5 মাইল, যদি A বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 5 এবং 8 হয়, তবে A বিন্দু উদ্দিষ্ট লেখ-এর উপর অবস্থিত হইবে। 0 কিলোমিটার-এ 0 মাইল বলিয়া মূলবিন্দু O ঐ লেখ-এর উপর অবস্থিত। কিলোমিটার



এবং মাইলের অনুপাত সর্বদাই সমান বলিয়া লেখটি একটি সরলরেখা হইবে। $\therefore$ OA যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে ঐ সরলরেখাই 'কিলোমিটার-মাইল' **পরিবর্তক-লেখ** (conversion-graph).

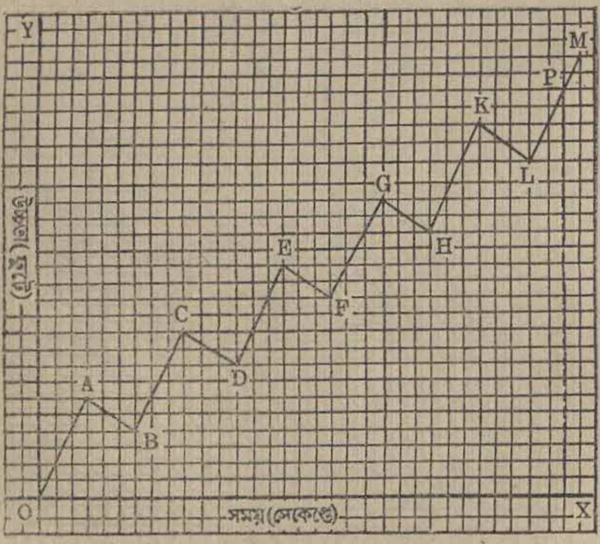
লেখ হইতে দেখা যায় যে, উহার উপর P বিন্দুর ভুজ $17\frac{1}{2}$, এবং ঐ বিন্দুর কোটি 28.

$\therefore$ $17\frac{1}{2}$ মাইল, 28 কিলোমিটারের সমান। পুনরায় লেখ-এর উপর Q বিন্দুর কোটি 45, এবং ঐ বিন্দুর ভুজ 28·1 প্রায়।

$\therefore$ 45 কিলোমিটারে প্রায় 28·1 মাইল হইবে।

দ্রষ্টব্য। যদি y কিলোমিটারে x মাইল হয়, তবে প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{x}{y}=\frac{5}{8}$ অর্থাৎ $y=\frac{8}{5}x$ হইবে। এই সমীকরণের লেখই উদ্দিষ্ট লেখ। অতএব, এই সমীকরণ হইতেও লেখটি অঙ্কন করা যায়।

Ex. 5. *A monkey, climbing up a greased pole 12 feet high, ascends 3 ft. and slips down 1 ft. in alternate seconds. Find graphically the time he takes to reach the top.*



মনে কর, x-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গের 3 বাহু 1 সেকেণ্ড, এবং y-অক্ষের উপর 2 বাহু 1 ফুট নির্দেশ করে।

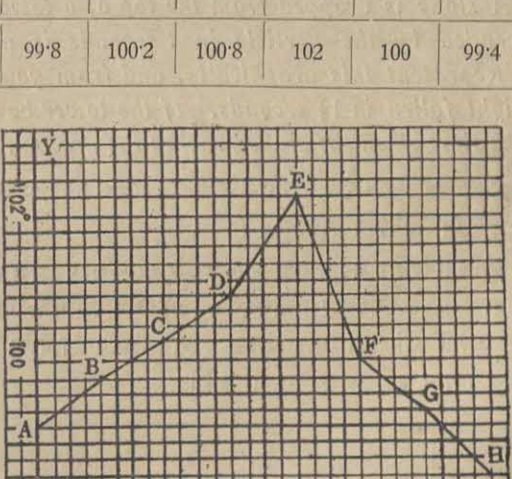
A বিন্দুর ভুজ 1 এবং কোটি 3 হইলে OA সরলরেখা বানরটির প্রথম সেকেণ্ডের গতি-লেখ। B বিন্দুর ভুজ 2, এবং কোটি A বিন্দুর কোটি অপেক্ষা

1 কম হইলে, AB সরলরেখা বানরের দ্বিতীয় সেকেণ্ডের গতি-লেখ। আবার, C বিন্দুর ভুজ 3 এবং কোটি B-এর কোটি অপেক্ষা 3 বেশী হইলে, BC সরলরেখা তৃতীয় সেকেণ্ডে বানরের গতি-লেখ। এখানে লক্ষণীয় যে, প্রতি সেকেণ্ডে উত্থান বা পতনকালীন পৃথক্‌ভাবে বানরের গতিবেগ সমান থাকায় প্রতি সেকেণ্ডে উহার গতি-লেখ পৃথক্ পৃথক্ সরলরেখা হইতেছে। ঐরূপ লেখতে প্রদর্শিত CD, DE, EF, FG, GH, HK, KL, LM যথাক্রমে চতুর্থ, পঞ্চম, ষষ্ঠ,…একাদশ সেকেণ্ডে বানরের গতি-লেখ, কিন্তু LM এর উপর P বিন্দুর কোটি 12 ফুট নির্দেশ করে, এবং এই বিন্দুর ভুজ এককানুযায়ী $10\frac{2}{3}$.

$\therefore$ বানরটি $10\frac{2}{3}$ সেকেণ্ডে বাঁশের মাথায় পৌঁছে।

Ex. 6. *The table below records the body temperature of a patient in Degrees Fahrenheit at intervals of 2 hours from 6 A.M. to 8 P.M. on a certain day. Draw a Temperature-graph of the patient on the day, and read off from the graph the approximate body temperature of the patient at 1 P.M. and at 6-30 P.M.*

6 A.M.	8 A.M.	10 A.M.	12	2 P.M.	4 P.M.	6 P.M.	8 P.M.
99·2	99·8	100·2	100·8	102	100	99·4	98·6



মনে কর, x-অক্ষের উপর মূলবিন্দু 6 A.M. সময় নির্দেশ করিতেছে, এবং ইহার পর ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহু 1 ঘণ্টা সময় সূচিত করে। ঐরূপ y-অক্ষের উপর মূল-বিন্দুতে 98°F তাপমাত্রা আরম্ভ করিয়া ক্ষুদ্র বর্গের 5 বাহু 1° (অর্থাৎ 1 বাহু ·2) তাপমাত্রা নির্দেশ করিতেছে। এই এককানুযায়ী লেখ-কাগজে y-অক্ষের উপর A বিন্দুর কোটি 99·2°F সূচিত করিতেছে, এবং এই বিন্দু 6 A.M. সময়ে রোগীর 99·2 তাপমাত্রা-নির্দেশক বিন্দু। ইহার পর গৃহীত এককানুযায়ী তালিকার অন্যান্য সময়গুলিতে রোগীর তাপমাত্রা-নির্দেশক অপর বিন্দুগুলি B, C, D, E, F, G, H পর পর স্থাপন করিলাম। এখন AB, BC, CD ইত্যাদি সরলরেখাগুলি পর পর যোগ করিলে রোগীর ঐ দিনের তাপমাত্রার লেখ প্রস্তুত হইল।

লেখ-অনুসারে দেখা যায় যে, 1 P.M. এবং 6-30 P.M. সময়সূচক ভুজের অনুরূপ কোটি দুইটির মান যথাক্রমে 101·4 এবং 99·2 তাপমাত্রা নির্দেশ করিতেছে।

∴ 1 P.M.-এ রোগীর দেহের তাপমাত্রা ছিল 101·4°F এবং 6-30 P.M. উহা ছিল 99·2°F.

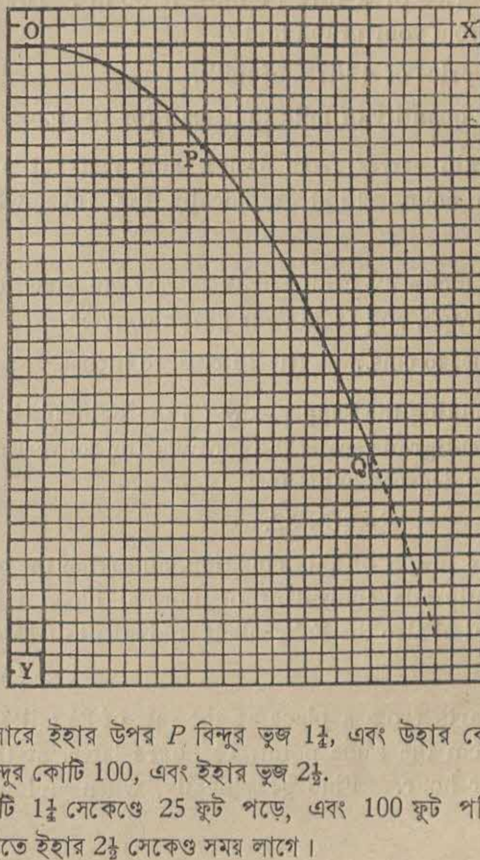
Ex. 7. *A stone is dropped from the top of a tower. The height descended by the particle in t seconds is given by* $16t^2$ *feet. Represent this graphically, and from your graph, find the height fallen in* $1\frac{1}{2}$ *seconds. If the tower be* 100 *feet high, find the time when the stone reaches the ground.*

মনে কর, x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 8 বাহু 1 সেকেণ্ড সময়, এবং y-অক্ষের দিকে 1 বাহু 4 ফুট দৈর্ঘ্য নির্দেশ করিতেছে।

যদি ঢিলটি ছাড়িয়া দিবার পর x সেকেণ্ডে y ফুট পড়ে, তবে প্রদত্ত শর্তানুসারে $y=16x^2$; ইহাই উদ্দিষ্ট লেখ-এর সমীকরণ। এই সমীকরণে x এবং y-এর অনুরূপ মানের একটি তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হইল। মনে রাখিতে হইবে যে, এক্ষেত্রে সময় x এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না।

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3
y	0	4	16	36	64	144

এক্ষণে উপরোক্ত এককানুযায়ী তালিকার বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করা হইল। ইহাই উদ্দিষ্ট লেখ।



লেখ-অনুসারে ইহার উপর P বিন্দুর ভুজ $1\frac{1}{4}$, এবং উহার কোটি প্রায় 25. আবার Q বিন্দুর কোটি 100, এবং ইহার ভুজ $2\frac{1}{2}$.

$\therefore$ ঢিলটি $1\frac{1}{4}$ সেকেণ্ডে 25 ফুট পড়ে, এবং 100 ফুট পড়িতে, অর্থাৎ মাটিতে পৌছিতে ইহার $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড সময় লাগে।

দ্রষ্টব্য। ঢিলটি নীচের দিকে পড়িতেছে বলিয়া ধারণার স্থবিধা হইবার জন্য এক্ষেত্রে লেখতে y-অক্ষ নীচের দিকে ধনাত্মক ধরিয়া অঙ্কিত হইয়াছে।

Examples IX (b)

1. Rice sells at 80 nP per kilogram. Draw a price-graph of rice up to 7 Kg., and find from your graph the price of

3·5 Kg. of rice; also find how much rice is available for Rs. 4·20 nP.

2. The price of a litre of milk is 90 nP. Draw a price-graph, and from your graph find

(i) the price of 4 litres of milk,

(ii) the quantity of milk to be had for Rs. 6.

3. A train starts from Delhi, and runs at a speed of 20 miles per hour. Find graphically the time when it is 48 miles off.

4. If 1 inch = 2·5 centimetres, draw an inch-centimetre conversion graph, and from your graph convert

(i) 5 ins. to cms., (ii) 15 cms. to inches.

5. F denoting the temperature on the Fahrenheit scale and C that on Centigrade scale, the formula for converting degrees Centigrade to degrees Fahrenheit is

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Draw the graph of this equation, and from the graph read off the Centigrade equivalent of normal blood temperature (98·4°F). Find also the Fahrenheit equivalent of 15°C.

[*B. C. S. 1940*]

6. P starts from a place at the rate of $2\frac{1}{2}$ miles per hour. Q starts from the same point, $1\frac{1}{2}$ hours later, at the rate of $3\frac{1}{4}$ miles per hour. Find graphically, when and where they meet.

7. The distance AB is 25 miles. A man starts from A towards B, walking at the rate of 4 miles per hour. A cyclist starts from B at the same time towards A, cycling at the rate of 6 miles per hour. Find graphically when and where they will meet, and also the time from their meeting till the cyclist reaches A.

8. Two persons start from the same place and at the same time, and walk at the rate of 3 and 5 miles per hour. Find graphically when they will be 12 miles apart.

9. A mail train starts from Howrah at 9 P.M. and reaches Khargpur, a distance of 72 miles, at 11 P.M. A passenger train starts from Khargpur at 7 P.M. and reaches Howrah at 11 P.M. Find graphically when and where they meet.

[*1955 Addl.*]

10. A man starts to walk at the rate of $4\frac{1}{2}$ miles per hour and rests for half an hour at the end of every hour. Draw the graph of his motion until he covers a distance of 20 miles, and from it find at what time he is at a distance of 12 miles from the starting point.

11. A pedastrian sets out for a walk. He walks 3 miles in the first hour, $2\frac{1}{2}$ miles in the next, 2 miles in the third hour. He then rests for 45 minutes, and after that he goes on at a uniform rate of $2\frac{1}{2}$ miles an hour for 3 hours. Find from a graph the distance walked by him in $1\frac{1}{2}$ hours, $3\frac{1}{2}$ hours and $5\frac{1}{2}$ hours.

A cyclist starts from the same point 2 hours later than the above pedastrian and cycles at a uniform rate of 6 miles per hour. Show the cyclist's journey on the graph drawn above, and read off the distance from the start when the cyclist overtakes the pedastrian. [*B. C. S. 1940*]

12. The salary of an officer increases each year by a fixed sum. After 5 years of service his salary is Rs. 120 and after 12 years it is Rs. 176. Draw a graph from which his salary may be read off for any year, and determine from it (i) his initial salary and (ii) the salary he would receive for his 21st year. [*D. B. 1945*]

13. Find graphically at what time between 2 and 3 o'clock the two hands of a clock differ by 12 minute-marks ; also find the approximate time when the two hands are together during this hour.

14. *A* can do a piece of work in 10 days, and *B* can do the same piece of work in 15 days. Find graphically the number of days in which they will together do the work.

15. A cistern has two supply-pipes. The first pipe, when opened singly, fills the cistern in 3 hours. The second pipe can fill it singly in 6 hours. Find graphically, the time in which the cistern is filled when both the pipes are opened simultaneously.

16. The expenses of a family are Rs. 260 when rice sells at Rs. 20 per maund, and Rs. 275 when the price of rice rises to Rs. 25 per maund, other expenses remaining unchanged. Find graphically, the expenses of the family when rice sells at Rs. 30 per maund, and also the amount from this which he has to spend for other expenses.

17. No income-tax is charged for annual incomes up to Rs. 3000, and for higher incomes, an income-tax of 5 naye paise per rupee is charged for the excess of the annual income over Rs. 3000. Draw a graph to show the tax on all incomes from Rs. 3000 to Rs. 8000. Find from your graph the tax on an annual income of Rs. 6750, and determine the income corresponding to a tax of Rs. 141·50 nP.

18. The temperature records for a period of 24 hours show the following :

Midnight :	51°	2 P. M. :	61·2°
2 A. M. :	50·8°	4 P. M. :	63°
4 A. M. :	50·7°	6 P. M. :	57·8°
6 A. M. :	49·5°	8 P. M. :	56·7°
8 A. M. :	50·8°	10 P. M. :	55°
10 A. M. :	54·8°	Midnight :	53·3°
Noon :	58°		

Draw a graph to exhibit the variation of temperature throughout the period, and estimate the temperatures at 3 A.M. and 3 P.M. [*B. C. S. 1938*]

ANSWERS

1. Rs. 2·80; 5·25 Kg. **2.** Rs. 3·60; $6\frac{2}{3}$ litres.

3. 2 hrs. 24 min. **4.** (i) 12·5 cms. (ii) 6 ins.

5. 37°C (approx.); 59°F.

6. 5 hours after *Q* starts, at a distance $16\frac{1}{4}$ miles.

7. After $2\frac{1}{2}$ hours at a distance 10 miles from *A*; 1 hr. 40 min.

8. After 6 hours.

9. At 9-40 P. M., at a distance 24 miles from Howrah.

10. 3 hrs. 40 min. **11.** $4\frac{1}{4}$ miles, $7\frac{1}{2}$ miles, $11\frac{7}{8}$ miles; 10 miles.

12. Rs. 80; Rs. 240 monthly.

13. 2 hrs. 2 min.; 10·9 min. (approx.) past 2.

14. 6 days. **15.** 2 hrs. **16.** Rs. 290; Rs. 200.

17. Rs. 187·50; Rs. 5830. **18.** 50·75°; 62·1°.

দশম অধ্যায়

অপনয়ন (Elimination)

10·1. অপনয়ন। সমীকরণে এক বা একাধিক অজ্ঞাত রাশি এবং কতকগুলি ধ্রুবক থাকে। এই অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয়কে সমীকরণের সমাধান বলে। মাননির্ণয়-ব্যাপারে সাধারণতঃ যতগুলি অজ্ঞাত রাশি থাকে, ততগুলি সমীকরণ দেওয়া থাকে। কিন্তু যেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশিগুলির মান-নির্ণয়কল্পে যতগুলি সমীকরণ প্রয়োজন তদপেক্ষা অধিক-সংখ্যক সমীকরণ দেওয়া থাকে, সেক্ষেত্রে সমীকরণে প্রদত্ত ধ্রুবকগুলি এক বা একাধিক সম্বন্ধযুক্ত। এই সম্বন্ধ-নির্ণয় গণিতশাস্ত্রে সময় সময় বিশেষ প্রয়োজন। যেহেতু, নির্ণেয় এই সম্বন্ধে অজ্ঞাত রাশির কোন স্থান নাই, ইহা নির্ণয় করিতে সাধারণতঃ প্রদত্ত সমীকরণগুলি হইতে অজ্ঞাত রাশিমুক্ত একটি সমীকরণ বাহির করিতে হয়। শেষোক্ত এই লব্ধ সমীকরণটিকে **অপনীতক** (*eliminant*) বলা হয় এবং অপনীতক নির্ণয়কার্যকে **অপনয়ন** (*elimination*) বলে।

প্রদত্ত সমীকরণগুলি যদি অপনেয় রাশিগুলির সমমাত্রিক (homogeneous) সমীকরণ হয়, তবে সমীকরণ-সংখ্যা অপনেয় রাশি-সংখ্যার সমান হইলেও চলে।

অপনয়নকার্যের কোন নির্দিষ্ট নিয়ম নাই। তবে যেখানে সমীকরণ-সংখ্যা অপনেয় রাশিসংখ্যা অপেক্ষা অধিক, সেখানে সাধারণতঃ প্রথমে যে কয়টি সমীকরণ প্রয়োজন, তাহা হইতে অপনেয় সংখ্যাগুলির মান নির্ণয় করিয়া অবশিষ্ট সমীকরণে বা সমীকরণগুলিতে এই নির্ণীত মানগুলি বসাইলে এক বা একাধিক অপনীতক পাওয়া যায়। অপনয়নকার্য সচরাচর নানাবিধ কৌশল-সাহায্যে করা হইয়া থাকে।

নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

10·2. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Eliminate* x *from the equations* $ax+b=0$ *and* $a'x+b'=0$.

প্রথম সমীকরণ হইতে, $x=-\dfrac{b}{a}$ এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $x=-\dfrac{b'}{a'}$.

$\therefore\quad -\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b'}{a'}$ অর্থাৎ $a'b-ab'=0$; ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

অথবা, প্রথম সমীকরণ হইতে x-এর লব্ধ মান $-\frac{b}{a}$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$a'\left(-\frac{b}{a}\right)+b'=0,$$

বা, $-a'b+ab'=0,$ বা, $a'b-ab'=0.$

Ex. 2. *Eliminate x from the equations $ax^2+bx+c=0$ and $a'x^2+b'x+c'=0$.*

$$ax^2+bx+c=0. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$a'x^2+b'x+c'=0. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{x^2}{bc'-b'c}=\frac{x}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

$\therefore \quad (bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$; ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Ex. 3. *Eliminate x and y from the equations*

(i) $ax+by=0$ *and* (ii) $a'x^2+b'xy+c'y^2=0.$

$$ax+by=0. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

বা, $a\frac{x}{y}+b=0,$ বা, $\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}.$

এবং $a'x^2+b'xy+c'y^2=0,$

বা, $a'\frac{x^2}{y^2}+b'\frac{x}{y}+c'=0. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$

এক্ষণে, (i) হইতে লব্ধ $\frac{x}{y}$ এর মান $-\frac{b}{a}$, সমীকরণ (ii)-এ বসাইলে,

$$a'\cdot\frac{b^2}{a^2}+b'.\left(-\frac{b}{a}\right)+c'=0,$$

বা, $a'b^2-abb'+a^2c'=0,$ বা, $a'b^2+a^2c'=abb'.$

Ex. 4. *Eliminate x, y and z from the equations*

(i) $x^2(y+z)=a^2,$ (ii) $y^2(z+x)=b^2,$

(iii) $z^2(x+y)=c^2$ *and* (iv) $abc=xyz.$

(i), (ii) এবং (iii) গুণ করিয়া,

$$x^2y^2z^2(y+z)(z+x)(x+y)=a^2b^2c^2,$$

$\therefore$ (iv) এর সাহায্যে, $(y+z)(z+x)(x+y)=1,$

বা, $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=1,$

অর্থাৎ, $a^2+b^2+c^2+2abc=1$; ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Ex. 5. *Eliminate x, y and z from the equations*

(i) $\dfrac{x}{y+z}=a,$ (ii) $\dfrac{y}{z+x}=b$ *and* (iii) $\dfrac{z}{x+y}=c.$

(i), উভয় পক্ষে 1 যোগ করিয়া

$$\frac{x}{y+z}+1=a+1$$

বা $$\frac{x+y+z}{y+z}=a+1$$

বা $$\frac{y+z}{x+y+z}=\frac{1}{a+1} \quad (1)$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{z+x}{x+y+z}=\dfrac{1}{b+1},$ (2) $\dfrac{x+y}{x+y+z}=\dfrac{1}{c+1}$ (3)

(1), (2), (3) কে যোগ করিয়া

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2.$$

Ex. 6. *Eliminate x, y and z from the equations*

(i) $\dfrac{y-z}{y+z}=a,$ (ii) $\dfrac{z-x}{z+x}=b$ *and* (iii) $\dfrac{x-y}{x+y}=c.$

তিনটি সমীকরণ হইতে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা

$$\frac{y}{z}=\frac{1+a}{1-a},\quad \frac{z}{x}=\frac{1+b}{1-b} \text{ এবং } \frac{x}{y}=\frac{1+c}{1-c}.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{z}\times\frac{z}{x}\times\frac{x}{y}=\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c},$$

বা, $1=\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$,

বা, $(1+a)(1+b)(1+c)=(1-a)(1-b)(1-c)$,

বা, $1+(a+b+c)+(ab+ac+bc)+abc$
$$=1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc,$$

বা, $(a+b+c)+abc=0$; ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Ex. 7. *Eliminate x, y and z from the equations*

$$(i)\ \frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a,\quad (ii)\ \frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b \text{ and } (iii)\ \frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c.$$

এখানে, $b+c-a=\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}-\frac{y}{x}-\frac{x}{z}=2\cdot\frac{z}{y}$,

$$c+a-b=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}=2\cdot\frac{x}{z},$$

এবং, $a+b-c=\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\frac{x}{z}-\frac{z}{y}=2\cdot\frac{y}{x}$.

$\therefore\ (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=2\cdot\frac{z}{y}\cdot2\frac{x}{z}\cdot2\frac{y}{x}=8$; ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Ex. 8. *Eliminate x, y and z from the equations*

$(i)\ x^2-yz=a,\qquad (ii)\ y^2-zx=b,$

$(iii)\ z^2-xy=c$ *and* $(iv)\ ax+by+cz=d.$

এখানে, $a^2-bc=(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)$
$$=(x^4-2x^2yz+y^2z^2)-(y^2z^2-xy^3-xz^3+x^2yz)$$
$$=x^4+xy^3+xz^3-3x^2yz=x(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

অনুরূপভাবে, $b^2-ca=y(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

এবং $c^2-ab=z(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

সুতরাং, $b^2-ca+c^2-ab+a^2-bc$

$$=(x+y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$=(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$
$$=(x+y+z)^2(a+b+c).$$

$\therefore\ (a+b+c)(b^2-ca+c^2-ab+a^2-bc)$

$$=(x+y+z)^2(a+b+c)^2.$$

বা, $a^3+b^3+c^3-3abc=(x+y+z)^2(a+b+c)^2.$

আবার, $ax+by+cz=x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy)$$
$$=(x+y+z)(a+b+c).$$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=(ax+by+cz)^2=d^2$;

ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

Ex. 9. *Eliminate x, y and from the equations*

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad \dots\ (i)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad \dots\ (ii)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0 \quad \dots\ (iii)$$

(i) এবং (ii) হইতে বজ্র-গুণন করিয়া,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}=k \text{ (মনে কর)।}$$

$\therefore\ x=k(b_1c_2-b_2c_1),\ y=k(c_1a_2-c_2a_1)$ এবং $z=k(a_1b_2-a_2b_1).$

x, y এবং z এর এই মানগুলি সমীকরণ (iii)-এ বসাইলে

$$a_3k(b_1c_2-b_2c_1)+b_3k(c_1a_2-c_2a_1)+c_3k(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

$\therefore\ a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0,$

বা, $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

গণিতশাস্ত্রে অপনয়নের প্রয়োজনীয়তার একটি দৃষ্টান্ত নিম্নে দেওয়া হইল।

Ex. 10. *Find the condition that the general quadratic expression $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ may be expressed as the product of two linear factors of the form $lx+my+n$ and $l'x+m'y+n'$.*

মনে করি, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$

$$\equiv(lx+my+n)(l'x+m'y-n').$$

$\therefore$ দক্ষিণ পক্ষের গুণফল লিখিলে,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$\equiv ll'x^2+(l'm+lm')xy+mm'y^2+x(l'n+ln')$$
$$+y(mn'+m'n)+nn'.$$

যেহেতু, ইহা একটি অভেদ, স্থতরাং, উভয় পক্ষের x ও y এর বিভিন্ন শক্তির সহগগুলি পরস্পর সমান হইবে।

$\therefore$ $ll'=a,$ $mm'=b,$ $nn'=c,$ $mn'+m'n=2f,$ $ln'+l'n=2g$ এবং $lm'+l'm=2h.$

এই সকল সমীকরণ হইতে l, m, n, l', m', n' অপসারিত করিলে নির্ণেয় শর্ত পাওয়া যাইবে।

শেষের তিনটি সমীকরণ গুণ করিলে

$$8fgh=(mn'+m'n)(ln'+l'n)(lm'+l'm)$$
$$=(lmn'^2+l'mnn'+lm'nn'+l'm'n^2)(lm'+l'm)$$
$$=l^2mm'n'^2+ll'mm'nn'+l^2m'^2nn'+ll'm'^2n^2$$
$$+ll'm^2n'^2+l'^2m^2nn'+ll'mm'nn'+l'^2mm'n^2.$$
$$=2ll'mm'nn'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)$$
$$+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)$$
$$=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2+nn'(lm'+l'm)^2$$
$$-4ll'mm'nn'$$
$$=4af^2+4bg^2+4ch^2-4abc.$$

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করতঃ পক্ষান্তর করিলে আমরা নির্ণেয় শর্ত পাই

$$2abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

Examples X

Eliminate x from the following equations :

1. $3x+a=0,\ ax+3=0.$
2. $2x+3b=a,\ 3x+a=2b.$
3. $ax^3+bx+c=0,\ a'x^3+b'x+c'=0.$
4. $ax^2+bx+c=0,\ a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0.$
5. $x+\frac{1}{x}=a+b,\ x-\frac{1}{x}=a-b.$
6. $ax^2+\frac{1}{ax^2}=a+b,\ ax^2-\frac{1}{ax^2}=a-b.$
7. $a+c=\frac{b}{x}-dx,\ a-c=\frac{d}{x}-bx.$
8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=a,\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=b.$
9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=a,\ \left(x-\frac{1}{x}\right)^3=b.$
10. $x^3+px+r=0,\ 3x^2+p=0.$
11. $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2,\ x+\frac{1}{x}=b.$
12. $ax^2-bx+c=0,\ dx^3-bx+c=0,$

Eliminate x and y from the following equations :

13. $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0,\ a_3x+b_3y+c_3=0.$
14. $mx+ny=a,\ nx-my=b,\ x^2+y^2=1.$
15. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^3+y^3=c^3.$
16. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ xy=c^2.$
17. $ax^2+bxy+cy^2=0,\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0.$
18. $lx+my=0,\ lx^3+mxy^2+y^3=0.$
19. $lx-my=0,\ px^2+qx+r=0,\ py^2+qy+r=0.$
20. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4.$

Eliminate x, y and z from the following equations :

21. $(x-y)a=(y-z)b=(z-x)c.$

22. $bx+ay-z=0,\ cx+az-y=0,\ cy+bz-x=0.$

23. $yz=a^2,\ zx=b^2,\ xy=c^2,\ x^2+y^2+z^2=r^2.$

24. $\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{yz}{x^2}=l,\ \dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{zx}{y^2}=m\ \ \dfrac{z^2}{xy}+\dfrac{xy}{z^2}=n.$

25. $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=a,\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=b,\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=c.$

26. $x+y+z=a, yz+zx+xy=b^2, x^3+y^3+z^3=c^3, xyz=d^3.$

27. $bx^2+lx+c=0, cy^2+my+a=0, az^2+nz+b=0, xyz=1.$

28. $ax+yz=bc,\ by+zx=ca,\ cz+xy=ab,\ xyz=abc.$

29. $\dfrac{x(x-y-z)}{a}=\dfrac{y(y-z-x)}{b}=\dfrac{z(z-x-y)}{c},\ ax+by+cz=0.$

30. $a^2yz=\alpha^2(y+z)^2,\ b^2zx=\beta^2(z+x)^2,\ c^2xy=\gamma^2(x+y)^2.$

31. $(x+y+z)a=(y+z-x)b=(z+x-y)c=(x+y-z)d.$

32. Eliminate (i) x, y, z and (ii) a, b, c from the equations

$$b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}=a,\quad c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}=b,\ a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}=c.$$

33. Eliminate x, y, z and w from the following equations
$x=by+cz+dw$, $y=ax+cz+dw$, $z=ax+by+dw$ and
$w=ax+by+cz$.

34. Establish the result

$$ax^2+by^2=\frac{1}{a+b}\left\{(ax+by)^2+ab(x-y)^2\right\}$$

and use this to eliminate v_1 and v_2 from

(i) $m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2$

(ii) $v_2-v_1=e(u_1-u_2)$

(iii) $T=\frac{1}{2}(m_1u_1+m_2u_2{}^2)-\frac{1}{2}(m_1v_1{}^2+m_2v_2{}^2)$

and show $T=\frac{1}{2}.\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-c^2)(u_1-u_2)^2.$

ANSWERS

1. $a^2=9$. 2. $5a=13b$. 3. $(bc'-b'c)(ab'-a'b)^2=(ca'-c'a)^3$.

4. $(abb'-a'b^2-a^2c'+aa'c)(acc'-a'c^2-abd')=(a'bc-ab'c+a^2d')^2$.

5. $ab=1$. 6. $ab=1$. 7. $\frac{c^2}{(b-d)^2}-\frac{a^2}{(b+d)^2}=1$. 8. $a-b=4$.

9. $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=4$. 10. $3p^3+p^2-6pr+9r^2=0$. 11. $b^2-a^2=2$.

12. $a^3-abd+cd^2=0$.

13. $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$.

14. $m^2+n^2=a^2+b^2$. 15. $a^3-3ab^2+2c^3=0$. 16. $a^2-b^2=2c^2$.

17. $(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$. 18. $m^2(l+m)=l^2$.

19. $\frac{q^2}{pr}=\frac{(l+m)^2}{lm}$. 20. $a^4+2c^4=b^2(2a^2+b^2)$.

21. $ab+ac+bc=0$. 22. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

23. $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=a^2b^2c^2r^2$. 24. $l^2+m^2+n^2-lmn=4$.

25. $a^2+b^2+c^2-abc=4$. 26. $a^3-3ab^2-c^3+3d^3=0$.

27. $al^2+bm^2+cn^2+lmn=4abc$. 28. $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$.

29. $a^3+b^3+c^3-bc(b+c)-ca(c+a)-ab(a+b)=0$.

30. $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}-4=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$. 31. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{a}$.

32. (i) $a^3+b^3+c^3=5abc$;

(ii) $y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3+x^2y^2z^2=0$.

33. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3$.

একাদশ অধ্যায়

প্রগতি (Progression)

11·1. শ্রেণী। এক বা একাধিক পূর্ববর্তী পদ হইতে কোন নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে গঠিত পর পর বিন্যস্ত কতকগুলি রাশিকে শ্রেণীবদ্ধ রাশি বা সংক্ষেপে **শ্রেণী** (*series*) নামে অভিহিত করা হয়। শ্রেণীর অন্তর্গত যে-কোন রাশিকে ঐ শ্রেণীর একটি **পদ** (*term*) বলা হয়। নিম্নে কয়েকটি শ্রেণীর দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

(i) $1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$

(ii) $1, 2, -3, 1, 2, -3, \cdots\cdots$

(iii) $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots$

(iv) $1, 2, 4, 8, 16, \cdots\cdots$

(v) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$

(vi) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots\cdots$

(vii) $2, 3, 5, 6, 8, 12, 11, 24, \cdots\cdots$

এই শ্রেণীগুলির মধ্যে (i)এর প্রত্যেক পদ ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহিত 1 যোগ করিয়া প্রাপ্ত, (ii)এর তৃতীয় পদ হইতে পরবর্তী প্রত্যেক পদ উহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টির পূর্বে বিয়োগ-চিহ্ন স্থাপন করিয়া গঠিত, (iv)এর প্রত্যেক পদ ঠিক পূর্ববর্তী পদের দ্বিগুণ, (v)এর প্রত্যেক পদ ঠিক পূর্ববর্তী পদের অর্ধেক, (vi)এর প্রত্যেক পদের অন্যোন্যক (reciprocal) ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্যোন্যক অপেক্ষা 2 বেশী এবং (vii)এর অযুগ্মস্থানের যে-কোন পদ পূর্ববর্তী অযুগ্মস্থানের পদ অপেক্ষা 3 বেশী ও যুগ্মস্থানের যে-কোন পদ পূর্ববর্তী যুগ্মস্থানের পদের দ্বিগুণ।

শ্রেণীর পদ-বিন্যাসের নিয়ম নানা রকম হইতে পারে, তদনুসারে নানা প্রকারের শ্রেণী হইয়া থাকে এবং শ্রেণীর পদসংখ্যা সসীম (finite) বা অসীম (infinite) হইতে পারে। তন্মধ্যে বর্তমানে আমরা সসীম সমান্তর শ্রেণী, গুণোত্তর শ্রেণী এবং বিপরীত শ্রেণী-সম্বন্ধে আলোচনা করিব। আমাদের প্রথম আলোচ্য সমান্তর শ্রেণী।

সমান্তর শ্রেণী (Arithmetical Progression)

11·2. সমান্তর শ্রেণী। পর পর কতকগুলি রাশি যদি এইরূপ ভাবে বিন্যস্ত হয় যে, উহাদের অন্তর্গত যে কোন পদ উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহিত একটি নির্দিষ্ট রাশি যোগ করিয়া পাওয়া যায়, তাহা হইলে ঐ রাশিগুলি **সমান্তর শ্রেণীতে** (in Arithmetical Progression) অবস্থিত বলা হয়। সমান্তর শ্রেণী **সমান্তর প্রগতি**-নামেও অভিহিত হইয়া থাকে। এই শ্রেণীর যে-কোন পদের সহিত ইহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তরফল সতত ঐ নির্দিষ্ট রাশির সমান এবং এই নির্দিষ্ট রাশিকে সমান্তর শ্রেণীর **সাধারণ অন্তর** (*common difference*) বলে।

নিম্নোক্ত শ্রেণীগুলির প্রত্যেকটি সমান্তর শ্রেণী।

(i) 2, 4, 6, 8, 10, ... ; এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর 2.
(ii) 8, 5, 2, −1, −4, ... ; " " " " −3.
(iii) $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots$; " " " " d.

এই শেষোক্ত শ্রেণীটিকে সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার (general form) বলা হয়।

কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর দেওয়া থাকিলে আমরা সম্পূর্ণ শ্রেণীটি নির্ণয় করিতে পারি। প্রথম পদের সহিত সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া দ্বিতীয় পদ, দ্বিতীয় পদের সহিত সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া তৃতীয় পদ এবং এইরূপে ক্রমান্বয়ে সাধারণ অন্তর যোগ করিয়া আমরা শ্রেণীটির যে-কোন-সংখ্যক পদ অর্থাৎ সম্পূর্ণ শ্রেণীটি নির্ণয় করিতে পারি।

11·3. সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ (the nth term).

আমরা যদি সাধারণ আকারের $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots\ldots$ সমান্তর শ্রেণীটি বিশেষভাবে পর্যবেক্ষণ করি, তবে দেখিতে পাইব যে, যে-কোন পদে dএর সহগ এই সমান্তর শ্রেণীতে পদটির অবস্থিতি-নির্দেশক সংখ্যা হইতে 1 কম। যথা,

চতুর্থ পদ $= a+3d$
ষোড়শ পদ $= a+15d$
অশীতিতম পদ $= a+79d$

এবং সাধারণভাবে p-তম পদ $= a+(p-1)d$.

সুতরাং, এই সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ যদি l দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $\mathbf{l = a + (n-1)d}$. ... ... (I)

a, d, n এবং l এই রাশি চতুষ্টয়ের মধ্যে যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে আমরা উপরোক্ত (I) সূত্র সাহায্যে অবশিষ্ট চতুর্থ রাশিটি নির্ণয় করিতে পারি। কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং n-তম পদ l দেওয়া থাকিলে আমরা এই সূত্র সাহায্যে সাধারণ অন্তর d নির্ণয় করিতে পারি, কেননা এই সূত্র হইতে

$$\mathbf{d = \frac{l - a}{n - 1}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত : কোন সমান্তর শ্রেণীর নির্দিষ্ট যে-কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে m এবং n দেওয়া আছে।

যদি এই সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হয়, তবে

$$m = a + (p-1)d \quad \text{এবং} \quad n = a + (q-1)d.$$

এই দুই সহ-সমীকরণ হইতে আমরা অজ্ঞাত রাশি দুইটি a এবং d, অর্থাৎ সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় করিয়া সম্পূর্ণ শ্রেণীটি নির্ণয় করিতে পারি।

11·4. নির্দিষ্ট-সংখ্যক পদ-বিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীর যোগফল।

মনে কর, প্রদত্ত সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং পদ-সংখ্যা n. মনে কর, এই শ্রেণীর শেষ অর্থাৎ n-তম পদ l এবং নির্ণেয় সমষ্টি S.

তাহা হইলে $S = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l$; এবং শ্রেণীটি উল্টাইয়া লিখিলে

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

এই দুইটি শ্রেণী যোগ করিয়া,

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots\cdots \text{ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।}$$
$$= n(a+l).$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{n}{2}(a + l)}. \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \text{(II)}$$

আবার, $l = a + (n-1)d$. [সূত্র (I) হইতে]

l এর এই মান (II) সূত্রে বসাইয়া আমরা পাই

$$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}. \quad \dots \quad \dots \quad (III)$$

11·5. সমান্তর মধ্যক (Arithmetic Mean).

কোন সমান্তর শ্রেণীভুক্ত পর পর তিনটি পদের মধ্যবর্তীটিকে অপর দুই পদের **সমান্তর মধ্যক** (Arithmetic Mean) বা সংক্ষেপে A. M. বলে। যথা, 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... একটি সমান্তর শ্রেণী। এই শ্রেণীর অন্তর্গত পর পর তিনটি পদ 5, 8, 11 ; এখানে মধ্যবর্তী পদ 8, 5 এবং 11 এই দুই পদের সমান্তর মধ্যক। আবার, 11, 14, 17 এই শ্রেণীর অপর তিনটি ক্রমিক পদ এবং এখানে মধ্যবর্তী পদ 14, 11 এবং 17 এই দুই পদের সমান্তর মধ্যক। আরও, সাধারণ ভাবে বলা যায় a, b, c যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ হয়, তবে b, a এবং c পদদ্বয়ের সমান্তর মধ্যক।

(A) প্রদত্ত দুই রাশির সমান্তর মধ্যক নির্ণয়।

মনে কর, প্রদত্ত রাশি দুইটি a ও b এবং A উহাদের সমান্তর মধ্যক। এখন, যেহেতু a, A, b রাশিত্রয় একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore\ A - a = b - A =$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর।

বা, $2A = a + b$. $\quad \therefore\ A = \frac{1}{2}(a+b)$.

অর্থাৎ, প্রদত্ত দুই রাশির সমান্তর মধ্যক ঐ দুই রাশির সমষ্টির অর্ধেক।

অনুরূপভাবে, যদি কতকগুলি রাশি একটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে এই শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদে অবস্থিত রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে ঐ দুই রাশির সমান্তর মধ্যক বলা হয়। যথা, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 একটি সমান্তর শ্রেণী ; ইহার প্রথম পদ এবং শেষপদ যথাক্রমে 1 ও 22. সুতরাং 1 এবং 22 এর মধ্যবর্তী 4, 7, 10, 13 প্রভৃতি 6টি রাশি 1 এবং 22 এর মধ্যবর্তী সমান্তর মধ্যক।

(B) প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের মধ্যে যে-কোন নির্দিষ্ট-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সন্নিবেশ।

মনে কর, প্রদত্ত রাশিদ্বয় a এবং b-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সন্নিবিষ্ট করিতে হইবে।

ধর, $x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_n$, n-সংখ্যক নির্ণেয় সমান্তর মধ্যক।

$\therefore$ a এবং b-এর মধ্যে এই n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সন্নিবেশান্তে উৎপন্ন $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n, b$ শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী এবং ইহার পদসংখ্যা $n+2$. [$\because$ সমান্তর মধ্যকের সংখ্যা n এবং প্রথম ও শেষ দুই পদ a এবং b.]

এখন d যদি এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর হয়, তবে

$(n+2)$ তম পদ $b = a + (n+1)d$; $\therefore\ d = \dfrac{b-a}{n+1}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমান্তর মধ্যকগুলি

$$a + \frac{b-a}{n+1},\ a + \frac{2(b-a)}{n+1},\ a + \frac{3(b-a)}{n+1}, \cdots\cdots,\ a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

11·6. সমান্তর শ্রেণী-সংক্রান্ত উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the 15th and 50th terms in the series 40, 36, 32, 28,........*

এখানে শ্রেণীটি সমান্তর, এবং ইহার সাধারণ অন্তর $= 36 - 40 = -4$.

$\therefore$ পঞ্চদশ পদ $= 40 + (15-1) \times (-4) = 40 - 56 = -16$.

এবং পঞ্চাশত্তম পদ $= 40 + (50-1) \times (-4) = 40 - 196 = -156$.

Ex. 2. *Find the last term and the sum of the series* (i) 50, 46, 42,............ *to* 100 *terms and* (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots\cdots\cdots$ *to n terms.*

(i) এখানে সাধারণ অন্তর $= 46 - 50 = -4$.

$\therefore$ এই শ্রেণীর শেষ অর্থাৎ শততম পদ

$$= 50 + (100-1) \times (-4) = 50 - 396 = -346.$$

এবং নির্ণেয় যোগফল $= \frac{100}{2}\{50 + (-346)\} = 50 \times (-296) = -14800$.

(ii) এখানে সাধারণ অন্তর $= 3 - 1 = 2$.

$\therefore$ এই শ্রেণীর শেষ অর্থাৎ n-তম পদ $= 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$.

এবং নির্ণেয় যোগফল $= \dfrac{n}{2}(1 + 2n - 1) = \left(\dfrac{n}{2} \cdot 2n\right) = n^2$.

Ex. 3. *The first term of an A. P. is* 3, *the last term is* 90 ; *find how many terms of the series must be taken to make the sum equal to* 1395.

মনে কর, নির্ণেয় পদ-সংখ্যা $= n$.

$\therefore \quad 1395 = \frac{n}{2}(3+90)\;; \quad \therefore \quad n = \frac{2 \times 1395}{93} = 30.$

$\therefore$ শ্রেণীটির পদসংখ্যা $= 30.$

Ex. 4. *The tenth term of an A. P. is* $-8\frac{3}{4}$ *and the* 19*th term is* -19. *What is its sixth term ?*

মনে কর, এই সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.

$\therefore \quad -8\frac{3}{4} = a + 9d. \qquad \cdots\; (1)$

এবং $\quad -19 = a + 18d. \qquad \cdots\; (2)$

(1) ও (2) সমীকরণ হইতে $d = -\frac{41}{36}$ এবং $a = \frac{3}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ষষ্ঠ পদ $= \frac{3}{2} + 5 \times \left(-\frac{41}{36}\right)$

$= \frac{3}{2} - \frac{205}{36} = -\frac{151}{36}.$

Ex. 5. *The* 4*th term of an A. P. is* p *and the* 5*th term is* q ; *find the nth term of the series.*

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a. যেহেতু সমান্তর শ্রেণীর যে-কোন পদ এবং ঠিক তৎপূর্ববর্তী পদের অন্তরফল সাধারণ অন্তরফল, এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর $= q - p$.

$\therefore$ চতুর্থ পদ $p = a + (q-p)3$ বা, $a = 4p - 3q$.

$\therefore$ এই সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ $= a + (n-1)(q-p)$

$= 4p - 3q + n(q-p) - q + p$

$= 5p - 4q + n(q-p).$

Ex. 6. *Find* 3 *numbers in A. P. such that their sum is* 99 *and the product of the first two is* 495.

যেহেতু রাশিত্রয় সমান্তর শ্রেণীভুক্ত, উহাদের সমান্তর মধ্যক বা মধ্যবর্তী রাশিটি অপর রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক অর্থাৎ এই দুই রাশির সমষ্টি মধ্যবর্তী রাশির দ্বিগুণ।

$\therefore$ রাশিত্রয়ের সমষ্টি মধ্যবর্তী রাশির 3 গুণ।

$\therefore$ মধ্যবর্তী অর্থাৎ দ্বিতীয় রাশিটি $= 99 \div 3 = 33.$

$\therefore$ প্রথম রাশি $= 495 \div 33 = 15,$

এবং তৃতীয় রাশি $= 99 - (33 + 15) = 51.$

$\therefore$ রাশিত্রয় 15, 33, 51

Ex. 7. *If s_1, s_2, s_3 denote the sum of the first n terms, 2n terms and 3n terms respectively of a series in A. P., show that* $3(s_2 - s_1) = s_3$.

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.

$$\therefore \quad s_1 = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\},$$

$$s_2 = \frac{2n}{2}\{2a + (2n-1)d\} = n\{2a + (2n-1)d\},$$

এবং $$s_3 = \frac{3n}{2}\{2a + (3n-1)d\}.$$

$$\therefore \quad 3(s_2 - s_1) = 3[n\{2a + (2n-1)d\} - \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}]$$

$$= \frac{3n}{2}(4a + 4nd - 2d - 2a - nd + d)$$

$$= \frac{3n}{2}\{2a + (3n-1)d\} = s_3.$$

Ex. 8. *If x^2, y^2, z^2 are in A. P., show that* $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z}$ *are also in A. P.*

$\frac{1}{x+y}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z}$ একটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হইবে,

যদি $\frac{1}{z+x} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+x}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{x+y-z-x}{(z+x)(x+y)} = \frac{z+x-z-y}{(y+z)(z+x)}$ হয়।

অর্থাৎ যদি $\frac{y-z}{x+y} = \frac{x-y}{y+z}$ হয়, অর্থাৎ যদি $x^2 - y^2 = y^2 - z^2$ হয়।

অর্থাৎ যদি $y^2 - x^2 = z^2 - y^2$ হয়।

অর্থাৎ যদি x^2, y^2, z^2 সমান্তর শ্রেণী হয়,

কিন্তু দেওয়া আছে x^2, y^2, z^2 সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$\therefore \quad \frac{1}{x+y}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z}$ একটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

Ex. 9. *Prove that the sum of n Arithmetic means between any two given quantities is n times the mean between them.*

মনে কর, প্রদত্ত রাশি দুইটি a ও b এবং $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ এই দুই রাশির মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক।

সুতরাং, $a, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

মনে কর, এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর d.

$\therefore$ এই শ্রেণীর $(n+2)$-তম পদ $b = a + (n+1)d$.

$$\therefore \quad d = \frac{b-a}{n+1}.$$

$$\therefore \quad x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+b}{n+1}.$$

এক্ষণে a ও b-এর সমান্তর মধ্যক $\frac{1}{2}(a+b)$, এবং a ও b এর মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ এর সমষ্টি

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$= \frac{n}{2}\left\{2 \cdot \frac{an+b}{n+1} + (n-1)\frac{b-a}{n+1}\right\},$$

$$\left[\text{যেহেতু } x_1 = \frac{an+b}{n+1} \text{ এবং } d = \frac{b-a}{n+1}\right]$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n+1}(2an + 2b + nb - an - b + a)$$

$$= \frac{n}{2(n+1)}\{n(a+b) + (a+b)\} = \frac{n(a+b)(n+1)}{2(n+1)}$$

$$= n \cdot \frac{a+b}{2} = n \times (a \text{ ও } b \text{ এর মধ্যবর্তী সমান্তর মধ্যক})।$$

Ex. 10. *There are n Arithmetic means between* 3 *and* 248 *such that the ratio of the* 12*th mean to the nth mean is as* 7 : 27 ; *find n.*

এক্ষেত্রে, 3 এবং 248 এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সন্নিবিষ্ট করিয়া যে সমান্তর শ্রেণী গঠিত তাহার পদসংখ্যা $n+2$, প্রথম পদ 3 এবং শেষ অর্থাৎ $(n+2)$-তম পদ 248. এই সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তর d হইলে,

$$248 = 3 + (n+1)d, \quad \text{বা,} \quad d(n+1) = 245 \qquad \ldots\ (1)$$

আবার, দ্বাদশ মধ্যক $= 3 + 12d$ এবং n-তম মধ্যক $= 248 - d$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $\frac{3+12d}{248-d}=\frac{7}{27}$, বা, $81+324d=1736-7d$,

বা, $331d=1655$, বা, $d=5$.

$\therefore$ (1)এ 'd'এর এই মান বসাইলে $5(n+1)=245$,

বা, $n+1=49$ $\quad\therefore\ n=48$.

$\therefore$ মধ্যক-সংখ্যা $=48$.

Ex. 11. *Determine the Arithmetic series of which the sum to n terms is* $\frac{n}{2}(3n+5)$.

মনে কর, শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $=S_n$ এবং $(n-1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি S_{n-1}. এক্ষণে শ্রেণীটির n-তম পদ যদি t_n হয়, তবে

$$t_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{2}(3n+5)-\frac{n-1}{2}(3n-3+5)$$

$$=\tfrac{1}{2}(6n+2)=3n+1.$$

এক্ষণে n এর পরিবর্তে 1, 2, 3 প্রভৃতি বসাইয়া নিম্নের নির্ণেয় শ্রেণীটি পাই

4, 7, 10, 13,....

Ex. 12. *The sum of the last three terms of an A.P. containing* 31 *terms is* 360 *and that of the three middle terms is* 192. *Find the series.*

মনে কর, নির্ণেয় শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d. একত্রিশটি পদ লইয়া গঠিত শ্রেণীটির ঊনত্রিংশৎ, ত্রিংশৎ এবং একত্রিংশৎ পদত্রয় ইহার শেষ তিনটি পদ এবং পঞ্চদশ, ষোড়শ এবং সপ্তদশ পদ ইহার মধ্যবর্তী তিন পদ।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $(a+28d)+(a+29d)+(a+30d)=360$,

বা, $3(a+29d)=360$, বা, $a+29d=120$. .... (1)

এবং $(a+14d)+(a+15d)+(a+16d)=192$ বা, $3(a+15d)=192$,

বা, $a+15d=64$. .... (2)

(1) এবং (2) হইতে আমরা পাই $a=4$ এবং $d=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি 4, 8, 12, 16, 20, ...

Ex. 13. *The sum of* 5 *numbers in A. P. is* 40 *and the sum of their squares is* 410 ; *find them.*

মনে কর, নির্ণেয় রাশি পাঁচটি $a-2\beta$, $a-\beta$, a, $a+\beta$ এবং $a+2\beta$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $(a-2\beta)+(a-\beta)+a+(a+\beta)+(a+2\beta)=40,$

বা, $5a=40,$ বা, $a=8.$

এবং $(a-2\beta)^2+(a-\beta)^2+a^2+(a+\beta)^2+(a+2\beta)^2=410,$

বা, $5a^2+10\beta^2=410,$ বা, $a^2+2\beta^2=82,$

বা, $2\beta^2=18$ $[\because a=8]$ $\therefore$ $\beta=\pm 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় পাঁচটি রাশি 2, 5, 8, 11 এবং 14.

[$\beta=-3$ ধরিলে এই রাশি পাঁচটিই বিপরীতক্রমে পাওয়া যাইবে।]

Ex. 14. *The sum of p terms of an A. P. is q and that of q terms is p ; find the sum of $(p+q)$ terms of the A. P.*

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d. সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$q=\frac{p}{2}\{2a+(p-1)d\}, \text{ বা, } 2q=2ap+p^2d-pd. \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } p=\frac{q}{2}\{2a+(q-1)d, \text{ বা, } 2p=2aq+q^2d-qd. \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া আমরা পাই

$$2(q-p)=2a(p-q)+(p^2-q^2)d-(p-q)d.$$

উভয় পক্ষকে $(p-q)$ দ্বারা ভাগ করিয়া $[\because p\neq q]$

$$-2=2a+(p+q)d-d=2a+(p+q-1)d. \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

$\therefore$ $p+q$-সংখ্যক পদের নির্ণেয় সমষ্টি

$$=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)d\}=\frac{p+q}{2}(-2)=-(p+q).$$

Ex. 15. *The sums of n terms of two series in A.P. are in the ratio of $(n-1):(n+1)$; find the ratio of their 15th terms.*

মনে কর, সমান্তর শ্রেণী দুইটির প্রথম পদ a_1, a_2, উহাদের সাধারণ অন্তর β_1, β_2 এবং S_1, S_2 যথাক্রমে উহাদের n-সংখ্যক পদের সমষ্টি।

$$\therefore\ S_1=\frac{n}{2}\left\{2a_1+(n-1)\beta_1\right\} \text{ এবং } S_2=\frac{n}{2}\left\{2a_2+(n-1)\beta_2\right\}.$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত শর্তানুসারে, } \frac{S_1}{S_2}=\frac{2a_1+(n-1)\beta_1}{2a_2+(n-1)\beta_2}=\frac{n-1}{n+1}. \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, শ্রেণী দুইটির পঞ্চদশ পদের অনুপাত

$$=\frac{a_1+14\beta_1}{a_2+14\beta_2}=\frac{2a_1+28\beta_1}{2a_2+28\beta_2}=\frac{2a_1+(29-1)\beta_1}{2a_2+(29-1)\beta_2}=\frac{29-1}{29+1}.$$

[(1)-এ n এর পরিবর্তে 29 বসাইয়া]

$$=\frac{14}{15}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=14:15$.

Ex. 16. *The angles of a polygon are in A.P. having the common difference 10°. If the least of them be 88°, find the number of sides of the polygon.*

মনে কর, বহুভুজটির বাহু-সংখ্যা n. যেহেতু কোন বহুভুজের অন্তঃকোণ সমষ্টির সহিত 360° যোগ করিলে এই যোগফল বহুভুজের বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণের সমান হয়,

$\therefore\quad \frac{n}{2}\left\{2.88^\circ+(n-1)10^\circ\right\}+360^\circ=2n.90^\circ,$

বা, $88n+5n^2-5n+360=180n,$

বা, $5n^2-97n+360=0,$ বা, $(n-5)(5n-72)=0,$

$\therefore\quad n=5$ বা $\frac{72}{5}$.

বাহু-সংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না বলিয়া নির্ণেয় বাহু-সংখ্যা 5.

Examples XI(a)

1. Find

(i) the 27th and 50th terms in the series 5, 13, 21, 29,···· ;

(ii) the 17th and 90th terms in the series -4, 2·5, 9,···· ;

(iii) the 10th and 26th terms in the series $a-2b$, a, $a+2b$,···· ;

(iv) the 13th and nth terms in the series 10, $12\frac{1}{2}$, 15,···· .

2. Find the last term in the following series

(i) 5, 9, 13, 17,········to 50 terms.

(ii) -10, -5, 0,········to 13 terms.

(iii) $\alpha-3\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$,········to 100 terms.

(iv) $2a-b$, $4a-3b$, $6a-5b$,········to 20 terms.

3. Find the last term, and the sum of the following series :

(i) 9, 5, 1,........to 100 terms.

(ii) $\frac{1}{5}$, 0, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$........to 50 terms.

(iii) $a-3x$, $a-x$, $a+x$........to n terms.

(iv) $\frac{n^2-1}{n}$, n, $\frac{n^2+1}{n}$,........to n terms.

4. Find the common difference and sum of n terms of a series in A.P., of which the first term is 10 and the 10th term is 0.

5. (i) Which term of the series 2, 5, 8,........is 299 ?

(ii) Is 301 a term of the series 3, 8, 13,........ ?

6. (i) The 5th and 13th terms of an A.P. are 5 and -3 respectively. Find the 21st term and the sum of 21 terms.

[1960 Addl. ('58 Syllabus)]

(ii) The 9th term of A.P. is 3·75 and the 15th term is 2·25. Find the sum of the series to 25 terms.

(iii) The 25th term of an A.P. is 25 and the 41st term is -41. Find the sum of the first 17 terms of the series.

[1956 Addl.]

(iv) The 6th term of an A.P. is 17 and the 10th term is 32. Find the sum to n terms of the series.

7. (i) The 7th term of an A.P. is 16 and the 12th term is 31. If the sum of the series is 374, find the number of terms.

(ii) Find the number of terms of a series in A.P. of which the 4th term is $-1\frac{1}{2}$, the 9th term is -9, and the sum is $-37\frac{1}{2}$.

(iii) How many terms of the series -3, $-1\frac{1}{2}$, 0,....must be taken so that their sum may be $310\frac{1}{2}$?

8. The 5th term of an A.P. is $5n$ and the 11th term is $17n$. What is the nth term ?

9. (i) The rth term of a series is $3r+7$. Show that it is an A.P., and find the sum of 15 terms of it.

[*1961 Addl.* (*'58 Syllabus*)]

(ii) The sum of n terms of a series is $2n^2+3n$. Find its rth term, and prove that it is an A.P. What is the common difference ? [*1954 Addl.*]

10. (i) The sum of first 10 terms of an A.P. is 120, and the sum of the next 5 terms is 135. Find the sum of the next 6 terms.

(ii) The 12th term of an A.P. is 23, and the sum of the first 22 terms is 484 ; find the sum of the next 8 terms.

[*1959 Addl.*]

(iii) The sum of 10 consecutive terms of an A.P. is 30, and the sum of the next 10 terms is -170. Find the sum of the next 10 terms following these. [*1957 Addl.*]

11. The second term of an A.P. is 6, and the fourth term is 14. Find the sum of the series from 10th to 59th term.

12. The first term of an A.P. is 19, the last term is 173, and the sum is 2208. Find out the term immediately preceding the middle term. [*1959 Addl.* (*'58 Syllabus*)]

13. (i) Find the sum of all numbers that are divisible by 7 between 289 and 657.

(ii) Find the sum of all numbers divisible by 13 between 500 to 1001.

14. The sum of the 5th term and 7th term of a series in A.P. is 20, and twice the sum of the second and sixth terms is 12. Find the 20th term.

15. The sum of 100 terms of an A.P. with common difference $\frac{1}{2}$ is 1475. Find its 100th term.

16. The 8th term of an A.P. is double the 13th term ; show that the second term is double the 10th term.

17. The sum of 5 numbers in A.P. is 10, and the sum of their squares is 110 ; find the numbers.

18. Find 5 consecutive terms of the series 3, 7, 11, 15,···· whose sum is 415.

19. The second term of an A.P. is 7 times the 11th term, and the sum of 13th and 14th terms is 4. How many terms of the series are to be taken so that their sum may be -128. Explain the double answer.

20. The sum of 9 numbers in A.P. is 90, and the product of the first and last of them is -300. Find the two extreme numbers.

21. (i) The pth term of an A.P. is q, and the qth term is p ; show that its nth term is $p+q-n$.

(ii) The sum of n terms of an A. P. is m, and that of m terms is n. Prove that the sum of $m+n$ terms is $-(m+n)$. [*1950 Addl.*]

(iii) The pth term of a series in A. P. is m and the qth term is n. Show that the sum of first $p+q$ terms of the series is

$$\frac{p+q}{2}\left(m+n+\frac{m-n}{p-q}\right).$$

(iv) If the nth term of an A.P. is $\frac{1}{r}$, and the rth term is $\frac{1}{n}$, show that the sum of nr terms is $\frac{1}{2}(nr+1)$.

22. (i) The sum of the first 7 terms of an arithmetic series is to the sum of the first 12 terms as 1 : 3, show that the ratio of the first term to the common difference is 1 : 3.

(ii) Show that the sum of the latter half of $2n$ terms of any series in A.P. is equal to one-third of the sum of $3n$ terms of the same series.

23. (i) If a, b, c be the pth, qth, rth terms respectively of an A. P., show that $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

[*1963 Addl.*]

(ii) If a, b, c be the sums of p, q, r terms respectively of an A.P., prove that

$$\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$$

24. (i) If the sum of p terms of a series is to the sum of q terms as $p^2 : q^2$, show that the pth term is to the qth term as

$$(2p-1) : (2q-1).$$

(ii) If s_1, s_2, s_3 be the sum of n terms of three series in A.P., whose first terms are the same, and whose common differences are in A.P., show that s_1, s_2, s_3 are in A.P.

25. Insert (i) 20 arithmetic means between 7 and 70.

(ii) 36 arithmetic means between $8\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{3}$.

(iii) 3 arithmetic means between $p-q$ and $q-p$.

26. n arithmetic means are inserted between -14 and 114, so that the 11th mean : the 26th mean $=1:3$; find n.

27. If 20 and 50 arithemetic means are inserted between two quantities a and b, show that the common differences of the two arithmetic series so formed are in the ratio 17 : 7.

28. Twentytwo arithmetic means are inserted between a and b, so that the two middle ones are 31 and 34 ; find a and b.

29. (i) The arithmetic mean between a and b is p, and that between b and c is q. Show that $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ are in A. P. if $b^2=ac$.

(ii) Three quantities a, b, c are such that a is the A. M. between b and c, and $\frac{1}{c}$ is the A. M. between $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{b}$; show that $b^2=ac$.

30. (i) If $\frac{1}{2(y-a)}$ is the A. M. between $\frac{1}{y-x}$ and $\frac{1}{y-z}$, show that $(x-a)(z-a)=(y-a)^2$.

(ii) If b and $\frac{1}{d}$ be the arithmetic means between a and c, and between $\frac{1}{c}$ and $\frac{1}{e}$ respectively, and $c^2=bd$, prove that $a : b = d : e$.

31. (i) If a be the A. M. between m and n, prove that a^2 will be the A. M. between mn and $\frac{1}{2}(m^2+n^2)$.

(ii) If $\frac{1}{b}$ be the A. M. between $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{c}$, then $ab+bc$ will be the A. M. between $ab+ac$ and $ac+bc$.

32. Two men set out to meet each other from two places 165 miles apart. One travels 15 miles on the first day, 14 miles on the second, 13 miles on the third, and so on. The other travels 10 miles on the first day, 12 miles on the second day, 14 miles on the third, and so on. When will they meet? [*1962 Addl.*]

33. A class consists of a number of boys whose ages are in A. P., the common difference being 4 months. If the youngest boy is just 8 years old, and the sum of the ages of all the boys is 168 years, find the average age of a boy in the class. [*1958 Addl.*]

34. A man undertakes to pay off a debt of Rs. 65 by monthly instalments; he pays Rs. 2 in the first month and continually increases the instalment in every subsequent month by Re. 1. In what time will the debt be cleared up?

35. Timber is piled at 20 places on a road at intervals of a quarter of a mile. It is to be collected by a lorry which starts from a depot 1 mile off from the nearest pile, visits the piles in order, and after collecting the timber at a pile returns to the depot each time to unload it. If the speed of the lorry

is 15 miles per hour, and if it takes 25 minutes to load a pile of timber on to the lorry, and 15 minutes to unload it, find the total time to complete the work.

ANSWERS

1. (i) 213, 397. (ii) 100, 574·5. (iii) $a+16b$, $a+48b$. (iv) 40, $\frac{5}{2}(n+3)$.

2. (i) 201. (ii) 50. (iii) $\alpha+195\beta$. (iv) $40a-39b$.

3. (i) -387; -18900. (ii) $-9\frac{3}{5}$; -235.
(iii) $a+(2n-5)x$; $n\{a+(n-4)x\}$. (iv) $n+1-\frac{2}{n}$; $n^2+\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}$.

4. $-\frac{10}{9}$; $\frac{5}{9}n(19-n)$. **5.** (i) 100th. (ii) No.

6. (i) -11; -21. (ii) 68·75. (iii) 1547. (iv) $\frac{1}{8}n(15n-29)$.

7. (i) 17. (ii) 10. (iii) 23. **8.** $2n^2-5n$.

9. (i) 465. (ii) $4r+1$; 4. **10.** (i) 228. (ii) 416. (iii) -370.

11. 6800. **12.** 89. **13.** (i) 24570. (ii) 29406.

14. 59. **15.** $39\frac{1}{2}$. **17.** $-4, -1, 2, 5, 8$.

18. 75, 79, 83, 87, 91. **19.** 8 or 16. **20.** -10, 30.

25. (i) 10, 13.........67. (ii) $8\frac{1}{3}, 8\frac{1}{6}, \ldots\ldots, 2\frac{1}{2}$.
(iii) $\frac{1}{2}(p-q), 0, \frac{1}{2}(q-p)$. **26.** 31.

28. -2, 67. **32.** After 6 days. **33.** 10 yrs. 6 months.

34. 10 months. **35.** 22 hrs. 20 min.

স্বাভাবিক সংখ্যা-সংক্রান্ত শ্রেণী
(Series relating to natural numbers)

11·7. স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers).

1 হইতে আরম্ভ করিয়া 1, 2, 3,... ইত্যাদি পর পর ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (natural numbers) বলে।

(A) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি।

প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা 1, 2, 3, 4,.... n ; ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী, এবং ইহার প্রথম পদ 1 ও সাধারণ অন্তর 1.

∴ ইহাদের সমষ্টি S হইলে, § 11·4 অনুসারে

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1). \qquad \cdots\ \text{(I)}$$

(B) প্রথম n-সংখ্যক অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি।

1, 3, 5,........ অযুগ্ম সংখ্যাগুলি স্পষ্টতঃই একটি সমান্তর শ্রেণীর অন্তর্গত, ইহাদের সাধারণ অন্তর 2. ইহাদের n পদের সমষ্টি যদি S হয়, তবে

$$S = \frac{n}{2}\{2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2.$$

অর্থাৎ, $\mathbf{S = 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + n}$**-তম পদ পর্যন্ত** $\mathbf{= n^2.}$ .... (II)

দ্রষ্টব্য। এই শ্রেণীর n-তম অর্থাৎ শেষ পদ $= (2n-1)$.

(C) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সমষ্টি।

নির্ণেয় সমষ্টি যদি S হয় তবে

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2.$$

এখন, $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ একটি অভেদ।

এই অভেদে n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3,........ n বসাইয়া আমরা পাই

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1,$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3n + 1.$$

∴ যোগ করিয়া,

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$
$$= 3S - 3.\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

$$\therefore \; 3S = n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left\{(n-1) + \frac{3}{2}\right\}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \qquad \therefore \; S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$$\therefore \; \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.} \quad \ldots. \; \text{(III)}$$

(D) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ঘনের সমষ্টি নির্ণয়।

স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ঘনের সমষ্টি যদি S দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$$

এখন $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ এক অভেদ ;

এই অভেদে n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3,........ n বসাইয়া আমরা পাই

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1,$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1,$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1.$$

$\therefore$ যোগ করিয়া,

$$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n$$
$$=4S-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n.$$

$$\therefore\quad 4S=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)\{(n^2-n+1)+2n+1-2\}=n(n+1)(n^2+n)$$
$$=n^2(n+1)^2.$$

$$\therefore\quad S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

অর্থাৎ $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\{\tfrac{1}{2}n(n+1)\}^2}$. .... (IV)

সুতরাং, আমরা লিখিতে পারি

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2.$$

দ্রষ্টব্য : গ্রীক্ অক্ষর Σ (sigma) কোন পদের পূর্বে বসিলে তজ্জাতীয় সমস্ত পদের সমষ্টি বুঝায়। যেমন, $\Sigma n=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n$ এবং $\Sigma\, n(n+1)=1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$. Σ সাহায্যে আমরা লিখিতে পারি $\Sigma\, n=\frac{1}{2}n(n+1)$; $\Sigma\, n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

$$\Sigma\, n^3=(\Sigma n)^2=\{\tfrac{1}{2}n(n+1)\}^2\ ;\ \text{ইত্যাদি।}$$

আমরা স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের এবং উহাদের বর্গ এবং ঘনের সমষ্টি-নির্দেশক উপরে লব্ধ সূত্রগুলি সাহায্যে স্বাভাবিক সংখ্যা সংক্রান্ত বিবিধ শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করিতে পারি। এই সকল ক্ষেত্রে প্রথমতঃ প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম

পদ স্থির করতঃ n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3,........ প্রভৃতি ক্রমান্বয়ে বসাইয়া সমষ্টি নির্ণয় করিতে হয়। নিম্নে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Sum to n terms the series* $1.3+3.5+5.7+7.9+\cdots$

প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ $=\{1+(n-1)\times 2\}\{3+(n-1)\times 2\}$

$$=(2n-1)(2n+1)=4n^2-1.$$

এখন n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3,........ n বসাইয়া আমরা পাই

প্রথম পদ $=4.1^2-1,$

দ্বিতীয় পদ $=4.2^2-1,$

তৃতীয় পদ $=4.3^2-1,$

....

n-তম পদ $=4.n^2-1.$

প্রদত্ত শ্রেণীটির পদসমষ্টি S হইলে, আমরা যোগ করিয়া পাই

$$S=4(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-n$$

$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\frac{n\{(2n+2)(2n+1)-3\}}{3}$$

$$=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}.$$

Ex. 2. *Sum the series* $2^2+5^2+8^2+\cdots\cdots$ *to n terms.*

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীর নির্ণেয় সমষ্টি S.

স্পষ্টতঃই প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ 2, 5, 8,........ শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ।

$\therefore$ ইহার n-তম পদ $=\{2+(n-1)\times 3\}^2=9n^2-6n+1.$

এক্ষণে n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3,........ n বসাইয়া আমরা পাই

প্রথম পদ $=9.1^2-6.1+1,$

দ্বিতীয় পদ $=9.2^2-6.2+1,$

তৃতীয় পদ $=9.3^2-6.3+1,$

....

n-তম পদ $=9.n^2-6n+1.$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $S = 9\,\Sigma n^2 - 6\,\Sigma n + n$

$$= 9 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n\{(3n+3)(2n+1) - 6n - 6 + 2\}}{2}$$

$$= \frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}.$$

Ex. 3. *Sum the series* $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots\cdots$ *to n terms.*

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীর নির্ণেয় সমষ্টি S.

প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $= n(n+1)^2 = n(n^2 + 2n + 1) = n^3 + 2n^2 + n.$

এখন n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ বসাইয়া আমরা পাই

প্রথম পদ $= 1^3 + 2.1^2 + 1,$

দ্বিতীয় পদ $= 2^3 + 2.2^2 + 2,$

তৃতীয় পদ $= 3^3 + 2.3^2 + 3,$

....

n-তম পদ $= n^3 + 2.n^2 + n.$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $S = \Sigma n^3 + 2.\Sigma n^2 + \Sigma n$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n^2+n}{2} + \frac{2(2n+1)}{3} + 1\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + 11n + 10)}{12}.$$

Ex. 4. *Sum the series* $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots\cdots$ *to n terms.*

প্রদত্ত শ্রেণীটির পদসমষ্টি n যুগ্ম কি অযুগ্ম তাহার উপর নির্ভরশীল।

প্রথমতঃ, n যদি যুগ্ম হয়, তবে শেষ পদ $-n$ (ঋণাত্মক) হইবে এবং প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম পদ হইতে পর পর দুইটি পদ একজোড়া বন্ধনীর অন্তর্গত করিয়া আমরা নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে পারি। সর্বসমেত $\frac{1}{2}n$ সংখ্যক জোড়া বন্ধনী হইবে।

$(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots\cdots+\{(n-1)-n\}$

$= -1\times\frac{1}{2}n$ [$\because$ প্রত্যেক বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিদ্বয়ের সমষ্টি -1]

$= -\frac{1}{2}n.$

দ্বিতীয়তঃ, n অযুগ্ম হইলে শেষ পদ n ধনাত্মক হইবে এবং তখন প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম পদ বাদ দিয়া তৎপরবর্তী দুইটি দুইটি পদ বন্ধনীর মধ্যে আমরা নিম্নলিখিত মতো স্থাপন করিতে পারি। এখানে বন্ধনী-সংখ্যা $\frac{1}{2}(n-1)$.

$1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots\cdots+\{-(n-1)+n\}$

$=1+[1+1+1+\cdots\cdots$ $\frac{1}{2}(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত]

$=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}(n+1)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি (i) $-\frac{1}{2}n$, n-যুগ্ম হইলে,

অথবা, (ii) $\frac{1}{2}(n+1)$, n-অযুগ্ম হইলে।

Ex. 5. *Sum the series* $1+(3+5)+(7+9+11)+\cdots\cdots$ *to n terms.*

প্রদত্ত শ্রেণীটির বন্ধনীগুলি অপসারণ করিলে প্রথম হইতে স্বাভাবিক অযুগ্ম সংখ্যাগুলি পাওয়া যায়। এখন, প্রদত্ত শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত স্বাভাবিক অযুগ্ম সংখ্যা কতগুলি হইবে তাহা নির্ণয় করিলেই নির্ণেয় পদসমষ্টি স্থির করা যাইবে।

প্রদত্ত শ্রেণীর পদগঠন-পদ্ধতি লক্ষ্য করিলে দেখা যায়, এই শ্রেণীর প্রথম পদ একটি, দ্বিতীয় পদ দুইটি, তৃতীয় পদ তিনটি,$\cdots\cdots$ এবং n-তম পদ n-সংখ্যক স্বাভাবিক অযুগ্ম সংখ্যা লইয়া গঠিত।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর পদসংখ্যা $=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=$ প্রথম $\frac{1}{2}n(n+1)$-সংখ্যক স্বাভাবিক অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি

$=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$. [§ 11·7 (II)]

Ex. 6. *Find the sum of the series* $1+3+6+10+15+\cdots\cdots$ *to n terms.*

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ t_n এবং নির্ণেয় সমষ্টি S.

$\therefore$ $S=1+3+6+10+15+\cdots\cdots+t_n$

আবার $S=1+3+6+10+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n$

বিয়োগ করিয়া $0=1+2+3+4+5+\cdots\cdots(t_n-t_{n-1})-t_n.$

$\therefore$ $t_n=1+2+3+4+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

এখন n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, ... n বসাইলে

প্রথম পদ $t_1 = \frac{1}{2}.1^2 + \frac{1}{2}.1$

দ্বিতীয় পদ $t_2 = \frac{1}{2}.2^2 + \frac{1}{2}.2$

তৃতীয় পদ $t_3 = \frac{1}{2}.3^2 + \frac{1}{2}.3$

....

n-তম পদ $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

যোগ করিয়া, $S = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Ex. 7. *Sum the series* $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots\cdots$ *to* $(3n+1)$ *terms.*

আমরা মনে করিতে পারি প্রদত্ত শ্রেণীটি (i) 1, 4, 7, 10,........, (ii) 2, 5, 8, 11,........ এবং (ii) $-3, -6, -9, -12, \cdots\cdots$ এই শ্রেণীত্রয় লইয়া গঠিত। প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় পদ যথাক্রমে, (i), (ii) ও (iii) শ্রেণীর প্রথম পদ এবং এই (i), (ii) ও (iii) শ্রেণীর দ্বিতীয় পদগুলি প্রদত্ত শ্রেণীর যথাক্রমে চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ। সুতরাং, এই তিন শ্রেণীর n-তম পদগুলি প্রদত্ত শ্রেণীর $(3n-2)$-তম, $(3n-1)$-তম ও $3n$-তম পদ হইবে।

এক্ষণে, (i) শ্রেণীর n-তম পদ $= 1 + (n-1)\times 3 = 3n-2$,

(ii) শ্রেণীর n-তম পদ $= 2 + (n-1)\times 3 = 3n-1$,

ও (iii) শ্রেণীর n-তম পদ $= -3 + (n-1)\times(-3) = -3n.$

সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণীর $3n$-তম পদ $-3n$ এবং ইহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদদ্বয় $(3n-1)$ এবং $(3n-2)$.

এই তিন পদের সমষ্টি $= (3n-2) + (3n-1) + (-3n) = 3n-3.$

এবং প্রদত্ত শ্রেণীর $(3n+1)$-তম পদ $= 3n+1.$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 3\Sigma n - 3\Sigma 1$

$$= \tfrac{3}{2}n(n+1) - 3n = \tfrac{3}{2}n(n-1).$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর $(3n+1)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \tfrac{3}{2}n(n-1) + 3n + 1 = \tfrac{1}{2}(3n^2 + 3n + 2).$$

দ্রষ্টব্য। লব্ধ সমষ্টিতে $n=1$ বসাইলে আমরা প্রদত্ত শ্রেণীর $(3n+1)$ অর্থাৎ চারিটি পদের সমষ্টি 4 পাই এবং $n=2$ বসাইলে আমরা প্রদত্ত শ্রেণীর সাতটি পদের সমষ্টি 10 পাই।

Ex. 8. *Sum the series* $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2 \cdots\cdots$ *to n terms.*

এই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, n যুগ্ম কি অযুগ্ম তার উপর নির্ভরশীল।

n যুগ্ম হইলে, মনে কর, $n=2m$. তাহা হইলে প্রদত্ত শ্রেণীর m-সংখ্যক অযুগ্ম স্থানীয় সংখ্যা 1^2, 3^2, 5^2,···· প্রভৃতি, ধনাত্মক এবং যুগ্মস্থানীয় m-সংখ্যক পদ 2^2, 4^2, 6^2,···· প্রভৃতি, ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীটি $=1^2+3^2+5^2+m$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$-(2^2+4^2+6^2+\cdots m$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)$

$$=\Sigma(2m-1)^2-\Sigma(2m)^2$$

$$=4\Sigma m^2-4\Sigma m+\Sigma 1-4\Sigma m^2$$

$$=-4.\frac{m(m+1)}{2}+m=-2m^2-2m+m$$

$$=-m(2m+1)=-\tfrac{1}{2}n(n+1) \qquad [\because n=2m]$$

n অযুগ্ম হইলে মনে কর, $n=2m+1$. $\quad\therefore\ m=\frac{1}{2}(n-1)$.

প্রদত্ত শ্রেণীটির পদসংখ্যা অযুগ্ম হইলে, অযুগ্মস্থানীয় পদগুলি যুগ্মস্থানীয় পদগুলি অপেক্ষা সংখ্যায় 1 বেশী হইবে অর্থাৎ যুগ্মস্থানীয় পদের সংখ্যা m এবং অযুগ্ম-স্থানীয় পদের সংখ্যা $m+1$ হইবে।

$1^2, 3^2, 5^2,\cdots\cdots$ শ্রেণীর $(m+1)$-তম পদ $=(2m+1)^2$.

সুতরাং, এই শ্রেণীর $(m+1)$-সংখ্যক পদসমষ্টি, এই শ্রেণীর m-সংখ্যক পদ-সমষ্টির সহিত $(m+1)$-তম পদ $(2m+1)^2$ যোগ করিয়া পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি

$=1^2+3^2+5^2+\cdots\ (m+1)$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$-(2^2+4^2+6^2+\cdots\ m$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)$

$$=\Sigma(2m-1)^2+(2m+1)^2-\Sigma(2m)^2$$

$$=4\Sigma m^2-4\Sigma m+\Sigma 1+4m^2+4m+1-4\Sigma m^2$$

$$=-4.\frac{m(m+1)}{2}+m+4m^2+4m+1$$

$$=-2m^2-2m+m+4m^2+4m+1$$

$$=2m^2+3m+1=(m+1)(2m+1)=\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি $=\pm\frac{1}{2}n(n+1)$.

Ex. 9. *The* $(2n+1)$*th term of a series is* $\frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(4n+3)$; *determine the series and find the sum to n terms.*

নির্ণেয় শ্রেণীটির $(2n+1)$-তম পদ $= \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(4n+3)$.

এখন $(2n+1)$-এ n-এর পরিবর্তে $\frac{n-1}{2}$ বসাইয়া $(2n+1)$-এর মান পাই

$$\frac{2(n-1)}{2}+1, \text{ অর্থাৎ } n.$$

∴ প্রদত্ত $(2n+1)$-তম পদ $\frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(4n+3)$-তে n-এর স্থলে $\frac{n-1}{2}$ বসাইয়া পাই

$$\text{নির্ণেয় শ্রেণীর } n\text{-তম পদ} = \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{n-1}{2}+1\right)\left(4\cdot\frac{n-1}{2}+3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot(n-1+1)(2n-2+3)$$

$$= \frac{1}{6}.n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

∴ (n-এর পরিবর্তে যথাক্রমে 1, 2, 3,........ বসাইয়া ও যোগ করিয়া এই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{1}{3}\Sigma n^3 + \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{6}\Sigma n$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{12}.n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Ex. 10. *Find the sum of all integers which are perfect squares between* 51 *and* 600.

51 এবং 600-এর বর্গমূল নির্ণয় করিয়া সহজেই আমরা দেখিতে পাই যে, 51 এবং 600 এর মধ্যে ক্ষুদ্রতম বর্গরাশি $64\,(=8^2)$ এবং বৃহত্তম বর্গরাশি $576(=24^2)$.

∴ নির্ণেয় বর্গরাশিগুলির যোগফল

$$=8^2+9^2+10^2+\cdots\cdots+24^2$$
$$=(1^2+2^2+\cdots\cdots+24^2)-(1^2+2^2+\cdots\cdots+7^2)$$
$$=\tfrac{1}{6}\cdot 24\cdot(24+1)(2\cdot 24+1)-\tfrac{1}{6}\cdot 7(7+1)(2\cdot 7+1)$$
$$=\tfrac{1}{6}(24\cdot 25\cdot 49-7\cdot 8\cdot 15)=4900-140$$
$$=4760.$$

Examples XI(b)

1. Sum the following series :

(i) $2+4+6+8+\cdots\cdots$ to $2n$ terms.

(ii) $1+2-3+4+5-6+\cdots\cdots$ to $3n$ terms.

2. Sum the series :

(i) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots$ to n terms. [*1950 Addl.*]

(ii) $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots$ to n terms.

3. Sum the series :

(i) $1.2+2.3+3.4+4.5+\cdots\cdots$ to n terms.

(ii) $1.4+3.6+5.8+7.10+\cdots\cdots$ to n terms.

(iii) $1.7+3.9+5.11+\cdots\cdots$ to n terms.

4. Sum the series :

(i) $1.2+4.5+7.8+10.11+\cdots\cdots$ to n terms.

(ii) $3.8+6.11+9.14+\cdots\cdots$ to n terms.

[*1954 Addl., Compartmental*]

5. Sum the series $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots$ to n terms.

6. Sum the series :

(i) $1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots\cdots$ to n terms.

(ii) $2+(2+4)+(2+4+6)+\cdots\cdots$ to $2n$ terms.

7. Sum the series :

(i) $1.2.3+4.5.6+7.8.9+\cdots\cdots$ to n terms.

(ii) $1.2.3+2.4.6+3.6.9+4.8.12+\cdots\cdots$ to n terms.

8. Sum the series :

(i) $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots\cdots$ to 100 terms. [*1954 Addl.*]

(ii) $1.3^2+3.5^2+5.7^2+7.9^2+\cdots\cdots$ to n terms.

9. Sum the series :

(i) $3+7+13+21+\cdots\cdots$ to n terms.

(ii) $5+6+9+14+\cdots\cdots$ to n terms.

(iii) $1+5+13+25+41+\cdots\cdots$ to n terms.

10. Sum to $(2n+1)$ terms the series $1-2+3-4+\cdots\cdots$

11. Find the sum of all integers which are perfect squares

(i) between 90 and 890, [*1957 Addl.*]

(ii) between 39 and 17823. [*1960 Addl.*]

12. Find the sum of all the odd numbers which are perfect squares between 50 and 10000.

ANSWERS

1. (i) $2n(2n+1)$. (ii) $\frac{3}{2}n(n-1)$. **2.** (i) $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$. (ii) $n^2(2n^2-1)$. **3.** (i) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. (ii) $\frac{1}{3}n(4n^2+9n-1)$. (iii) $\frac{1}{3}n(4n^2+18n-1)$. **4.** (i) $n(3n^2-1)$. (ii) $3n(n+1)(n+3)$.

5. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. **6.** (i) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. (ii) $\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$. **7.** (i) $\frac{3}{4}n(n+1)(9n^2-3n-2)$. (ii) $\frac{3}{2}n^2(n+1)^2$. **8.** (i) 26876100. (ii) $\frac{1}{3}n(6n^3+16n^2+9n-4)$.

9. (i) $\frac{1}{3}n(n^2+3n+5)$. (ii) $\frac{1}{6}n(2n^2-3n+31)$. (iii) $\frac{1}{3}n(2n^2+1)$. **10.** $n+1$. **11.** (i) 8270. (ii) 792988. **12.** 166566.

গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression)

11·8. গুণোত্তর শ্রেণী (Geometrical Progression).

যদি একটি শ্রেণী এইরূপ হয় যে, উহার অন্তর্গত যে-কোন পদের এবং উহার অব্যবহিত পূর্বপদের অনুপাত সতত একই থাকে, তবে ঐ শ্রেণীকে গুণোত্তর শ্রেণী (geometric series) বা গুণোত্তর প্রগতিতে অবস্থিত (in Geometrical Progression) বলে, এবং এই নির্দিষ্ট অনুপাত এই গুণোত্তর শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** (*common ratio*) নামে অভিহিত।

নিম্নে কয়েকটি গুণোত্তর শ্রেণীর দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল :

(i) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots$; সাধারণ অনুপাত 2.

(ii) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\ldots$; সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$.

(iii) $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots\ldots$; সাধারণ অনুপাত r.

(iv) $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{a^5}, \sqrt{a^7}, \sqrt{a^9}, \ldots\ldots$; সাধারণ অনুপাত a.

(v) $\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1, \ldots\ldots$; সাধারণ অনুপাত $\sqrt{2}+1$.

(iii)-শ্রেণীটি গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ আকার।

11·9. গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম পদ (nth term).

সাধারণ গুণোত্তর শ্রেণী $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$ এর পদগুলি পর্যবেক্ষণ করিয়া ইহার n-তম পদ নির্ণয় করিব।

এই গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি একটু লক্ষ্য করিলে দেখিতে পাই যে, প্রত্যেক পদে 'r'-এর ঘাতের সূচক, পদটির অবস্থিতি-নির্দেশক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম। এই শ্রেণীর পদসংখ্যা যদি n হয়, তবে শেষ অর্থাৎ n-তম পদে 'r'-এর ঘাতের সূচক $(n-1)$ হইবে। সুতরাং, পদটি l দ্বারা সূচিত করিলে

$$l = ar^{n-1}. \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (I)$$

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত দেওয়া থাকিলে এই সূত্র হইতে ঐ শ্রেণীর যে-কোন পদ সহজেই বাহির করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : কোন গুণোত্তর শ্রেণীর নির্দিষ্ট যে-কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম পদ m, এবং q-তম পদ n দেওয়া আছে।

যদি এই গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হয়, তবে সূত্রানুসারে $m = ar^{p-1}$ এবং $n = ar^{q-1}$.

$$\therefore \frac{m}{n} = r^{p-q}. \qquad \therefore r = (m/n)^{\frac{1}{p-q}},$$

$$\text{এবং } a = \frac{m}{r^{p-1}} = m \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p-1}{p-q}} = m^{\frac{1-q}{p-q}} n^{\frac{p-1}{p-q}}.$$

এক্ষণে a এবং r নির্ণীত হওয়ায়, যে-কোন পদ নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ সম্পূর্ণ শ্রেণীটি নির্ণয় করা যায়।

11·10. গুণোত্তর শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

মনে কর, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r পদসংখ্যা n এবং নির্ণেয় পদসমষ্টি S.

$$\therefore \quad S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1}. \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

উভয়পক্ষকে r দ্বারা গুণ করিয়া

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n. \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$S(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n).$$

$$\therefore \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{a(1-r^n)}}{\mathbf{1-r}}. \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \text{(II)}$$

$$= \frac{\mathbf{a(r^n-1)}}{\mathbf{r-1}}. \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \text{(III)}$$

দ্রষ্টব্য। গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি-নির্দেশক রাশির উভয় আকার (II) এবং (III) মনে রাখা প্রয়োজন। সাধারণ অনুপাত r যখন ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর তখন আকার (III) এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে আকার (II) প্রযোজ্য।

11·11. গুণোত্তর মধ্যক (Geometric Mean).

গুণোত্তর শ্রেণীতে অবস্থিত তিনটি রাশির মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুই রাশির **গুণোত্তর মধ্যক** (Geometric Mean বা সংক্ষেপে G. M.) বলে।

(A) নির্দিষ্ট দুই রাশি a এবং b-এর গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয়।

মনে কর, নির্দিষ্ট রাশি দুইটি a এবং b এবং G উহাদের গুণোত্তর মধ্যক।

গুণোত্তর শ্রেণীর অন্তর্গত গুণোত্তর মধ্যকের সংজ্ঞানুসারে a, G, b রাশিত্রয় একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

$\therefore \quad \dfrac{G}{a} = \dfrac{b}{G}$. [∵ উভয়েই এই গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত।]

$\therefore \quad G^2 = ab$ অর্থাৎ $\mathbf{G = \sqrt{ab}}$.

যদি নির্দিষ্ট দুই রাশি a এবং b-এর মধ্যে n-সংখ্যক $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n$ রাশিগুলি এমনভাবে সন্নিবিষ্ট করা যায় যে, $a, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, b$ এই $(n+2)$-সংখ্যক রাশি একটি গুণোত্তর শ্রেণী উৎপন্ন করে, তবে a এবং b এর মধ্যবর্তী $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ এই n-সংখ্যক রাশিকে a এবং b এর গুণোত্তর মধ্যক বলে।

(B) নির্দিষ্ট দুই রাশির মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তর মধ্যক সন্নিবেশ।

মনে কর, নির্দিষ্ট রাশিদ্বয় a ও b এবং নির্ণেয় গুণোত্তর মধ্যকের সংখ্যা n. সুতরাং, এখানে সর্বসমেত পদসংখ্যা $(n+2)$. এখন, আমাদের $(n+2)$-সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণী নির্ণয় করিতে হইবে যার প্রথম পদ a এবং শেষ অর্থাৎ $(n+2)$-তম পদ b.

নির্ণেয় এই গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত r হইলে ইহার $(n+2)$-তম পদ

$$b = ar^{n+1} \quad \text{বা} \quad r^{n+1} = \frac{b}{a}, \quad \therefore \; r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় গুণোত্তর মধ্যকগুলি $ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots, ar^n$,

যেখানে $r = (b/a)^{\frac{1}{n-1}}$.

11·12. গুণোত্তর শ্রেণী-সংক্রান্ত উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the 7th term of the series* $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots\ldots$

এখানে, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2} \div (-\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2}$ এবং নির্ণেয় পদের অবস্থিতি-নির্দেশক সংখ্যা $=7$.

$\therefore$ শ্রেণীটির সপ্তম পদ

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{7-1} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^6 = -\frac{3^5}{2^6} = -\frac{243}{64}.$$

Ex. 2. *Find the nth term of the series*

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a^3},\ \sqrt{a^5},\ \sqrt{a^7}, \ldots\ldots$$

এখানে সাধারণ অনুপাত $= \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a^2} = a$.

$\therefore$ শ্রেণীটির n-তম পদ

$$= \sqrt{a}\cdot a^{n-1} = \sqrt{a}.\ \sqrt{a^{2(n-1)}} = \sqrt{a \cdot a^{2n-2}} = \sqrt{a^{2n-1}}.$$

Ex. 3. *Find the 10th term of the G. P. whose 4th and 11th terms are the respectively* 3 *and* $\frac{1}{729}$.

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore\; 3 =$ এই শ্রেণীর চতুর্থ পদ $= ar^3$. .... (1)

এবং $\frac{1}{729} =$ এই শ্রেণীর একাদশ পদ $= ar^{10}$. .... (2)

(2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করিলে, $r^7=\frac{1}{2187}=\left(\frac{1}{3}\right)^7$. $\therefore\ r=\frac{1}{3}$.

'r'এর এই লব্ধ মান $\frac{1}{3}$ (1)-এ বসাইলে $\frac{a}{27}=3$. $\therefore\ a=81$.

$\therefore$ এই শ্রেণীর নির্ণেয় দশম পদ $=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$.

অথবা, একাদশ পদ $\frac{1}{729}$ কে সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ দ্বারা ভাগ করিয়াও দশম পদ নির্ণয় করা যায়।

Ex. 4. *The sum of the first 2 terms of a G. P. is 2 and that of the next 2 terms is 18. Determine the series.*

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore$ শ্রেণীটির প্রথম চারিটি পদ a, ar, ar^2, ar^3.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $a+ar=2$, বা, $a(1+r)=2$. .... (1)

এবং $ar^2+ar^3=18$, বা, $ar^2(1+r)=18$. .... (2)

এখন (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^2=9$. $\therefore\ r=\pm 3$.

যখন $r=3$, তখন (1) হইতে, $4a=2$, অর্থাৎ $a=\frac{1}{2}$

আবার, যখন $r=-3$, তখন (1) হইতে, $-2a=2$, অর্থাৎ $a=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 13\frac{1}{2},\ldots\ldots$

অথবা, $-1, 3, -9, 27,\ldots\ldots$

Ex. 5. *Find three quantities in G. P. such that their product is 27 and their sum is* $24\frac{3}{7}$.

মনে কর, রাশি তিনটি যথাক্রমে $\frac{a}{r}\cdot a, ar$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{a}{r}\cdot a\,.\,ar=27$. .... (1)

এবং $\frac{a}{r}+a+ar=\frac{171}{7}$. .... (2)

(1) হইতে, $a^3=27$, $\therefore\ a=3$.

$\therefore$ (2) হইতে, $3(1+r+r^2)=\frac{171}{7}r$, বা, $21r^2+21r+21=171r$,

বা, $7r^2-50r+7=0$, বা, $(7r-1)(r-7)=0$.

$\therefore\ r=7$ বা, $\frac{1}{7}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $\frac{3}{7}$, 3, 21.

দ্রষ্টব্য। $r=\frac{1}{r}$ ধরিলে বিপরীতক্রমে এই রাশিত্রয় পাওয়া যাইবে।

Ex. 6. *If a, b, c, d, e be in G. P., prove that $a+c, b+d, c+e$ are also in G. P.*

যেহেতু a, b, c, d, e, একটি গুণোত্তর শ্রেণী,

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}.$$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{b+d}{c+e}.$

$\therefore$ $a+c, b+d, c+e$, একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

Ex. 7. *Insert 7 geometric means between 7 and 1792.*

7 এবং 1792 এর মধ্যে সাতটি গুণোত্তর মধ্যক স্থাপন করিয়া যে গুণোত্তর শ্রেণী উৎপন্ন হইবে, মনে কর, তাহার সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore$ 1792 (এই গুণোত্তর শ্রেণীর নবম পদ) $=7.r^8$.

$\therefore$ $r^8=256=2^8$. $\qquad \therefore$ $r=\pm 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি 14, 28, 56, 112, 224, 448 এবং 896,
বা, $-14, 28, -56, 112, -224, 448$ এবং -896.

Ex. 8. *The sum of the first 6 terms of a G. P. is 9 times the sum of the first 3 terms. If the 7th term be 384, find the sum of the first 10 terms.* [*1956 Addl.*]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে প্রথম n পদের সমষ্টি $=a\dfrac{r^n-1}{r-1}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $a\dfrac{r^6-1}{r-1}=9.a\dfrac{r^3-1}{r-1}$.

$\therefore$ $r^3+1=9$ বা, $r^3=8$. $\qquad \therefore$ $r=2$.

পুনরায়, সপ্তম পদ $ar^6=384$.

$$\therefore \quad a=\frac{384}{r^6}=\frac{384}{2^6}=\frac{384}{64}=6.$$

অতএব, প্রথম দশটি পদের সমষ্টি

$$=a\frac{r^{10}-1}{r-1}=6\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=6.1023=6138.$$

Ex. 9. *Sum to n terms the series*

$$5+55+555+5555+\cdots\cdots$$

প্রদত্ত শ্রেণী $=\frac{5}{9}\{9+99+999+9999+\cdots\}$

$$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\}.$$

∴ নির্ণেয় n পদের যোগফল

$$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots n \text{ পদ পর্যন্ত})-n\}$$

$$=\frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5}{9}n.$$

Ex. 10. *If a, b, c be the p^{th}, q^{th} and r^{th} terms respectively of a G. P., prove that $a^{q-r}\times b^{r-p}\times c^{p-q}=1$.* [*1953 Addl.*]

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত k.

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$a=ak^{p-1},\ b=ak^{q-1},\ c=ak^{r-1}.$$

$$\therefore\ a^{q-r}\times b^{r-p}\times c^{p-q}=(ak^{p-1})^{q-r}.(ak^{q-1})^{r-p}.(ak^{r-1})^{p-q}$$

$$=a^{q-r+r-p+p-q}k^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$=a^{\circ}k^{\circ}=1.$$

Examples XI(c)

1. Find the 5th, 8th and nth terms of the following series :

(i) 3, 6, 12, 24,···· (ii) 243, 81, 27,····

(iii) 64, -32, 16,···· (iv) 6, -4, $2\frac{2}{3}$,····

2. Which term of

(i) the series $\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ is $\frac{1}{\sqrt{6}}$?

(ii) the series ·8, $-$·4, ·2,···· is $-$·00625 ?

3. Find the last term, and the sum of the following series :

(i) 2, 3, $4\frac{1}{2}$,···· to 7 terms. (ii) 81, -27, 9,···· to 10 terms.

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}$,···· to 10 terms.

(iv) $x, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}$,···· to p terms.

4. Find the series in G. P. in which (i) the 10th terms is 448 and the 6th term is 28 ; (ii) the 5th term is $\frac{27}{16}$ and the 10th term $\frac{2}{9}$.

5. The 2nd and 5th terms of a G. P. are 1 and $\frac{1}{8}$; find its 8th term.

6. (i) Find the 3rd term of the series in which the 4th and 5th terms are together equal to 3, and the next two terms together equal to 12.

(ii) Find the series in G. P. in which the 5th term is $\frac{1}{9}$th of the 3rd term, and the sum of the 2nd and 3rd terms is -36.

7. (i) How many terms of the series $3+6+12+24+\cdots$ are to be taken to make the sum 765 ? [*1956 Addl.*]

(ii) How many terms of the series $256, -128, 64, \cdots$ must be taken so that the sum may be $170\frac{5}{8}$?

8. The third term of a series in G. P. is 20, and its sixth term is 160. Find the sum of the first 10 terms of the series.

9. The 5th term of a G. P. is 48 and the 12th term is 6144. Find the sum of the first 10 terms of the series. [*1958 Addl.*]

10. The sum of 10 terms of a G. P. where common rates is 2, is 3069. Find the sum of the next 5 terms. [*1960 Addl., '58 Syllabus*]

11. (i) The sum of three numbers in G. P. is 38, and their product is 1728 ; find the numbers. [*1963 Addl.*]

(ii) Find three numbers in G. P. whose sum is 42, and product 512. [*1962 Addl.*]

(iii) The sum of three numbers in G. P. is $24\frac{4}{5}$, and their product is 64 ; find them.

(iv) Find 3 quantities in G. P. whose product is 343 and sum $30\frac{1}{3}$.

12. The sum of three numbers in G. P. is 7, and the sum of their squares is 21 ; find the sum of their cubes. [*1959 Addl.*]

13. Divide 111 into 3 parts in G. P. such that the sum of the first and third is $2\frac{1}{12}$ times the second.

14. Find the least value of n for which

$$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}>1000.$$

15. Find the sum to n terms of the series :

(i) $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots\cdots$ [*1951 Addl.*]

(ii) $3+33+333+\cdots\cdots$

16. Insert :

(i) 3 geometric means between 2 and 162. [*1949 Addl.*]

(ii) 3 geometric means between 486 and 6.

(iii) 6 geometric means between 56 and $-\frac{7}{16}$.

(iv) 6 geometric means between $\frac{64}{243}$ and $4\frac{1}{2}$.

17. The $(p+q)^{th}$ term of a G. P. is m, and the $(p-q)^{th}$ term is n. Find its p^{th} and q^{th} terms.

18. In a G. P. if x, y, z be the nth, $2n$th and $3n$th terms respectively, prove that $y^2=xz$.

[*1954 Addl. (Compartmental)*]

19. (i) Prove that the product of any two terms in a G. P. equidistant from a given term is equal to the square of the given term.

(ii) Show that the product of any odd number of consecutive terms of a G. P. is equal to the *nth* power of the middle term, n being the number of terms.

20. Each term of a G.P. is subtracted from the succeeding one ; show that the successive differences are also in G. P.

If the second progression is 2, 6, 18,$\cdots$, show that the nth term of the first progression is 3^{n-1}.

21. Three numbers in G. P., are subtracted from three other numbers also in G. P., and the remainders are found to be also in G. P. Prove that the three series have the same common ratio.

22. If a, b, c, d, e be in G. P., prove that

$$c(a+2c+e)=(b+d)^2.$$

23. If S_1, S_2, S_3 be the sum of n, $2n$, $3n$ terms of a G. P., show that

$$S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2.$$

24. If n geometric means be inserted between a and b, prove that the product of the G. M.'s $=(ab)^{\frac{1}{2}n}$.

25. A man divided some money in G. P. between his four sons so that the eldest received Rs. 1000 and the youngest Rs. 512. How much money did he divide between them ?

26. A bouncing tennis ball rebounds each time to a height one-half the height of the previous bounce. If it is dropped from height of 16 ft., find the total distance it has travelled when it hits the ground for the 10th time.

ANSWERS

1. (i) $48, 384, 3.2^{n-1}$. (ii) $3, \frac{1}{9}, 3^{6-n}$.
(iii) $4, -\frac{1}{2}, (-1)^{n-1}2^{7-n}$. (iv) $\frac{32}{27}, -\frac{256}{729}, (-1)^{n-1}2^n.3^{2-n}$.

2. (i) 6th. (ii) 8th. **3.** (i) $22\frac{25}{32}, 64\frac{11}{32}$. (ii) $-\frac{1}{243}, 121\frac{122}{243}$.
(iii) $-16,\ -31\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (iv) $\frac{y^{p-1}}{x^{p-2}}, \frac{y^p-x^p}{x^{p-2}(y-x)}$.

4. (i) $\frac{7}{8}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}, \cdots$ (ii) $\frac{2187}{256}, \frac{729}{128}, \frac{243}{64}, \cdots$ **5.** $\frac{1}{64}$.

6. (i) $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$. (ii) $-81, -27, -9, -3, \cdots$ or $162, -54, 18, -6, \cdots$

7. (i) 8. (ii) 12. **8.** 2555. **9.** 1533. **10.** 95232.

11. (i) 8, 12, 18. (ii) 2, 8, 32. (iii) $\frac{4}{5}$, 4, 20. (iv) $2\frac{1}{3}$, 7, 21.

12. 73. **13.** 27, 36, 48. **14.** 7.

15. (i) $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. (ii) $\frac{1}{27}\{10(10^n-1)-9n\}$.

16. (i) $\pm 6, 18, \pm 54$. (ii) $\pm 162, 54, \pm 18$.
(iii) $-28, 14, -7, \frac{7}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{7}{8}$. (iv) $\frac{32}{81}, \frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}, 2, 3$.

17. $\sqrt{mn}, m^{q-p+\frac{1}{2}}n^{p-q+\frac{1}{2}}$. **25.** Rs. 2952. **26.** $47\frac{15}{16}$ ft.

বিপরীত প্রগতি (Harmonical Progression)

11·13. বিপরীত প্রগতি (Harmonical Progression.)

কতকগুলি রাশি যদি এরূপভাবে অবস্থিত হয় যে, তাহাদের অন্যোন্যকগুলি (reciprocals) একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে রাশিগুলি বিপরীত প্রগতিতে (in Harmonical Progression বা সংক্ষেপে in H. P.) অবস্থিত বলা হয়।

নিম্নে কতকগুলি বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত শ্রেণীর দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল :

(i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots\ldots$

জ্যামিতি এবং পদার্থ-বিজ্ঞানের শব্দতত্ত্বে (in the Theory of Sound) বিপরীত প্রগতির গুরুত্ব সমধিক। এই প্রগতির পদসমষ্টি নির্ণয়ের কোন সাধারণ সূত্র নাই। এতৎসংক্রান্ত প্রশ্নাবলী বিপরীত প্রগতির সংজ্ঞার সাহায্যে সমাধান করা হইয়া থাকে, অর্থাৎ বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত রাশিগুলির অন্যোন্যকসমূহে সমান্তর শ্রেণীর ধর্মাবলী প্রয়োগ করিয়া এই প্রশ্নগুলি সমাধান করিতে হয়।

তিনটি রাশি, একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুই রাশির সমান্তর মধ্যক এবং একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিলে মধ্যবর্তী রাশিটিকে অপর দুই রাশির গুণোত্তর মধ্যক নামে অভিহিত করা হয়, তদ্রূপ রাশি তিনটি বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত হইলে মধ্যবর্তী রাশিটিকে **বিপরীত প্রগতি মধ্যক** বা সংক্ষেপে বিপরীত মধ্যক (*Harmonic Mean*, সংক্ষেপে H. M.) বলা হয়।

(i) *To find the* **Harmonic Mean** *between two given quantities.*

মনে কর, a, b দুইটি নির্দিষ্ট রাশি এবং H উহাদের নির্ণেয় বিপরীত প্রগতি মধ্যক।

যেহেতু, a, H, b বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত, $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

$$\therefore\ \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}. \qquad \therefore\ \mathbf{H}=\frac{\mathbf{2ab}}{\mathbf{a+b}}.$$

(ii) *To find the relation among the arithmetic mean, geometric mean and harmonic mean between two given quantities.*

A, G, H যদি a, b রাশিদ্বয়ের যথাক্রমে সমান্তর মধ্যক, গুণোত্তর মধ্যক এবং বিপরীত প্রগতি মধ্যক হয়, তবে

$$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab}\ \text{এবং}\ H=\frac{2ab}{a+b}\ \text{হয়।}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=\mathrm{G}^2.$$

সুতরাং, দুইটি রাশির গুণোত্তর মধ্যক, ঐ দুই রাশির সমান্তর মধ্যক এবং বিপরীত প্রগতি মধ্যকের গুণোত্তর মধ্যক।

অর্থাৎ, A, G, H একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

দ্রষ্টব্য। যদি a, b দুইটি **ধনাত্মক** সংখ্যা হয়, এবং A, G, H যথাক্রমে উহাদের সমান্তর মধ্যক, গুণোত্তর মধ্যক ও বিপরীত মধ্যক হয়, তবে

$$\mathrm{A}>\mathrm{G}>\mathrm{H}$$

হইবে।

কারণ, $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=$ ধনাত্মক সংখ্যা।

আবার, $G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=$ ধনাত্মক সংখ্যা।

11·14. বিপরীত প্রগতি-সংক্রান্ত উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *The 13th term of an H. P. is $\frac{3}{19}$ and the 21st term is $\frac{1}{9}$. Find the series.*

মনে কর, নির্ণেয় বিপরীত প্রগতির পদগুলির অন্যোন্যক (reciprocal)-সমূহ দ্বারা উৎপন্ন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d.

এই সমান্তর শ্রেণীর ত্রয়োদশ পদ $\frac{19}{3}=a+12d$ এবং একবিংশ পদ $9=a+20d$.

এই দুই সমীকরণ হইতে $a=2\frac{1}{3}$ এবং $d=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ সমান্তর শ্রেণীটি $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4,\ldots\ldots$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে নির্ণেয় বিপরীত প্রগতি $\frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11}, \frac{1}{4},\ldots\ldots$

Ex. 2. *If a^2, b^2, c^2 be in A. P., prove that $b+c$, $c+a$, $a+b$ are in H. P.*

যেহেতু a^2, b^2, c^2 একটি সমান্তর শ্রেণী, $\therefore\ b^2-a^2=c^2-b^2$.

উভয় পক্ষকে $(b+c)(c+a)(a+b)$ দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{b-a}{(b+c)(c+a)}=\frac{c-b}{(c+a)(a+b)},$$

বা, $$\frac{(b+c)-(c+a)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(c+a)-(a+b)}{(c+a)(a+b)},$$

বা, $$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a},$$

বা, $$\frac{2}{c+a}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}.$$

অর্থাৎ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ রাশিত্রয় একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore\ b+c, c+a, a+b$ একটি বিপরীত প্রগতি।

Ex. 3. *If $\frac{1}{2}(a+b)$, b, $\frac{1}{2}(b+c)$ be in H. P., then a, b, c are in G. P.*

বিপরীত প্রগতির সংজ্ঞানুসারে এখানে $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore\ \frac{2}{b}=\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}$, বা, $\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$,

বা, $\frac{1}{b}=\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}$,

বা, $b(a+2b+c)=(a+b)(b+c)$,

বা, $ab+2b^2+bc=b^2+ab+ac+bc$.

পক্ষান্তর করিয়া $b^2=ac$.

$\therefore\ a, b, c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

Examples XI(d)

1. (i) The 4th term of an H. P. is $\frac{2}{3}$, and the 7th term is $\frac{2}{5}$. Find the 17th term.

(ii) Find the nth term of a series in H. P., namely,

$$1\tfrac{1}{3},\ 1\tfrac{11}{17},\ 2\tfrac{2}{13},\cdots\cdots$$

2. The pth term of an H. P. is q, and the qth term is p. Prove that its $(p+q)$th term is $\frac{pq}{p+q}$. Find also its rth term.

3. Insert 3 harmonic means between $2\frac{2}{5}$ and 12.

4. If a, b, c be in H. P., prove that $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ are also in H. P.

5. If a, b, c be in A. P., and p, q, r in H.P., show that

$$\frac{a+c}{bq}=\frac{p+r}{pr}.$$

6. If a be the arithmetic mean between b and c, and b the geometric mean between a and c, prove that c will be the harmonic mean between a and b.

7. If $x-a$, $y-a$, $z-a$ be in G. P., prove that $2(y-a)$ is the harmonic mean between $y-x$ and $z-x$.

8. If a, b, c, d be in A. P., a, e, f, d in G. P., and a, g, h, d in H. P., prove that

$$ad=ef=bh=cg.$$

9. If a, b, c are in G. P., and $a^x=b^y=c^z$, prove that x, y, z are in H. P.

10. If the arithmetic mean between a and b be equal to n times the harmonic mean between them, then

$$a : b=(n+\sqrt{n^2-1}) : (n-\sqrt{n^2-1}).$$

ANSWERS

1. (i) $\frac{6}{35}$. (ii) $\frac{28}{25-4n}$. **2.** $\frac{pq}{r}$. **3.** 3, 4, 6.

11·15. বিবিধ শ্রেণী-সংক্রান্ত উদাহরণাবলী।

প্রগতি-সম্পর্কীয় বিবিধ প্রশ্নাবলীর সমাধানে বিশেষ নৈপুণ্য এবং কৌশল আবশ্যক। অনেক ক্ষেত্রে কৌশল অবলম্বনে প্রগতি-সংক্রান্ত প্রশ্নসমূহ সমাধান করা হইয়া থাকে। প্রগতির নিম্নলিখিত ধর্মাবলী স্মরণ রাখিলে শিক্ষার্থিগণ বিশেষ উপকৃত হইবে।

1. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদের সহিত যদি একই রাশি যোগ করা যায় অথবা যদি প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি বিয়োগ করা যায়, তবে যোগ বা বিয়োগলব্ধ পদগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে এবং প্রাপ্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর পূর্ববৎ হইবে।

2. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে গুণ বা ভাগলব্ধ পদগুলিও সমান্তর শ্রেণী হইবে। এই ক্ষেত্রে অবশ্য সাধারণ অন্তর পৃথক্ হইবে।

3. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে গুণ বা ভাগলব্ধ পদগুলিও একই সাধারণ অনুপাত-বিশিষ্ট অপর এক গুণোত্তর শ্রেণী হইবে।

4. গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

$a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ যদি একটি গুণোত্তর শ্রেণী হয়, তবে,

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\ldots\ldots$ হইবে। ইহা গুণোত্তর শ্রেণীর সংজ্ঞা হইতে সহজলভ্য।

নিম্নে বিবিধ শ্রেণী-সংক্রান্ত কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *The arithmetic mean between two numbers is to their geometric mean as 5 to 4, and the sum of their geometric and harmonic means is* $10\frac{4}{5}$ *; find the two numbers.*

মনে কর, নির্ণেয় রাশিদ্বয় a এবং b ও A, G, H যথাক্রমে ঐ দুই রাশির সমান্তর, গুণোত্তর এবং বিপরীত মধ্যক।

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $\frac{A}{G}=\frac{5}{4}$, ... (1)

এবং $G+H=\frac{54}{5}$. .... (2)

(1) এবং (2) গুণ করিয়া আমরা পাই $A+\frac{AH}{G}=\frac{27}{2}$,

বা, $A+G=\frac{27}{2}$ [$\because G^2=AH$] .... (3)

(1) এবং (3) হইতে আমরা সহজেই পাই $A=7\frac{1}{2}$ এবং $G=6$.

$\therefore \frac{a+b}{2}=7\frac{1}{2}$ বা $a+b=15$, ... (4)

এবং $\sqrt{ab}=6$ বা $ab=36$. .... (5)

(4) এবং (5) হইতে আমরা পাই $a=3$ বা 12,

এবং $b=12$ বা 3.

$\therefore$ নির্ণেয় রাশিদ্বয় 3, 12.

Ex. 2. *Find two numbers whose A. M. exceeds their G. M. by 8 and whose harmonic mean is $\frac{1}{5}$ of the greater number.*

মনে কর, নির্ণেয় রাশিদ্বয় $a, b(a>b)$ এবং A, G, H যথাক্রমে এই দুই রাশির সমান্তর, গুণোত্তর এবং বিপরীত মধ্যক।

$\therefore A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$ এবং $H=\frac{2ab}{a+b}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত শর্তানুসারে $A-G=8$ এবং $H=\frac{a}{5}$.

$\therefore \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=8$ বা $a+b-2\sqrt{ab}=16$,

বা, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=16$, ... (1)

এবং $\frac{a}{5}=\frac{2ab}{a+b}$ বা $a+b=10b$, বা $a=9b$ বা $\sqrt{a}=3\sqrt{b}$.

$\sqrt{a}$ এর এই মান (1) এ বসাইয়া $(3\sqrt{b}-\sqrt{b})^2=16$ বা $4b=16$.

$\therefore b=4$.

$\therefore a=9b=36$.

$\therefore$ নির্ণেয় রাশিদ্বয় 36, 4.

Ex. 3. *If x be the A. M. between y and z, y the G. M. between z and x, show that z will be the H. M. between x and y.*

যেহেতু, y এবং z এর সমান্তর মধ্যক x, $\therefore\ 2x=y+z.$ $\cdots$ (1)
আবার, z এবং x এর গুণোত্তর মধ্যক y, $\therefore\ y^2=zx.$ $\cdots$ (2)

(2) এর উভয়পক্ষে yz যোগ করিয়া আমরা পাই, $y^2+yz=zx+yz$,
বা, $y(y+z)=z(x+y)$ বা $2xy=z(x+y)$ [(1) এর সাহায্যে।]

বা, $z=\dfrac{2xy}{x+y}$.

অর্থাৎ x এবং y এর বিপরীত মধ্যক z.

Ex. 4. *If the G. M. between two quantities a and b is equal to m times the H. M. between them; show that* $a:b=m+\sqrt{m^2-1}:m-\sqrt{m^2-1}$.

প্রদত্ত রাশিদ্বয় a এবং b এর গুণোত্তর মধ্যক $=\sqrt{ab}$ এবং বিপরীত মধ্যক $=\dfrac{2ab}{a+b}$.

সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\dfrac{\sqrt{ab}}{\dfrac{2ab}{a+b}}=m$, বা $\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}=m$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\dfrac{m+1}{m-1}$,

বা, $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\dfrac{m+1}{m-1}$.

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m-1}}$.

পুনরায়, যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m-1}}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m+1+m-1+2\sqrt{m^2-1}}{m+1+m-1-2\sqrt{m^2-1}}$

$$=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

Ex. 5. *Show that the pth, qth, nth terms of a G. P. are in G. P. if p, q, n be in A. P.*

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, এবং x, y, z যদি যথাক্রমে শ্রেণীটির p-তম, q-তম, n-তম পদ হয়, তবে

$$x = ar^{p-1},\ y = ar^{q-1},\ z = ar^{n-1}.$$

এক্ষণে, x, y, z একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইবে

যদি $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\frac{ar^{q-1}}{ar^{p-1}} = \frac{ar^{n-1}}{ar^{q-1}}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r^{q-p} = r^{n-q}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $q - p = n - q$ হয়,

অর্থাৎ, যদি p, q, n যদি সমান্তর শ্রেণী হয়।

Ex. 6. *If a, b, c be in G. P., prove that* $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ *are in A. P.*

যেহেতু a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

$$\therefore \quad b^2 = ac.$$

এখন, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{a+2b+c}{b^2+ab+ac+bc}$

$$= \frac{a+2b+c}{2b^2+ab+bc}. \quad [\because b^2 = ac]$$

$$= \frac{a+2b+c}{b(a+2b+c)} = \frac{1}{b} = 2 \cdot \frac{1}{2b}.$$

$\therefore \quad \frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

Ex. 7. *If a, b, c be in G. P. and x, y be the A. M'. S between a, b and b, c respectively, show that* $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = 2$ *and* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{b}$.

যেহেতু a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী, $b^2 = ac$ এবং যেহেতু x, y যথাক্রমে a, b এবং b, c এর সমান্তর-মধ্যক $x = \frac{a+b}{2}$ ও $y = \frac{b+c}{2}$.

$$\therefore \quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{a}{\frac{a+b}{2}}+\frac{c}{\frac{b+c}{2}}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=2\cdot\frac{ab+ac+ac+bc}{(a+b)(b+c)}$$

$$=2\cdot\frac{ab+b^2+ac+bc}{ab+b^2+ac+bc}, \quad [\because b^2=ac]$$

$$=2.$$

আবার $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\frac{b+c}{2}}=\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}=2\cdot\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}$

$$=2\cdot\frac{a+2b+c}{ab+b^2+ac+bc}=2\cdot\frac{a+2b+c}{b(a+2b+c)}$$

$[\because b^2=ac]$

$$=\frac{2}{b}.$$

Ex. 8. *If $p:q$ be the duplicate ratio of $(p-r):(q-r)$, prove that p, r, q are in G. P.*

[দুই রাশির বর্গের অনুপাতকে ঐ দুই রাশির duplicate ratio কহে।]

প্রশ্ন-অনুযায়ী, $\frac{p}{q}=\frac{(p-r)^2}{(q-r)^2}=\frac{p^2-2rp+r^2}{q^2-2qr+r^2}$.

বজ্রগুণন করিয়া,

$$pq^2-2pqr+pr^2=qp^2-2pqr+qr^2.$$

পক্ষান্তর করিলে, $pq^2-qp^2=qr^2-pr^2$,

বা, $pq(q-p)=r^2(q-p)$,

বা, $pq=r^2$.

$\therefore$ p, r, q একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

Ex. 9. *If a, b, c be in A. P. and a, b, d in G. P., show that $a, a-b, d-c$ are in G. P.*

যেহেতু, a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী এবং a, b, d একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

$\therefore$ $b-a=c-b$, বা, $2b-a=c$, এবং $b^2=ad$.

এখন, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a(a-2b)+ad$. $[\because b^2=ad]$

$$=-ac+ad=a(d-c).$$

$\therefore$ a এবং $d-c$ এর গুণোত্তর-মধ্যক $(a-b)$.

অর্থাৎ, $a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

Ex. 10. *If a, b, c be in A. P. and x, y, z in G. P., show that* $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$. [*1961, 1950, Addl.*]

যেহেতু, a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী, $b-a=c-b$, অর্থাৎ, $a-b=b-c$

এবং x, y, z একটি গুণোত্তর শ্রেণী $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$.

$\therefore \left(\frac{y}{x}\right)^{b-c}=\left(\frac{z}{y}\right)^{a-b}$ [$\because a-b=b-c$]

বা, $\frac{y^{b-c}}{x^{b-c}}=\frac{z^{a-b}}{y^{a-b}}$.

বজ্রগুণন করিয়া, $x^{b-c}.z^{a-b}=y^{b-c}.y^{a-b}=y^{b-c+a-b}=y^{a-c}=\frac{1}{y^{c-a}}$.

$\therefore x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$.

Ex. 11. *If* $a:b=2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$, *prove that the A. M. between a and b is twice the G. M.*

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

$\therefore$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{4}{3}$ .... (1)

বা, $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}-1=\frac{4}{3}$, বা, $\frac{4ab}{(a-b)^2}=\frac{1}{3}$. .... (2)

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{(a+b)^2}{4ab}=4$ বা $\frac{1}{2}(a+b)=2\sqrt{ab}$.

অর্থাৎ, a, b-এর সমান্তর-মধ্যক $\frac{a+b}{2}$, উহাদের গুণোত্তর-মধ্যক $\sqrt{ab}$এর দ্বিগুণ।

Ex. 12. *The ratio of the A. M. of two numbers to their G. M. is as m : n. Show that the numbers are in the ratio of* $m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$. [*1960 Addl.*]

মনে কর, সংখ্যা দুইটি a এবং b.

$\therefore$ উহাদের সমান্তর-মধ্যক $=\frac{a+b}{2}$ এবং গুণোত্তর-মধ্যক $=\sqrt{ab}$.

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{m}{n}$.

যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n}$.

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{m+n}{m-n}$, বা, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$.

পুনরায় যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}.$$

বর্গ করিয়া, $\frac{a}{b}=\frac{m+n+m-n+2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n+m-n-2\sqrt{m^2-n^2}}$

$$=\frac{2(m+\sqrt{m^2-n^2})}{2(m-\sqrt{m^2-n^2})}$$

$$=\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}.$$

Ex. 13. *Sum the following series to n terms*

(i) $1+4+13+40+121+\cdots\cdots$

(ii) $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$

(i) প্রদত্ত শ্রেণী সমান্তর বা গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত নহে। কিন্তু পর পর দুই পদের অন্তরফলগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী। এইজাতীয় শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় নিম্নলিখিত উপায়ে করা হইয়া থাকে।

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ t_n এবং n পদের সমষ্টি S.

$\therefore \quad S=1+4+13+40+121+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n.$

আবার, $\quad S=\quad 1+4+13+40+\cdots\cdots+t_{n-2}+t_{n-1}+t_n.$

বিয়োগ করিয়া, $0=\quad 1+3+9+27+81+\cdots\cdots$

$$\cdots+(t_{n-1}-t_{n-2})+(t_n-t_{n-1})-t_n.$$

$\therefore \quad t_n=1+3+9+27+81+\cdots\cdots+$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$=\frac{3^n-1}{3-1}=\tfrac{1}{2}(3^n-1).$$

এখন nএর পরিবর্তে যথাক্রমে 1, 2, 3,........ n বসাইয়া আমরা পাই

$$t_1 = \tfrac{1}{2}(3^1 - 1)$$
$$t_2 = \tfrac{1}{2}(3^2 - 1)$$
$$t_3 = \tfrac{1}{2}(3^3 - 1)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n$

$$= s = \tfrac{1}{2}(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots\cdots + 3^n - u)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n\right\} = \tfrac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3).$$

(ii) এই শ্রেণীটিও সমান্তর বা গুণোত্তর শ্রেণী নহে। ইহার বৈশিষ্ট্য x-এর সাংখ্য-সহগগুলি সমান্তর শ্রেণী এবং x, x^2, x^3,........ প্রভৃতি পদগুলি গুণোত্তর শ্রেণী। এইজাতীয় শ্রেণীকে সমান্তর-গুণোত্তর (arithmetico-geometric) শ্রেণী বলা হয় এবং নিম্নলিখিতরূপে ইহাদের সমষ্টি নির্ণয় করা হইয়া থাকে।

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি $= S$.

ইহার n-তম পদ $= \{1 + (n-1)2\}\, x^{n-1} = (2n-1)\, x^{n-1}$.

$$\therefore \quad S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots\cdots + (2n-3)\, x^{n-2} + (2n-1)\, x^{n-1}.$$

উভয়, পক্ষকে x দ্বারা গুণ করিলে

$$Sx = x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots\cdots + (2n-5)\, x^{n-2} + (2n-3)\, x^{n-1} + (2n-1)x^n.$$

বিয়োগ করিয়া,

$$S(1-x) = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^{n-2} + 2x^{n-1} - (2n-1)x^n$$

$$= 1 + \frac{2x(1 - x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n$$

$$= \frac{1 - x + 2x - 2x^n}{1-x} - (2n-1)x^n$$

$$= \frac{1 + x - 2x^n}{1-x} - (2n-1)x^n.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $S = \dfrac{1 + x - 2x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{(2n-1)x^n}{1-x}.$

Ex. 14. -*If S be the sum, P the product and R the sum of the reciprocals of n terms in G. P., prove that* $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$.

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অনুপাত r.

$$\therefore \quad P = a.ar.ar^2....ar^{n-1} = a^n.r^{1+2+3+....+(n-1)}$$

$$= a^n.r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

এবং $R = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{ar} + \dfrac{1}{ar^2} + \cdots + \dfrac{1}{ar^{n-1}} = \dfrac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}} = \dfrac{r^n-1}{ar^{n-1}(r-1)}.$

$$\therefore \quad \left(\frac{S}{R}\right)^n = \left(\frac{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}{\frac{r^n-1}{ar^{n-1}(r-1)}}\right)^n = \left\{\frac{a(r^n-1)}{r-1} \times \frac{ar^{n-1}(r-1)}{r^n-1}\right\}^n$$

$$= (a^2r^{n-1})^n = a^{2n}.r^{n(n-1)} = \left(a^n.r^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2 = P^2.$$

Ex. 15. *Sum the following series to n groups*

$$(x+y) + (x^2+xy+y^2) + (x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots\cdots$$

n-তম পদের রাশিসমষ্টি

$$= x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y^n.$$

এখন, $(x+y) + (x^2+xy+y^2) + (x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots + (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$

$$= \frac{1}{x-y}\{(x-y)(x+y) + (x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots + (x-y)(x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n)\}$$

$$= \frac{1}{x-y}\{(x^2-y^2) + (x^3-y^3) + (x^4-y^4) + \cdots + (x^{n+1}-y^{n+1})\}$$

$$= \frac{1}{x-y}\{(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1})$$
$$- (y^2 + y^3 + y^4 + \cdots + y^{n+1})\}$$
$$= \frac{1}{x-y}\left\{\frac{x^2(1-x^n)}{1-x} - \frac{y^2(1-y^n)}{1-y}\right\}.$$

Examples XI (e)

1. If a, b, c be in A. P., and a, $(b-a)$, $(c-a)$ in G. P., prove that $a = \frac{1}{3}b = \frac{1}{5}c$. [*1961 Addl.*]

2. The numbers whose product is 512 are in G. P. If 8 be added to the first and 6 to the second, the numbers are in A. P. Find the numbers.

3. The A. M. between two numbers is three times their G. M. ; show that the numbers are as $(3+2\sqrt{2}) : (3-2\sqrt{2})$.

4. Find two numbers whose A. M. exceeds by 40 their G. M., which is one-fifth of the greater number.

5. The first three of the four positive numbers 24, x, y, 8, are in A. P., and the last three are in G. P. Find x and y.

6. If a, b, c be in G. P., and $a^x = b^y = c^z$, show that x, y, z are in H. P.

7. If a, b, c be in A. P., l, m, n in H. P., and al, bm, cn in G. P., show that

$$a : b : c = \frac{1}{n} : \frac{1}{m} : \frac{1}{l}.$$

8. A is the A. M. and G the G. M. between two quantities m and n, and k^2 is the A. M. between m^2 and n^2 ; prove that A^2 is the A. M. between G^2 and k^2.

9. If (i) one geometric mean G and two arithmetic means p, q and (ii) one arithmetic mean A and two geometric means m, n are inserted between two given quantities, prove that

(i) $G^2 = (2p-q)(2q-p)$.

(ii) $2A = (m^3 + n^3)/mn$.

10. Sum to n terms the series

(i) $3+5+9+17+33+\cdots\cdots$

(ii) $3.2+5.2^2+7.2^3+\cdots\cdots$

(iii) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots$

11. Sum to $2n$ terms the series :

(i) $\cdot 3-\cdot 33+\cdot 333-\cdot 3333+\cdots\cdots$

(ii) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots$

12. Sum to n terms the series :

(i) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

(ii) $a^2+(a+x)^2+(a+2x)^2+\cdots\cdots$

ANSWERS

2. 4, 8, 16. **4.** 5, 125. **5.** 18, 12. **10.** (i) $2^{n+1}+n-2$.

(ii) $(2n-1)\,2^{n+1}+2$. (iii) $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$.

11. (i) $-\frac{1}{33}\left(1-\frac{1}{10^{2n}}\right)$. (ii) $-n(2n+1)$. **12.** (i) $\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$.

(ii) $na^2+n(n-1)ax+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)x^2$.

দ্বাদশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম্ (Logarithms)

12·1. লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা :

একটি নির্দিষ্ট রাশির যে ঘাত অপর একটি নির্দিষ্ট রাশির সমান, সেই ঘাতের সূচককে (index of the power) বলা হয় দ্বিতীয় রাশির 'লগারিদ্‌ম্', যাহার নিধান (base) হইবে প্রথম রাশি।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $a^x = N$ হইলে, x হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে a (যাহাকে বলা হয় নিধান) N-এ পরিবর্তিত হইবে। অতএব, সংজ্ঞানুসারে x হইতেছে N-এর লগারিদ্‌ম্ যাহার নিধান a ; ইহা সাধারণতঃ, $x = \log_a N$ রূপে লিখিত হয়।

$2^3 = 8$ বলিয়া $\log_2 8 = 3$; অর্থাৎ 3 হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে 2 পরিবর্তিত হইবে 8-এ। পুনরায় $3^4 = 81$ বলিয়া $\log_3 81 = 4$; ইত্যাদি।

সূচক-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল লগারিদ্‌ম্-এর সাহায্যে এবং বিপরীতক্রমে লগারিদ্‌ম্-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল সূচকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $p^q = r$ হইলে, $\log_p r = q$

$m^n = z^k$ হইলে, $n = \log_m (z^k)$,

বা, $k = \log_z (m^n)$.

অনুরূপভাবে, $\log_y x = z$ হইলে, $y^z = x$.

মনে রাখিতে হইবে যে, একই সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর নিধান বিভিন্ন হইলে উহাদের মানও বিভিন্ন হইবে ; যেমন, 2-এর 6 ঘাত, 4-এর 3 ঘাত বা 8-এর 2 ঘাত প্রত্যেকেই 64-এর সমান ; অতএব, $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 3$, এবং $\log_8 64 = 2$. অতএব, নিধানের সঠিক উল্লেখ না থাকিলে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ সম্পূর্ণ অর্থহীন হইবে।

12·2. বিশেষ ফলাফল :

তৃতীয় অধ্যায় হইতে আমরা জানি যে, a কোন বাস্তব সসীম (শূন্য ব্যতীত) রাশি হইলে $a^0 = 1$; অতএব, $\log_a 1 = 0$. অর্থাৎ, ভাষায় প্রকাশ করিলে

(i) 1-এর শূন্য ব্যতীত যে-কোন সসীম নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ শূন্য হইবে।

পুনরায়, a যে-কোন রাশি হইলে, $a^1 = a$; $\therefore \log_a a = 1$.

অর্থাৎ, (ii) **কোন সংখ্যার সম-নিধানবিশিষ্ট লগারিদ্‌ম্ 1 হইবে।**

দ্রষ্টব্য 1. $a^x = 0$ হইলে, $x = -\infty$, যখন $a > 1$
বা, $x = +\infty$, যখন $a < 1$.

অতএব, $\log_a 0 = -\infty$, যদি $a > 1$ হয়,
$= +\infty$, যদি $a < 1$ হয়।

অর্থাৎ, শূন্যের 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ঋণরাশি এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ধনরাশি হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. a এবং n বাস্তব ধনরাশি হইলে, $a^x = -n$ সমীকরণটি x-এর কোন বাস্তব মানের সাহায্যে সমাধান করা যায় না (এক্ষেত্রে কেবলমাত্র a^x-এর মুখ্য মান* ধরা হইয়াছে ; সুতরাং, **একটি ঋণরাশির লগারিদ্‌ম্ (যেক্ষেত্রে নিধান বাস্তব ধনরাশি) অবশ্যই অস্তিত্বহীন বা অবাস্তব হইবে।**

12·3. লগারিদ্‌ম্-সংশ্লিষ্ট মৌলিক সূত্রাবলী :

লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, লগারিদ্‌ম্ সূচকের অন্য একটি রূপমাত্র। আমরা জানি যে, a, x, y বাস্তব রাশি হইলে,

(i) $a^x \times a^y = a^{x+y}$;

(ii) $a^x \div a^y = a^{x-y}$;

এবং (iii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

বীজগণিতে সূচক নিয়মের এই তিনটি মৌলিক সূত্রের অনুরূপ লগারিদ্‌ম্-এরও তিনটি মৌলিক সূত্র পাওয়া যায়। সূত্রগুলি নিম্নে দেওয়া হইল :

(i) $\mathbf{\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n}$.

অর্থাৎ দুইটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদ্‌ম্ উক্ত সংখ্যা দুইটির পৃথক্‌ভাবে গৃহীত লগারিদ্‌ম্-এর সমষ্টির সমান।

---

* মুখ্য মানের সংজ্ঞার জন্য Higher Trigonometry by Das & Mukherjee দ্রষ্টব্য।

প্রমাণ : মনে কর, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ এবং $\log_a (mn) = z$.

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$ এবং $a^z = mn = a^x.a^y = a^{x+y}$.

$$\therefore \quad z = x + y.$$

অর্থাৎ, $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$.

অনুসিদ্ধান্ত। অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\log_a (m.n.p....) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \cdots\cdots$$

(ii) $\mathbf{\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.}$

অর্থাৎ, দুইটি সংখ্যার ভাগফলের লগারিদ্‌ম্ উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের লগারিদ্‌ম্-এর অন্তরের সমান (লবের লগারিদ্‌ম্ বিযুক্ত হরের লগারিদ্‌ম্)।

প্রমাণ : মনে কর, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$, এবং $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = z$.

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$, এবং $a^z = \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\therefore \quad z = x - y.$$

অর্থাৎ, $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

(iii) $\mathbf{\log_a (m)^n = n \log_a m.}$

অর্থাৎ, একটি সংখ্যার ঘাতের লগারিদ্‌ম্, ঘাত এবং উক্ত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর গুণফলের সমান হইবে।

প্রমাণ : $\log_a m = x$ এবং $\log_a (m)^n = z$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে

$$a^x = m, \ a^z = m^n = (a^x)^n = a^{nx}.$$

$$\therefore \quad z = nx.$$

অর্থাৎ, $\log_a (m)^n = n \log_a m$.

12·4. নিধান-পরিবর্তন (Change of base).

সংখ্যাগুলির কোনও নির্দিষ্ট নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ দেওয়া থাকিলে, যে-কোন সংখ্যার অপর যে-কোন নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায়। সংশ্লিষ্ট সূত্রটি এই :

$$\mathbf{\log_a m = \log_b m \times \log_a b.}$$

প্রমাণ ঃ $\log_a m = x$, $\log_b m = y$, এবং $\log_a b = z$ কল্পনা করিলে

$$a^x = m,\ b^y = m,\ a^z = b.$$

$$\therefore\quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}.\quad \therefore\ x = yz.$$

অর্থাৎ, $\log_a m = (\log_b m) \times (\log_a b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. উপরোক্ত ফলাফলে $m = a$ ধরিলে, প্রমাণ করা হয় যে,

$$(\log_b a) \times (\log_a b) = 1. \qquad [\because\ \log_a a = 1.]$$

এই সূত্রটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বলিয়া ইহার একটি নিরপেক্ষ প্রমাণ দেওয়া হইল :—

মনে কর, $\log_b a = x$ এবং $\log_a b = y$. অতএব, $b^x = a$ এবং $a^y = b$.

$$\therefore\quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}.\quad \therefore\ xy = 1.$$

$$\therefore\quad \log_b a \times \log_a b = 1.$$

অর্থাৎ, $$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. উপরোক্ত অনুচ্ছেদের সূত্রটি অনুসিদ্ধান্ত 1-এর সাহায্যে আমরা নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে পারি ঃ

$$\log_a m = \log_b m / \log_b a.$$

অতএব, m এবং a উভয়ের b-নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ জানা থাকিলে m-এর a নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায়।

12·5. সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (Common system of logarithms).

প্রায় সমস্ত ব্যবহারিক ক্ষেত্রে গাণিতিক গণনার জন্য যে সমস্ত লগারিদ্‌ম্-এর প্রয়োগ হয়, তাহাদের নিধান সাধারণতঃ 10 ধরিয়া লওয়া হয়। যে সকল লগারিদ্‌ম্-এর নিধান 10 তাহাদিগকে সাধারণ (common) লগারিদ্‌ম্ পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত বলা হয়। অনু. 12·6-এর I এবং II উপপাদ্যে ইহাদের সুবিধা সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

দ্রষ্টব্য। উচ্চতর গণিতে তাত্ত্বিক (theoretical) আলোচনার জন্য নিধান ধরা হয় অন্য একটি অমেয় রাশি e যাহার মান 2·718.... (এই সম্পর্কে পরে আলোচনা আছে)। এই সমস্ত লগারিদ্‌ম্‌কে বলা হয় প্রাকৃত বা নেপিরীয় লগারিদ্‌ম্ (Natural or Naperian logarithm).

লগারিদম্ শ্রেণীর (logarithm series) সাহায্যে বিভিন্ন সংখ্যার প্রাকৃত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়। এই সমস্ত লগারিদম্‌কে গুনক $\frac{1}{\log_e 10}$ এর সাহায্যে সাধারণ লগারিদম্-এ পরিবর্তিত করা যায়। এই গুনককে বলা হয় সাধারণ পদ্ধতির লগারিদম্-এর মাপাঙ্ক (modulus).

অতঃপর আমরা কেবলমাত্র সাধারণ লগারিদম্-এরই উল্লেখ করিব এবং নিধান উল্লেখ না থাকিলে উহাকে 10 ধরিতে হইবে।

12·6. সাধারণ লগারিদম্-এর পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantissa).

মাত্র অল্প কয়েকটি ক্ষেত্রে লগারিদম্ অখণ্ড সংখ্যা হইতে পারে কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কোন সংখ্যার লগারিদম্ আংশিকভাবে অখণ্ড এবং আংশিক-ভাবে সামান্য বা দশমিক ভগ্নাংশ হইবে।

সংজ্ঞা। কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর **অখণ্ড অংশকে 'পূর্ণক'** এবং **দশমিক অংশকে 'অংশক'** বলা হয়।

কোন সংখ্যার লগারিদম্ ঋণসংখ্যা এবং আংশিকভাবে পূর্ণসংখ্যা ও আংশিকভাবে দশমিক ভগ্নাংশ হইলে, অংশক অথবা দশমিক অংশকে সর্বদাই ধনসংখ্যা রাখিয়া পূর্ণককে পরিবর্তিত করিতে হয়। অতএব, কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক সর্বদাই ধনাত্মক হইবে। যেমন, কোন সংখ্যার লগারিদম্ $-2{\cdot}3$ হইলে উহাকে $-3+{\cdot}7$-এর সমান লেখা যায় ও তখন -3 কে বলা হয় পূর্ণক এবং ${\cdot}7$-কে বলা হয় অংশক ($-{\cdot}3$ নয়)। $-3+{\cdot}7$-কে সংক্ষেপে $\bar{3}{\cdot}7$ লেখা হয়।

উপপাদ্য I. (i) 1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্-এর পূর্ণক সর্বদাই ধনাত্মক এবং সংখ্যাটির অখণ্ডাংশের অঙ্কের সংখ্যা হইতে এক কম ;

(ii) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনসংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক সর্বদা ঋণাত্মক হইবে এবং সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যে কয়টি শূন্য থাকিবে, পূর্ণকের অঙ্কিত মান তাহা অপেক্ষা এক বেশী হইবে। *

---

* 10-এর এমন কোন বাস্তব ঘাত নির্ণয় করা যায় না যাহার ফলে মান ঋণাত্মক হইবে। অতএব, ঋণসংখ্যার লগারিদম্ সম্পূর্ণ কাল্পনিক হইবে। [অনুঃ 12·2-এর দ্রষ্টব্য 2.]

(i) মনে করি যে, সংখ্যাটি এক অপেক্ষা বৃহত্তর।

যে-কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশ এক অঙ্কের হইলে (যেমন, 7·209) সংখ্যাটি 1 এবং 10-এর মধ্যবর্তী হইবে।

এক্ষণে, $10^0 = 1$ এবং $10^1 = 10$.

অতএব, $10^x = 7·209$ হইলে, x শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, log 7·209-এর মান 0 এবং 1-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ ইহার রূপ হইবে 0·... এবং পূর্ণক হইবে 0।

অনুরূপভাবে, 53·0528 এই ধরণের সংখ্যাগুলি (যাহাদের অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের সংখ্যা) 10 এবং 100 অর্থাৎ 10^1 এবং 10^2-এর মধ্যবর্তী হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত 53·0528 হইবে, সেই ঘাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ log 53·0528-এর মানের রূপ হইবে 1·.... এবং পূর্ণক হইবে এক।

log 10 = 1, এবং 10 সংখ্যাটিও দুই অঙ্কের সংখ্যার শ্রেণীভুক্ত।

অনুরূপভাবে, যে সমস্ত সংখ্যার অখণ্ড অংশ n অঙ্কের, তাহারা 10^{n-1} (যাহা n অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা) এবং 10^n (যাহা $n+1$ অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা)-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ তাহাদের লগারিদম্-এর মান হইবে $(n-1)$ + কোন সামান্য ভগ্নাংশ। অতএব, এই সমস্ত ক্ষেত্রে $(n-1)$-এর সমান।

(ii) মনে কর যে, সংখ্যাটি ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অর্থাৎ 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী।)

আমরা লক্ষ্য করি যে,

$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = ·1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = ·01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = ·001$$
$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = ·0001\text{ ; ইত্যাদি।}$$

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী অঙ্ক শূন্য নয় এইরূপ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যা (যথা, ·3015), ·1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত এই প্রকারের সংখ্যা হইবে সেই ঘাতের সূচক-সংখ্যা −1 এবং 0-এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ −1 + এক সামান্য ভগ্নাংশের সমান হইবে। অতএব, এই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক −1-এর সমান হইবে।

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী মাত্র একটি অঙ্ক শূন্য এইরূপ সংখ্যা, (যেমন, ·0785005) ·01 এবং ·1 অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-1}-এর মধ্যবর্তী।

অতএব, $10^x = \cdot0785005$ হইলে, x অবশ্যই -1 এবং -2-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ x-এর রূপ হইবে $-1\cdot\ldots\ldots$; x-এর দশমিক অংশ ধনাত্মক কল্পনা করিলে x-এর রূপ হইবে $-2+\cdot\ldots\ldots$। সুতরাং, x-এর অখণ্ড অংশ $\log \cdot0785005$-এর পূর্ণক -2 হইবে।

অনুরূপভাবে, $\cdot01$ এবং $\cdot001$ অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-3}-এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলির প্রারম্ভের দশমিক বিন্দুর পর দুইটি শূন্য থাকিবে এবং এই সকল সংখ্যার লগারিদম্ -2 এবং -3-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ লগারিদম্-এর রূপ হইবে $-2\cdot\ldots\ldots = -3+\cdot\ldots\ldots$; অতএব, পূর্ণক হইবে -3 ; ইত্যাদি।

উপপাদ্য II. যে সমস্ত সংখ্যাগুলি একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত এবং যাহাদের মধ্যে পার্থক্য কেবলমাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থানে, সেই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশগুলি অভিন্ন হইবে।

একটি উদাহরণ দ্বারা ইহা স্পষ্ট হইবে। আমরা 835107, 835107000, 83·5107, ·835107, ·000835107 এবং 8351·07—এই সংখ্যাগুলির লগারিদম্ আলোচনা করি।

এক্ষণে, $\log 835107000 = \log (835107 \times 1000)$

$$= \log 835107 + \log 1000$$

$$= \log 835107 + 3.$$

পুনরায়, $\log 83\cdot5107 = \log \frac{835107}{10000}$

$$= \log 835107 - \log 10000$$

$$= \log 835107 - 4.$$

$$\log \cdot835107 = \log \frac{835107}{1000000} = \log 835107 - \log 1000000$$

$$= \log 835107 - 6.$$

$$\log \cdot000835107 = \log \frac{835107}{10^9} = \log 835107 - 9.$$

$$\log 8351\cdot07 = \log \frac{835107}{100} = \log 835107 - 2.$$

এইখানে, যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ ও $\log 835107$-এর মধ্যে পার্থক্য একটি পূর্ণসংখ্যার। সুতরাং, উক্ত সংখ্যাগুলির অংশক $\log 835107$-এর অংশকের সহিত সমান হইবে।

বস্তুতঃ, একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যার পার্থক্য মাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থান-জনিত হইলে, উহাদের অনুপাত 10-এর অখণ্ড ঘাতের সমান হইবে এবং ইহাদের লগারিদ্‌ম্-এর পার্থক্য দেখা যাইবে কেবল পূর্ণকের মধ্যে।

উপরের উপপাদ্য দুইটি হইতে প্রমাণিত হয় যে, **(i) কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর পূর্ণক কেবলমাত্র পর্যবেক্ষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় এবং (ii) অংশক নির্ণয় করিতে কেবলমাত্র সংখ্যাটি যে অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে, দশমিক বিন্দুর অবস্থান লক্ষ্য না করিলে কোন ক্ষতি হইবে না।**

অতএব, লগারিদ্‌ম্-এর তালিকায় কেবলমাত্র অংশক দেওয়া থাকিলেই চলে এবং কার্যতঃ তাহাই দেওয়া থাকে। ইহাই সাধারণ লগারিদ্‌ম্-এর বিশেষত্ব এবং সুবিধা।

12·7. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Simplify :* $\log \dfrac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{(18.\sqrt{2})}}$, *and find its value, given* $\log 2 = \cdot30103$ *and* $\log 3 = \cdot4771213$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \log \frac{5^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{\left(18.2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}\left(2.3^2.2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \log \frac{10^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{6}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{13}{20}}3^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \log 10^{\frac{1}{4}} - \log\left(2^{\frac{18}{20}} \times 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\log 10 - \left(\log 2^{\frac{13}{20}} + \log 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\log 10 - \tfrac{13}{20}\log 2 - \tfrac{2}{3}\log 3$$

$$= \tfrac{1}{4}.1 - \tfrac{13}{20}(\cdot30103) - \tfrac{2}{3}(\cdot4771213)$$

$$= \cdot25 - \cdot1956695 - \cdot3180809$$

$$= -1 + \cdot7362496 = \bar{1}\cdot7362496.$$

দ্রষ্টব্য। $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$; অতএব, log 5-এর মান log 2-এর মান হইতে নির্ণয় করা যায়।

Ex. 2. *Prove that*

$$7\log\tfrac{10}{9}-2\log\tfrac{25}{24}+3\log\tfrac{81}{80}=\log 2.$$

বাম পক্ষ $=\log\left(\frac{10}{9}\right)^7-\log\left(\frac{25}{24}\right)^2+\log\left(\frac{81}{80}\right)^3$

$$=\log\frac{(\frac{10}{9})^7\times(\frac{81}{80})^3}{(\frac{25}{24})^2}=\log\left\{\left(\frac{10}{3^2}\right)^7\times\left(\frac{3^4}{10\times 2^3}\right)^3\times\left(\frac{3\times 2^3\times 2^2}{10^2}\right)^2\right\}$$

$$=\log\left(\frac{10^7}{3^{14}}\times\frac{3^{12}}{10^3\times 2^9}\times\frac{3^2\times 2^{10}}{10^4}\right)=\log 2.$$

বিকল্প প্রমাণ :

বাম পক্ষ $=7(\log 10-\log 9)-2(\log 25-\log 24)+3(\log 81-\log 80)$

$$=7\{\log(5\times 2)-\log 3^2\}-2\{\log 5^2-\log(3\times 2^3)\}+3\{\log 3^4-\log(5\times 2^4)\}$$

$$=7\{\log 5+\log 2-2\log 3\}-2\{2\log 5-\log 3-3\log 2\}+3\{4\log 3-\log 5-4\log 2\}$$

$$=\log 2.$$

Ex. 3. *Find the number of digits in* 4^{15}, *having given* $\log 2=\cdot 30103$.

$$\log 4^{15}=\log 2^{30}=30\log 2=30\times\cdot 30103=9\cdot 0309.$$

অতএব, $\log 4^{15}$-এর পূর্ণক 9 বলিয়া, 4^{15} দশ অঙ্কের সংখ্যা।

Ex. 4. *Find approximately* 7^{th} *root of* 35·28, *having given* $\log 2=\cdot 30103$, $\log 3=\cdot 4771213$, $\log 7=\cdot 8450980$ *and* $\log 1197\cdot 342=3\cdot 0782184$.

মনে কর, $x=(35\cdot 28)^{\frac{1}{7}}=\left(\frac{7^2\times 3^2\times 2^3}{10^2}\right)^{\frac{1}{7}}$.

$$\therefore\ \log x=\tfrac{1}{7}[2\log 7+2\log 3+3\log 2-2\log 10]$$
$$=\tfrac{1}{7}[2\times\cdot 8450980+2\times\cdot 4771213+3\times\cdot 30103-2]$$
$$=\cdot 0782184 \text{ (প্রায়)}$$

এক্ষণে, $\log 1197{\cdot}342 = 3{\cdot}0782184$ বলিয়া,

$\log 1{\cdot}197342 = {\cdot}0782184$ (যেহেতু উভয়ের অংশক সমান, কিন্তু 1 অঙ্কের সংখ্যা বলিয়া পূর্ণক শূন্য)

$\therefore \quad x = 1{\cdot}197342.$ (আসন্ন মান)।

Ex. 5. *Obtain an approximate numerical solution of* $2^x.3^{2x} = 100$, *having given* $\log 2 = {\cdot}30103$, $\log 3 = {\cdot}47712$.

$$2^x.3^{2x} = 100 = 10^2, \quad \therefore \log(2^x.3^{2x}) = \log 10^2;$$

অর্থাৎ, $x \log 2 + 2x \log 3 = 2 \log 10 = 2.$

$$x = \frac{2}{\log 2 + 2 \log 3} = \frac{2}{{\cdot}30103 + 2 \times {\cdot}47712}$$

$= 1{\cdot}5933$ (প্রায়)।

Ex. 6. *If* $y = a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log y}}$, *then* $x = a^{\frac{1}{1-\log z}}$, *all the logarithms being calculated to the base a.*

$$\because \quad y = a^{\frac{1}{1-\log x}}; \qquad \therefore \quad \log_a y = \frac{1}{1 - \log_a x}. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\because \quad z = a^{\frac{1}{1-\log y}}; \qquad \therefore \quad \log_a z = \frac{1}{1 - \log_a y}. \qquad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে আমরা পাই $\log_a y = 1 - \dfrac{1}{\log_a z} = \dfrac{\log_a z - 1}{\log_a z}.$

অতঃপর (1)-হইতে,

$$\log_a x = 1 - \frac{1}{\log_a y} = 1 - \frac{\log_a z}{\log_a z - 1} = \frac{-1}{\log_a z - 1} = \frac{1}{1 - \log_a z}.$$

$\therefore \quad x = a^{\frac{1}{1-\log z}}.$

Ex. 7. *Evaluate* $\log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots to\ \infty}}}$ *assuming it to have a definite value.*

মনে কর, $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots \text{ to } \infty}}}$

$\therefore \quad x = \sqrt{2x}$ বা $x^2 - 2x = 0.$ কিন্তু $x \neq 0.$ $\therefore \quad x = 2.$

এখন প্রদত্ত রাশি $= \log_2 x = \log_2 2 = 2.$

Ex. 8. *If* $a^m = b^n$, *show that* $n \log_a x = m \log_b x$.

মনে করি, $\log_a x = a'$ এবং $\log_b x = b'$.

$\therefore\ a^{a'} = x$ এবং $b^{b'} = x$. সুতরাং, $a^{a'} = b^{b'}$.

উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে, $a' \log a = b' \log b$.

বা, $\frac{a'}{b'} = \frac{\log b}{\log a}$. .... (1)

এখন প্রদত্ত সমীকরণ $a^m = b^n$-এর উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে আমরা পাই $m \log a = n \log b$.

$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{\log b}{\log a}$. .... (2)

অতএব, (1) এবং (2) হইতে আমরা জানি যে, $\frac{a'}{b'} = \frac{m}{n}$.

অর্থাৎ, $\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{m}{n}$. $\therefore\ n \log_a x = m \log_b x$.

Ex. 9. *Prove that*

(i) $x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(i) $\log (x^{\log y}) = \log y \log x = (\log x) \cdot \log y = \log (y^{\log x})$.

$\therefore\ x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) মনে কর,

$P = x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y}$.

$\therefore\ \log P = (\log y - \log z) \log x + (\log z - \log x) \log y + (\log x - \log y) \log z = 0$.

$\therefore\ P = 1$.

অর্থাৎ, $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

Ex. 10. *If* $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, *then* $x \log \left(\frac{b}{a}\right) = \log a$.

[C. U. 1937]

$\therefore\ a^{3-x}\, b^{5x} = a^{x+5}\, b^{3x}$, উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম্ লইলে,

$$(3-x)\log a + 5x \log b = (x+5)\log a + 3x \log b$$

বা, $x\,[\log a + 3\log b + \log a - 5\log b] = 3\log a - 5\log a$

বা, $x\,[2\log a - 2\log b] = -2\log a$

বা, $x(\log b - \log a) = \log a.\quad \therefore\ x \log \dfrac{b}{a} = \log a.$

দ্রষ্টব্য। এইপ্রকার সমীকরণকে সূচক সমীকরণ (Exponential equation) বলা হয়। লক্ষ্য করা যাইতে পারে যে উপরোল্লিখিত Ex. 5. একটি সূচক সমীকরণ।

Examples XII(a)

[*Use the values :* $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4371213$, $\log 7 = \cdot 8450980$ *when required*]

1. Find the logarithm of

(i) 1728 to the base $2\sqrt{3}$, (ii) $\cos^3 \alpha$ to the base $\sec \alpha$.

2. Find $\log_{10} 10000$.

3. Show that $\log_{10} 2$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$. [*C. U. 1926*]

4. Prove that

(i) $\log_a m \times \log_b n = \log_b m \times \log_a n$.

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1$.

5. If $\log_e m + \log_e n = \log_e (m+n)$, find m as a simple function of n.

6. Prove that if a series of numbers be in G.P., their logarithms are in A.P.

7. Prove that $2\log a + 2\log a^2 + 2\log a^3 + \cdots\cdots + 2\log a^n$
$= n(n+1)\log a$.

8. If x is positive and less than unity, show that $\log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8) + \cdots \text{to} \infty = -\log(1-x)$.

9. Simplify

(i) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(ii) $\dfrac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1{\cdot}2}$.

10. Find $\log (\cdot 0025)^{\frac{1}{3}}$ and $\log (\frac{5}{72})^{-\frac{1}{3}}$.

11. Prove that

(i) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$.

(ii) $\log_a x = \log_b x \times \log_c b \times \log_d c \cdots \times \log_n m \times \log_a n$.

12. Show that

(i) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$.

(ii) $7 \log \frac{15}{16} + 6 \log \frac{8}{3} + 5 \log \frac{2}{5} + \log \frac{32}{25} = \log 3$.

13. Extract the fifth root of 84, having given

$\log 2425805 = 6{\cdot}3848559$.

14. Calculate $(\cdot 0020736)^{\frac{1}{7}}$, having given

$\log 41369 = 4{\cdot}6166750$.

15. Simplify

(i) $\log \sqrt[7]{\dfrac{8^{\frac{1}{5}} \times 14^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{72} \times \sqrt[5]{60}}}$.

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{7{\cdot}2 \times 6{\cdot}3}{62{\cdot}5}}$, having given

$\log 898665 = 5{\cdot}953977$.

16. Find the value of $64 \{1 - (1{\cdot}05)^{-20}\}$, having given

$\log 24121 = 4{\cdot}382394$.

17. Find the number of digits in (i) 2^{40}, (ii) 3^{11}, (iii) $(540)^9$.

18. Find the number of zeros after the decimal point before the first significant digit in the expressions :

(i) $(\cdot 024)^{15}$. (ii) $\left(\dfrac{1}{4{\cdot}05}\right)^8$. (iii) $\left(\cdot 0\dot{2}5\dot{9}\right)^{50}$.

19. Solve the equations :

(i) $3^x = 2$. (ii) $3^{x-4} = 7$. (iii) $5^{6x} + 7^{x+2} = 3^{2x-3}$.

(iv) $\left.\begin{aligned} 2^x &= 3^y \\ 2^{y+1} &= 3^{x-1} \end{aligned}\right\}$. (v) $\left.\begin{aligned} 7^{x+y} \times 3^{2x+y} &= 9 \\ 3^{x-y} + 2^{x-2y} &= 3^x \end{aligned}\right\}$.

20. (i) If $\log(x^2y^3) = a$, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = b$, find $\log x$ and $\log y$.

(ii) If $a^2 + b^2 = 7ab$, show that

$$\log\{\tfrac{1}{3}(a+b)\} = \tfrac{1}{2}(\log a + \log b).$$

21. If $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$, show that $x^x y^y z^z = 1$.

22. Why is $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$?

23. If $a, b, c, \ldots\ldots$ be in G.P., show that

$\log_a x, \log_b x, \log_c x \ldots\ldots\ldots\ldots$ are in H.P.

24. If $xy^{l-1} = a$, $xy^{m-1} = b$, $xy^{n-1} = c$, prove that

$$(m-n)\log a + (n-l)\log b + (l-m)\log c = 0.$$

25. If $\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$, show that

$$y^z z^y = z^x x^z = x^y y^x.$$

ANSWERS

1. (i) 6. (ii) -3. **2.** -2. **5.** $\frac{n}{n-1}$. **9.** (i) 1. (ii) $1\frac{1}{2}$.

10. $\bar{1}\cdot1173942$, $\cdot3861209$. **13.** $2\cdot425805$. **14.** $\cdot41369$.

15. (i) $\bar{1}\cdot8969092$. (ii) $\cdot898665$. **16.** $39\cdot879$.

17. (i) 13. (ii) 6. (iii) 25. **18.** (i) 24. (ii) 4. (iii) 79.

19. (i) $\frac{\log 2}{\log 3}$, *i.e.*, $\cdot63\ldots\ldots$ (ii) $4 + \frac{\log 7}{\log 3}$, *i.e.*, $5\cdot77\ldots$

(iii) $\frac{2\log 7 - 3\log 3}{6\log 5 - \log 7 - 2\log 3}$, *i.e.*, $\cdot108\ldots$

(iv) $x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = 2\cdot71$ nearly, $y = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} = 1\cdot71$ nearly.

(v) $\frac{2b(2a-b)}{5ab+3ac-2b^2-bc}$ and $\frac{2ab}{5ab+3ac-2b^2-bc}$,

where $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 7$.

20. (i) $\log x = \frac{a+3b}{5}$, $\log y = \frac{a-2b}{5}$.

12·8. লগারিদ্‌ম্‌ এবং অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্‌।

পাঁচ আসন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত দুইটি তালিকা পুস্তকের শেষে সন্নিবিষ্ট করা হইয়াছে। নিম্নে তালিকাগুলির বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

প্রথম তালিকায় 1 হইতে 10,000 সংখ্যাগুলির (অর্থাৎ যে সমস্ত সংখ্যা চার বা তাহার কম অঙ্কবিশিষ্ট তাহাদের) লগারিদ্‌ম্‌-এর অংশক দেওয়া হইয়াছে (দশমিক বিন্দু দেওয়া হয় নাই)। অনু. 12·6 এর নিয়ম অনুযায়ী পূর্ণক নির্ণয় করিয়া নির্ণেয় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ বাহির করিতে হইবে। তালিকার প্রধান অংশে দেওয়া হইয়াছে তিন (বামপার্শ্বে দুই এবং শীর্ষে এক) অঙ্কের সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌-এর অংশক এবং পার্শ্বস্থ অংশে সন্নিবিষ্ট হইয়াছে চতুর্থ অঙ্কের জন্য মধ্যক-অন্তর (mean difference)। অতএব, চারি অঙ্কের সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করিতে হইলে তালিকার প্রধান অংশ হইতে প্রথম তিন অঙ্কের সংখ্যার অংশকের সহিত চতুর্থ অঙ্কের সংশ্লিষ্ট মধ্যক-অন্তর যোগ করিতে হইবে। মধ্যক-অন্তরের বৃদ্ধির ক্ষেত্রে তালিকাতে কেবল সার্থক (significant) অঙ্কগুলি লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে; ইহার বামে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া পাঁচ অঙ্কের দশমিকে পরিবর্তিত করিতে হইবে (কারণ এইক্ষেত্রে তালিকাটিতে পাঁচ দশমিক পর্যন্ত আছে)। যথা: মধ্যক-অন্তরের তালিকায় 24 লিখিত থাকিলে উহাকে ধরিতে হইবে ·00024 ; উদাহরণস্বরূপ log 2·697 এর মান নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে মূল তালিকা হইতে log 269 এর অংশক নির্ণয় করি ; উহা হইবে ·42975 ; ইহাদের একই সারি হইতে দেখা যায় যে, 7-এর জন্য মধ্যক-অন্তর 115 অর্থাৎ log 2697 এর অংশক হইবে ·4297 + ·00115 অর্থাৎ ·43090. পুনরায় log 1·697-এর পূর্ণক শূন্য, অর্থাৎ log 2·697 এর মান 0·43090.

দ্বিতীয় তালিকা অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম্‌ তালিকা। ইহার সাহায্যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌-এর অংশক (চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত) দেওয়া থাকিলে সংখ্যাটি (পাঁচ অঙ্ক পর্যন্ত) নির্ণয় করা যায়। এই তালিকার বাম প্রান্তের স্তম্ভে লগারিদ্‌ম্‌-এর অংশকের প্রথম দুই দশমিক স্থানের অঙ্ক, এবং শীর্ষে তৃতীয় স্থানের অঙ্ক দেওয়া আছে। দক্ষিণ পার্শ্বস্থ অংশে চতুর্থ অঙ্কের জন্য মধ্যক-অন্তর (mean difference) সন্নিবিষ্ট হইয়াছে। অতএব, লগারিদ্‌ম্‌-এর চারি দশমিক অংশবিশিষ্ট প্রদত্ত অংশক-এর জন্য মূল সংখ্যাটি নির্ণয় করিতে হইলে, তালিকার প্রধান অংশ হইতে অংশকের প্রথম তিন দশমিক অঙ্কের জন্য তালিকাভুক্ত সংখ্যাটির সহিত চতুর্থ দশমিক অঙ্কের সংশ্লিষ্ট মধ্যক-অন্তর যোগ করিতে হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, মনে কর, যে সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক ·3764, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথমে তালিকার প্রধান অংশ হইতে দেখিতে পাই, বাম প্রান্তের স্তম্ভের ·37 এবং শীর্ষের 6 অঙ্কের সংশ্লিষ্ট তালিকাপ্রদত্ত সংখ্যা 23768. একই পংক্তিতে, দশমিকের চতুর্থ অঙ্ক 4 এর জন্য পার্শ্বস্থ তালিকা হইতে মধ্যক-অন্তর পাই 22. অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি $23768+22=23790$, অর্থাৎ এই সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক ·3764. এই লগারিদম্-এর পূর্ণক দেওয়া থাকিলে, § 12·6 এর নিয়মানুযায়ী নির্ণীত সংখ্যাটিতে উপযুক্ত স্থানে দশমিক বিন্দু স্থাপন করিতে হইবে।

12·9. সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য (Principle of proportional parts).

মনে কর যে, প্রথম তালিকা হইতে প্রাপ্ত log 6257 এবং log 6258-এর মানের সাহায্যে log 6257·6-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে ; কিভাবে তাহা সম্ভব ?

এই সমস্ত ক্ষেত্রে সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য প্রয়োগ করা হয়। তথ্যটি নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যাইতে পারে :—

"একটি চলরাশি x-এর নিয়মিত স্বল্পব্যবধানযুক্ত বিভিন্ন মান অনুযায়ী, x-এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি রাশির অনুরূপ বিভিন্ন মান নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত করিলে সাধারণতঃ দেখা যাইবে যে, নির্ভরশীল রাশির (ইহাকে বলা হয় যুক্তির অপেক্ষক বা function) স্বল্পপরিবর্তন, x-এর মানের (ইহাকে বলা হয় যুক্তি বা argument) স্বল্পপরিবর্তনের সমানুপাতী হইবে।"

আমরা উল্লিখিত তথ্য সত্য বলিয়া গ্রহণ করিব। উপযুক্ত শর্ত উল্লেখপূর্বক ইহার পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ Calculus বা কলন শাস্ত্রের প্রয়োগ ব্যতিরেকে সম্ভব নয়। যে সমস্ত তালিকার ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আমরা এই তথ্য প্রয়োগ করিব সেই সমস্ত ক্ষেত্রে ইহার সত্যতা প্রায় নির্বিচারে গ্রহণ করা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণে এই তথ্যের প্রয়োগ দেখানো হইতেছে :

Ex. 1. *Given log* 63374 = 4·8019111 *and log* 63375 = 4·8019180, *find log* 63·3743 *and find the number whose logarithm is* 2·8019136.

এক্ষেত্রে, $\log 63375 = 4{\cdot}8019180$,

এবং $\log 63374 = 4{\cdot}8019111$.

সুতরাং, সংখ্যাটি 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে ·0000069 (সাধারণতঃ "1-এর জন্য অন্তর 69"—এইরূপ লিখিত হয়)। অতএব, সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য অনুসারে সংখ্যাটি ·3 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে ·3 × ·0000069 বা ·00000207 বা ·0000021 (7 দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

সুতরাং, $\log 63374{\cdot}3 = 4{\cdot}8019111 + {\cdot}0000021 = 4{\cdot}8019132.$

$\therefore \quad \log 63{\cdot}3743 = 1{\cdot}8019132.$

পুনরায় 4·8019136 সংখ্যাটি 4·8019111 এবং 4·8019180-র মধ্যবর্তী এবং প্রথমটির সহিত ইহার অন্তর ·0000025 ; অতএব, 4·8019136 অবশ্যই 63374 ও 63375—এই দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদম্। মনে কর যে, সংখ্যাটি $63374 + x$.

1-এর জন্য অন্তর 69 (অর্থাৎ ·0000069) এবং x-এর জন্য অন্তর 25 (অর্থাৎ ·0000025) বলিয়া সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় নিয়ম অনুযায়ী

$$69 : 25 = 1 : x, \quad \text{অর্থাৎ} \quad x = \tfrac{25}{69} = {\cdot}36....$$

অতএব, $\log 63374{\cdot}36.... = 4{\cdot}8019136.$

এক্ষণে নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদম্ $\bar{2}{\cdot}8019136$ অর্থাৎ অংশক log 63374·36-এর অংশকের সমান। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাটি 63374·36-এর ন্যায় একই ক্রমে সজ্জিত একই অঙ্কের দ্বারা গঠিত হইবে এবং ইহার পূর্ণক -2 বলিয়া সংখ্যাটি হইবে ·06337436···.

Examples XII(b)

1. Given $\log 18{\cdot}906 = 1{\cdot}2765997$ and $\log 18{\cdot}907 = 1{\cdot}2766226$, find $\log 1890{\cdot}635$.

2. Given $\log 69714 = 4{\cdot}8433200$, $\log 69715 = 4{\cdot}8433262$, find $\log ({\cdot}000697145)^{\frac{1}{5}}$.

3. Given $\log 37602 = 4{\cdot}5752109$, $\log 37601 = 4{\cdot}5751994$, find the number whose logarithm is $1{\cdot}5752086$.

4. Given $\log 3 = {\cdot}4771213$

$\log 74008 = 4{\cdot}8692787$, diff. for $1' = 59$,

find $({\cdot}09)^{\frac{1}{8}}$.

ANSWERS

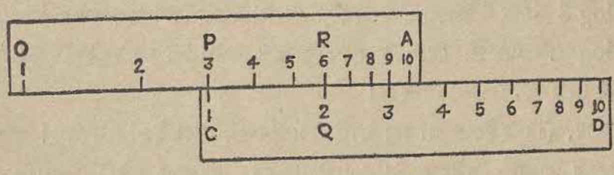
1. 3·2766077. **2.** $\bar{1}{\cdot}3686646$. **3.** 37·6018. **4.** ·7400827.

Slide Rule

12·10. উচ্চ-মাধ্যমিক পাঠ্যতালিকায় Slide Ruleএর ব্যবহার-পদ্ধতির সহিত ছাত্রগণের সম্যক্ পরিচয় বাঞ্ছনীয় বলিয়া নির্দেশ দেওয়া আছে। নিম্নে Slide Ruleএর মৌলিক বিষয়গুলি যথাসম্ভব সরলভাবে ও সংক্ষেপে আলোচিত হইল।

Slide Rule একটি যন্ত্রবিশেষ। এই যন্ত্র সাহায্যে দুই বা ততোধিক সংখ্যার গুণফল ও ভাগফল, কোন সংখ্যার বর্গ, ঘন, অন্যোন্যক (reciprocal), বর্গমূল, ঘনমূল, logarithm এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল, কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত, অশ্বশক্তি ও কিলোওয়াটের সম্বন্ধ প্রভৃতি বহু বিষয় অতিদ্রুত এবং সুষ্ঠুরূপে নির্ণয় করা যায়।

এই সকল কারণে বৈজ্ঞানিক গবেষণা ও স্থপতিবিদ্যার ব্যবহারিক ক্ষেত্রে Slide Ruleএর ব্যবহার একপ্রকার অপরিহার্য বলিলেই চলে।



এই যন্ত্রের কার্য প্রধানতঃ পূর্বে প্রমাণিত দুইটি নিয়মের উপর প্রতিষ্ঠিত—(i) দুইটি রাশির গুণফলের logarithm রাশি দুইটির logarithmএর সমষ্টির সমান অর্থাৎ $\log ab = \log a + \log b$ এবং (ii) কোন রাশির n-ঘাতের logarithm সেই রাশির logarithmএর n-গুণ অর্থাৎ $\log a^n = n \log a$.

খুব সাধারণ একটি Slide Rule ঠিক একই মাপযুক্ত দুইটি অভিন্ন Scale লইয়া গঠিত—একটি অচল এবং অপরটি সচল। Scaleএর এই সচল অংশটি অচল অংশের উপর একস্থান হইতে অন্যস্থানে সরানো যায়। Scale দুইটি এরূপভাবে বিভক্ত যে, উভয় Scaleএর প্রত্যেকটির বামপ্রান্ত হইতে দূরত্ব Scaleএর উপর খোদিত সংখ্যার logarithmএর আনুপাতিক। ইহার যে-কোন একটি Scaleএর উপর খোদিত দুইটি সংখ্যা যদি a, b হয়, তবে Scaleএর বামপ্রান্তীয় বিন্দু O হইলে Oa, Ob দূরত্ব যথাক্রমে $\log a$, $\log b$ এর অনুপাতে হইবে, অর্থাৎ আমরা ধরিয়া লইতে পারি, $Oa = \log a$ এবং $Ob = \log b$.

এই দুই Scaleএর অচলটি Rule এবং সচলটি Slider নামে পরিচিত।

মনে কর, Ruleএর 'a' দাগের বিপরীতে P একটি বিন্দু এবং Ruleএর বামপ্রান্তীয় বিন্দু, যেখান হইতে গণনাকার্য আরম্ভ করা হয়, তাহা O. তাহা হইলে OP দূরত্ব $\log a$এর পরিমাপক। যেহেতু $\log 1 = 0$, সেইজন্য প্রান্তীয় বিন্দু O তে 1 এই সংখ্যা লিখিত। ধর, সচল অংশ Sliderএর বামপ্রান্তীয় বিন্দু C. এই বিন্দুটিও 1 এই সংখ্যা দ্বারা সূচিত। এখন Sliderএর C বিন্দু Ruleএর P বিন্দুতে স্থাপন কর। মনে কর, Sliderএর উপরিস্থ Q বিন্দু Sliderএর b দাগে মিলিত হইয়াছে, সুতরাং, $CQ = \log b$. যদি Sliderএর Q বিন্দু Ruleএর c দাগযুক্ত R বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে $OR = \log c$.

এক্ষণে, $\log ab = \log a + \log b = OP + CQ = OP + PR$
$$= OR = \log c.$$
$$\therefore \quad ab = c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

উপরের চিত্রে, P বিন্দু Ruleএর 3 দাগে অবস্থিত, সুতরাং, বর্ণনানুসারে $OP = \log 3$ এবং ঐরূপে Q বিন্দু Sliderএর 2 দাগে অবস্থিত বলিয়া, $CQ = \log 2$. এক্ষণে দেখা যাইতেছে যে, Sliderএর Q বিন্দুর অনুরূপ Ruleএর বিন্দু R, 6-এ অবস্থিত।

অতএব, (i) হইতে আমরা পাই $3 \times 2 = 6$, এবং ইহার সত্যতা সুস্পষ্ট।

উপরের লব্ধফল হইতে Slide Ruleএর সাহায্যে দুইটি সংখ্যার গুণফল সরাসরি নির্ণয়ের নিম্নোক্ত পদ্ধতি পাওয়া যায়।

মনে কর, a, b সংখ্যা দুইটির গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে। Slideএর প্রান্তীয় বিন্দু C, Ruleএর 'a' দাগে স্থাপন কর এবং Slideএর b দাগ Ruleএর কোন্ দাগে মিলিত হইল তাহা লক্ষ্য কর। এই দাগে লিখিত সংখ্যা a, b সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল হইবে।

ইহার বিপরীত পদ্ধতি দ্বারা ভাগফল নির্ণয় করা যায়। মনে কর, c কে b দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় করিতে হইবে। Sliderএর b দাগ Ruleএর c দাগে স্থাপন কর। Sliderএর প্রান্তীয় বিন্দু cএর বিপরীত Ruleএর উপরিস্থ দাগ 'a' স্থির কর।

এখন Ruleএর a ও c দাগ এবং Sliderএর b দাগ যদি যথাক্রমে P, R এবং Q দ্বারা সূচিত হয়, তবে $\log \frac{c}{b} = \log c - \log b = OR - CQ$
$$= OR - PR = OP = \log a.$$
$$\therefore \quad c \div b = a.$$

কোন সংখ্যা aএর বর্গ-নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $b=a$ ধরিলে, $c=a^2$ পাওয়া যাইবে। কোন সংখ্যার অন্যান্য ঘাত বা মূল-নির্ণয় সেইরূপ $\log a^n = n \log a$ সূত্রের সাহায্যে যন্ত্র দ্বারা সম্পন্ন করা যায়।

বাস্তব গণনাকার্যে প্রয়োগের ক্ষেত্রে উপরে বর্ণিত সাধারণ Slide Rule-এ অন্যান্য উপযোগী পরিবর্তন সাধন করিয়া ব্যবহার করা হয়, এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল, ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত প্রভৃতি নির্ণয়কার্য গুণফল ও ভাগফল নির্ণয়ের মতই সহজে করা যায়। বর্তমানে বিভিন্ন কার্য্যের দিকে দৃষ্টি রাখিয়া তৈয়ারী একাধিক Slide Rule পাওয়া সম্ভব। সেগুলি এখানে আর পৃথক্‌ভাবে আলোচিত হইল না।

যন্ত্রটি ছাত্রগণের সম্মুখে উপস্থাপিত না করিয়া শুধু চিত্র দেখিয়া ইহার বর্ণনাপাঠে বিশেষ কোন লাভ হয় না। যন্ত্রটির প্রয়োগবিধি হাতেকলমে শিক্ষা করা প্রয়োজন। সেইজন্য শিক্ষক-মহাশয়গণ কি করিয়া ইহার সাহায্যে গুণফল ও ভাগফল নির্ণয় এবং গণিত-সংক্রান্ত অন্যান্য বিবিধ কার্যাবলী অতি সহজে এবং দ্রুত সম্পন্ন করা যায় তাহা ছাত্রদিগকে হাতেকলমে শিক্ষা দিবেন।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

(Simultaneous Equations in two unknowns, one linear and one quadratic)

13·1. ইতিপূর্বে সপ্তম ও অষ্টম অধ্যায়ে আমরা সরল সহ-সমীকরণ এবং একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। বর্তমান অধ্যায়ে আমরা দুই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সহ-সমীকরণের সমাধানের বিষয় পর্যালোচনা করিব—এই দুই সহ-সমীকরণের প্রধানতঃ একটি দ্বিঘাত ও অপরটি একঘাত।

দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ সমাধানের জন্য সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য এমন কোন নির্দ্দিষ্ট নিয়ম নাই। তবে যেখানে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির একটি একঘাত, সেখানে একটি সাধারণ নিয়ম নির্দেশ করা যাইতে পারে। অজ্ঞাত রাশি দুইটি x এবং y হইলে, প্রথমে একঘাত সমীকরণটি হইতে x দ্বারা প্রকাশিত y এর মান নির্ণয় করিয়া, লব্ধ মান প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণে বসাইলে x-সম্বলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাওয়া যাইবে। শেষোক্ত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এর দুইটি মান পর পর একঘাত সমীকরণে বসাইলে y এরও পর পর দুইটি মান পাওয়া যাইবে; অর্থাৎ এই দুইটি সহ-সমীকরণের সমাধানরূপে x, y এর দুই প্রস্থ মান পাওয়া যাইবে।

এখানে বিশেষভাবে উল্লেখ করা প্রয়োজন, যে সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে প্রথমতঃ, যতগুলি অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিতে হইবে, ততগুলি স্বাধীন সমীকরণ প্রয়োজন। দুইটি x, y এর মান-নির্ণয়ে দুইটি স্বাধীন সমীকরণের প্রয়োজন হয়; সাধারণভাবে বলা যায়, অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা n হইলে উহাদের মান নির্ণয় করিতে n সংখ্যক স্বাধীন সমীকরণের প্রয়োজন।

দ্বিতীয়তঃ, সকল দ্বিঘাত বা উচ্চ ঘাতের সহ-সমীকরণের একাধিক প্রস্থ সমাধান হইতে পারে, এবং যে কয় প্রস্থ সমাধান হইবে তাহা প্রদত্ত সমীকরণগুলির ঘাতের উপর নির্ভর করে। মনে কর, দুই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি

সমীকরণ দেওয়া আছে—একটি দ্বিঘাত এবং অপরটি একঘাত; তাহা হইলে এই সহ-সমীকরণের অজ্ঞাত রাশির 2×1 অর্থাৎ দুই প্রস্থ মান হইবে। আবার, প্রদত্ত দুইটি সমীকরণই যদি দ্বিঘাত হয় তবে অজ্ঞাত রাশি x, y এর সাধারণতঃ 2×2 অর্থাৎ 4 প্রস্থ মান পাওয়া যাইবে। সাধারণভাবে, একটি m ঘাতের এবং অপরটি n ঘাতের সমীকরণের ক্ষেত্রে $m \times n$ প্রস্থ মান পাওয়া যাইতে পারে। এই কয় প্রস্থ মানের মধ্যে কাল্পনিক, বাস্তব প্রভৃতি সকল প্রকার মান থাকিতে পারে।

নিম্নে দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান-পদ্ধতির কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

13·2. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Solve :*

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 3x^2 + 2xy + y^2 &= 17 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\cdots\cdots \quad (1) \\ &\cdots\cdots \quad (2) \end{aligned}$$

সমীকরণ (1) হইতে আমরা পাই, $y = \dfrac{3x-4}{2}$ .... (3)

y এর এই মান (2) সমীকরণে বসাইলে,

$$3x^2 + 2x.\frac{(3x-4)}{2} + \left(\frac{3x-4}{2}\right)^2 = 17,$$

বা, $12x^2 + 4x(3x-4) + (9x^2 - 24x + 16) = 68$,

বা, $33x^2 - 40x - 52 = 0$, বা, $(x-2)(33x+26) = 0$,

বা, $x = 2$, বা, $-\frac{26}{33}$.

সুতরাং, (3) হইতে যখন $x = 2$, $y = \dfrac{6-4}{2} = 1$,

এবং যখন $x = -\frac{26}{33}$, $y = \dfrac{-\frac{26}{11} - 4}{2}$ বা, $-\frac{35}{11}$.

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{26}{33} \\ y &= -\tfrac{35}{11} \end{aligned}\right\}$$

Ex. 2. *Solve :*

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ xy &= 35 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\cdots\cdots \quad (1) \\ &\cdots\cdots \quad (2) \end{aligned}$$

(1) সমীকরণ হইতে y-এর লব্ধমান $12 - x$ (2) সমীকরণে বসাইয়া,

$x(12 - x) = 35$,

বা, $x^2 - 12x + 35 = 0$, বা, $(x-7)(x-5) = 0$.

$\therefore$ $x = 7$ বা, 5.

x এর এই মান (1) সমীকরণে বসাইয়া,

যখন $x=7, y=5$, এবং যখন $x=5, y=7$.

$$\therefore \left.\begin{matrix} x=7 \\ y=5 \end{matrix}\right\} \text{ বা } \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=7 \end{matrix}\right\}$$

বিকল্প-পদ্ধতি।

(1)-সমীকরণ হইতে বর্গ করিয়া,

$$x^2+2xy+y^2=144. \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(2)-সমীকরণ হইতে, $4xy=140$. .... (4)

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $x^2-2xy+y^2=4$,

বা, $(x-y)^2=4$. $\therefore$ $x-y=\pm 2$. .... (5)

(5)-এ '+' চিহ্ন লইয়া,

(1) এবং (5)-সমীকরণ যোগ ও বিয়োগ করিয়া যথাক্রমে পাই,

$$x=7, \quad y=5.$$

(5)-এ '−' চিহ্ন লইয়া ঐরূপে পাই, $x=5$, $y=7$.

$$\therefore \left.\begin{matrix} x=7 \\ y=5 \end{matrix}\right\} \text{ অথবা } \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=7 \end{matrix}\right\}$$

Ex. 3. *Solve* : $\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x^2+y^2=41 \end{matrix}\right\}$ .... (1) .... (2)

(1)-সমীকরণ হইতে y এর লব্ধ মান $x-1$, (2)-সমীকরণে বসাইয়া আমরা পাই,

$$x^2+(x-1)^2=41, \quad \text{বা,} \quad x^2+x^2-2x+1=41,$$

$$\text{বা,} \quad 2x^2-2x-40=0, \quad \text{বা,} \quad x^2-x-20=0,$$

$$\text{বা,} \quad (x-5)(x+4)=0. \quad \therefore \quad x=5 \text{ বা } -4.$$

x এর এই মান (1) সমীকরণে বসাইয়া আমরা পাই, $y=4$, বা -5.

$$\therefore \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=4 \end{matrix}\right\} \text{ অথবা, } \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=-5 \end{matrix}\right\}$$

বিকল্প-পদ্ধতি।

(1)-সমীকরণ হইতে বর্গ করিয়া, $x^2-2xy+y^2=1$. .... (3)

(2)-সমীকরণ দ্বিগুণ করিয়া তাহা হইতে (3)-সমীকরণ বিয়োগ করিলে পাই,

$$(x+y)^2=2.41-1=81.$$

$$\therefore \quad x+y=\pm 9. \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

(4)-এ '+' চিহ্ন লইয়া,

(1) এবং (4) যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করিয়া পাই, $x=5, y=4$;

(4)-এ '−' চিহ্ন লইয়া ঐরূপে পাই, $x=-4, y=-5.$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=4 \end{array}\right\} \text{ বা } \left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=-5. \end{array}\right.$$

Ex. 4. *Solve* : $\left.\begin{array}{r} x-y=4 \\ x^2-y^2=40 \end{array}\right\}$ .... (1) .... (2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $x+y=10$ .... (3)

(1) ও (3) যোগ করিয়া, $2x=14$, বা, $x=7$.

এবং (3) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $2y=6$ বা, $y=3$.

$$\therefore \quad x=7, \ y=3.$$

Ex. 5. *Solve* : $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3},$ .... (1)

$x+y=10$ .... (2)

(1) হইতে, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3},$ বা, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3},$

বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{10}{3}$ ($\because x+y=10$)

$\therefore \sqrt{xy}=3,$ বা, $xy=9.$

পূর্ববর্তী Ex. 2 এর বিকল্প-পদ্ধতি অনুসারে $(x-y)^2$ এর মান নির্ণয় করিলে আমরা পাই,

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=10^2-36=64.$$

$$\therefore \quad x-y=\pm 8 \quad .... \quad .... \quad (3)$$

(3)-তে '+' চিহ্ন লইয়া, (2) এবং (3) হইতে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করিয়া, পাই, $x=9, \ y=1.$

ঐরূপে (3)-তে '−' চিহ্ন লইয়া, $x=1, y=9.$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=1 \end{array}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=9 \end{array}\right\}$$

বিকল্প-পদ্ধতি।

মনে কর, $\sqrt{\frac{x}{y}} = p$. সুতরাং, আমরা (1) নিম্নের আকারে লিখিতে পারি

$$p + \frac{1}{p} = \frac{10}{3}, \text{ বা, } \frac{p^2+1}{p} = \frac{10}{3}, \text{ বা, } 3p^2 + 3 = 10p.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $3p^2 - 10p + 3 = 0$,

বা, $(p-3)(3p-1) = 0$, $\therefore$ $p = 3$ বা $\frac{1}{3}$.

$\therefore$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = 3$ বা, $\frac{1}{3}$. বর্গ করিয়া, $\frac{x}{y} = 9$ বা, $\frac{1}{9}$.

প্রথমে, $\frac{x}{y} = 9$ ধরিলে, $\frac{x}{9} = \frac{y}{1} = k$ (মনে কর), $\therefore x = 9k$ এবং $y = k$.

x, y এর এই মান (2)-তে বসাইলে, $9k + k = 10$. $\therefore k = 1$.

$\therefore$ $x = 9$ এবং $y = 1$.

আবার, $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$ হইতে আমরা অনুরূপভাবে পাই $x = 1$ এবং $y = 9$.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=1 \end{array}\right\} \text{ বা } \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=9 \end{array}\right\}$$

Ex. 6. *Solve* : $x^2 + xy = 15$ .... (1)

$y^2 + xy = 10$ .... (2)

(1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা পাই, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$,

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k$ (মনে কর), অর্থাৎ, $x = 3k$, $y = 2k$.

x, y-এর এই মান (1)-এ বসাইয়া আমরা পাই $9k^2 + 6k^2 = 15$.

অর্থাৎ, $k = \pm 1$.

$k = +1$ লইয়া, $x = 3$, $y = 2$; $k = -1$ লইয়া, $x = -3$, $y = -2$.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-4 \end{array}\right\}$$

দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রে সমীকরণ দুইটিই দ্বিঘাত হইলেও, ভাগ করিয়া একটি একঘাত সমীকরণ পাওয়ায়, সমাধান দুই প্রস্থ হইল, চারি প্রস্থ নয়।

Ex. 7. *Solve* : $x+y=a+b.$ .... (1)

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2. \quad .... \quad .... \quad (2)$$

আমরা (1) এবং (2) নিম্নের আকারে লিখিতে পারি,

$$(x-a)+(y-b)=0 \quad ... \quad .... \quad (3)$$

এবং $\frac{1}{x}(x-a)+\frac{1}{y}(y-b)=0.$ .... (4)

এক্ষণে (3) হইতে প্রাপ্ত $(y-b)$ এর মান $-(x-a)$, (4) এ বসাইয়া পাই

$$\frac{1}{x}(x-a)-\frac{1}{y}(x-a)=0,$$

বা, $(x-a)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=0.$ $\therefore$ $x-a=0$ অথবা $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0.$

$(x-a)=0$ অর্থাৎ $x=a$ হইলে, (1) হইতে আমরা পাই $y=b.$

আবার, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$, অর্থাৎ $x=y$ হইলে, (1) হইতে আমরা পাই

$2x=a+b$, বা, $x=\frac{1}{2}(a+b)$, সুতরাং, $y=\frac{1}{2}(a+b).$

$\therefore$ $\left.\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\}$ বা, $x=y=\frac{1}{2}(a+b).$

Ex. 8. *Solve* : $(x-a)(y-b)=ab.$ .... (1)

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}. \quad .... \quad .... \quad (2)$$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$ (মনে কর). $\therefore$ $x=ak$ এবং $y=bk.$

x, y এর এই মান (1)-এ বসাইলে,

$(ak-a)(bk-b)=ab$, বা, $ab(k-1)^2=ab.$

$\therefore$ $(k-1)^2=1.$ বা, $k-1=\pm 1.$ $\therefore$ $k=0$ বা 2.

$\therefore$ $x=y=0$, বা, $x=2a$, $y=2b.$

দ্রষ্টব্য। যে সমস্ত স্থলে $\frac{x}{y}$ এর মান নির্ণয় সহজসাধ্য সেখানে উপরের এই পদ্ধতি প্রয়োগ সুবিধাজনক।

Ex. 9. *Solve* : $x^2+xy=15$ .... (1)

$x-\ y=1.$ .... (2)

(1) হইতে, $x(x+y)=15$ বা, $x-y=\frac{15}{x}.$ .... (3)

(2) এবং (3) যোগ করিয়া, $2x=1+\frac{15}{x}$, বা, $2x^2-x-15=0.$

বা, $(x-3)(2x+5)=0.$ $\therefore\ x=2$ বা $-\frac{5}{2}.$

$\therefore$ (2) হইতে $y=x-1$ বলিয়া,

যখন $x=3,\ y=2$, এবং যখন $x=-\frac{5}{2},\ y=-\frac{7}{2}.$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}\ \text{বা,}\ \left.\begin{matrix}x=2\frac{1}{2}\\y=-3\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$$

Ex. 10. *Solve* : $x^3+y^3=35$ ... (1)

$x+y\ =5$ ... (2)

(1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^2-xy+y^2=7$ ... (3)

(2)-কে বর্গ করিয়া (3) বিয়োগ দিয়া পাই $3xy=18$ বা, $xy=6$ (4)

(3) হইতে (4) বিয়োগ দিয়া, $(x-y)^2=1$ বা, $x-y=\pm 1.$

$x-y=1$ হইলে, (2) এর সহিত যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করিয়া পাই $x=3,\ y=2.$

অনুরূপে, $x-y=-1$ হইলে, $x=2,\ y=3.$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}\ \text{বা,}\ \begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}$$

দ্রষ্টব্য। এখানে সমীকরণ (1) ত্রিঘাত হওয়া সত্ত্বেও, (1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া একটি দ্বিঘাত সমীকরণ (3) পাওয়া গেল। কাজেই, (3) এবং (2) হইতে সমাধানে x এবং y এর দুই প্রস্থ মান পাওয়া গেল, তিন প্রস্থ নয়।

Ex. 11. *Solve* : $(x-y)^2=3-2x-2y.$ ... (1)

$y(x-y+1)=x(y-x+1).$ ... (2)

(2) হইতে $xy-y^2+y=xy-x^2+x,$

বা, $xy-y^2+y-xy+x^2-x=0,$ (পক্ষান্তর করিয়া)

বা, $(x^2-y^2)-(x-y)=0,$ বা, $(x-y)(x+y-1)=0.$

$\therefore\ x-y=0,$ অর্থাৎ $x=y.$

অথবা, $x+y-1=0$, অর্থাৎ $x+y=1$ ... (3)

(1)-সমীকরণে $x=y$ এই মান বসাইয়া, $3-4x=0$, অর্থাৎ $x=\frac{3}{4}$.

$$\therefore \quad x=y=\tfrac{3}{4}.$$

আবার, (2)-এ $x+y=1$, এই মান বসাইয়া,

$$(x-y)^2=3-2(x+y)=3-2=1.$$

$$\therefore \quad x-y=\pm 1 \qquad \cdots \quad (4)$$

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $3x=2$ বা, 0. $\therefore$ $x=1$ বা, 0.

এক্ষণে (3) হইতে, $x=1$ হইলে $y=0$, এবং $x=0$ হইলে $y=1$.

স্বতরাং, $x=y=\frac{3}{4}$, অথবা $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ বা, $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$.

Ex. 12. *Solve :*

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{34}{15}. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}=\frac{152}{15}. \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) এর উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}+2=\frac{1156}{225}$,

বা, $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{1156}{225}-2$,

বা, $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=\frac{706}{225}$, বা $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{353}{225}$.

এক্ষণে, যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{578}{128}=\frac{289}{64}. \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\pm\frac{17}{8} \text{ (বর্গমূল লইয়া)}$$

প্রথমে $\frac{x}{y}=\frac{17}{8}$ ধরিলে, $\frac{x}{17}=\frac{y}{8}=k$ (মনে কর)

$$\therefore \quad x=17k \text{ এবং } y=8k. \qquad \cdots \quad (4)$$

x, y এর এই মান (2) এ বসাইলে,

$$\frac{17k+8k}{\sqrt{17k-8k}}+\frac{17k-8k}{\sqrt{17k+8k}}=\frac{152}{13},$$

বা, $\frac{25}{3}\sqrt{k}+\frac{9}{5}\sqrt{k}=\frac{152}{15}$, বা, $\frac{152}{15}\sqrt{k}=\frac{152}{15}$, বা, $\sqrt{k}=1.$

$\therefore\ k=1.$

$\therefore$ (4) হইতে, $x=17,\ y=8.$

আবার, $\frac{x}{y}=-\frac{17}{8}$ হইলে, অনুরূপভাবে আমরা পাই $x=17,\ y=-8.$

$$\therefore\ x=17,\ y=\pm 8.$$

Ex. 13. *Solve* : $x+\frac{4}{y}=1.$ ... (1)

$y+\frac{4}{x}=25$ ... (2)

(1) হইতে আমরা পাই, $xy+4=y$

এবং (2) হইতে পাই, $xy+4=25x.$

$\therefore\ y=25x.$ ... (3)

y এর এই মান (1)-এ বসাইলে,

$x+\frac{4}{25x}=1$, বা, $25x^2+5=25x$,

বা, $25x^2-25x+1=0$ বা, $(5x-1)(5x-4)=0.$

$\therefore\ x=\frac{1}{5}$ বা, $\frac{4}{5}.$

এক্ষণে, (3) হইতে, $x=\frac{1}{5}$ হইলে $y=4$, এবং $x=\frac{4}{5}$ হইলে, $y=20.$

$\therefore\ x=\frac{1}{5},\ y=5$; বা, $x=\frac{4}{5},\ y=20.$

Ex. 14. *Solve* : $xy+x+y=27$ ... (1)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ ... (2)

(1)এর উভয় পক্ষকে xy দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা পাই,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{27}{xy},\quad \text{বা,}\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{27}{xy}.$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}=\frac{27}{xy},\quad \text{বা,}\quad \frac{1}{xy}=\frac{1}{18}.$$

এক্ষণে, $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{4}{xy}=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}.$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm\frac{1}{6}.\quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) এবং (3) হইতে যোগ ও বিয়োগ করিয়া, যথাক্রমে আমরা পাই

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6},\quad \text{অথবা}\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad x=3,\ y=6\ ;\quad \text{বা,}\quad x=6,\ y=3.$$

Ex. 15. *Solve :* $\left.\begin{aligned}(1+x)(1+y)&=10\\ x^2y+xy^2&=18\end{aligned}\right\}$ $\quad\cdots\quad (1)$ / $\cdots\quad (2)$

(1) হইতে, $x+y+xy=9 \quad \cdots \quad (3)$

(2) হইতে, $xy(x+y)=18.$

$$\therefore\quad (x+y-xy)^2=(x+y+xy)^2-4xy(x+y)=81-72=9.$$

$$\therefore\quad x+y-xy=\pm 3.\quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) হইতে যোগ ও বিয়োগ করিয়া যথাক্রমে আমরা দুই প্রস্থ সমীকরণ পাই,

$$\left.\begin{aligned}x+y&=6\\ xy&=3\end{aligned}\right\}\quad \text{এবং}\quad \left.\begin{aligned}x+y&=3\\ xy&=6\end{aligned}\right\}$$

এই দুই প্রস্থ সমীকরণ হইতে পূর্ব-প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী (Ex. 2 দেখ) x, y এর চারি প্রস্থ পাওয়া যাইবে—দুই প্রস্থ বাস্তব এবং দুই প্রস্থ কাল্পনিক, যথা

$$\left.\begin{aligned}x&=3+\sqrt{6}\\ y&=3-\sqrt{6}\end{aligned}\right\}\quad \text{বা,}\quad \left.\begin{aligned}x&=3-\sqrt{6}\\ y&=3+\sqrt{6}\end{aligned}\right\}$$

$$\text{বা,}\quad \left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{-15})\\ y&=\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{-15})\end{aligned}\right\}\quad \text{বা,}\quad \left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{-15})\\ y&=\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{-15})\end{aligned}\right\}$$

Ex. 16. *Solve* : $\left.\begin{array}{l} x^2+y(x+1)=17 \\ y^2+x(y+1)=13 \end{array}\right\}$ ... (1) ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করিয়া আমরা পাই,

$x^2+2xy+y^2+x+y=30$, বা, $(x+y)^2+(x+y)-30=0$,

বা, $(x+y+6)(x+y-5)=0$, (উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া)

$\therefore\ x+y=5$ অথবা -6. ... (3)

আবার (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া আমরা পাই,

$x^2-y^2+y-x=4$, বা, $(x-y)(x+y)-(x-y)=4$,

বা, $(x-y)(x+y-1)=4$. ... ... (4)

$x+y=5$ হইলে আমরা (4) হইতে পাই,

$(x-y)(5-1)=4$, বা, $x-y=1$.

$\therefore\ x=3$ এবং $y=2$.

আবার, $x+y=-6$ হইলে আমরা (4) হইতে পাই,

$(x-y)(-6-1)=4$, বা, $x-y=-\frac{4}{7}$.

$\therefore\ x=-\frac{23}{7}$ এবং $y=-\frac{19}{7}$.

$\therefore\ x=3, y=2$; বা, $x=-3\frac{2}{7}, y=-2\frac{5}{7}$.

Ex. 17. *Solve* : $\left.\begin{array}{l} 18y^x-y^{2x}=81 \\ 3^x \quad\quad\ =y^2 \end{array}\right\}$ ... (1) .... (2)

(1) হইতে পক্ষান্তর করিয়া, $y^{2x}-18y^x+81=0$,

বা, $(y^x-9)^2=0$, বা, $y^x-9=0$,

বা, $y^x=9$, বা, $\left(y^2\right)^{\frac{x}{2}}=9$,

বা, $\left(3^x\right)^{\frac{x}{2}}=9$, [(2) এর সাহায্যে]

বা, $3^{\frac{x^2}{2}}=3^2$. $\therefore\ \frac{x^2}{2}=2$ বা, $x^2=4$.

$\therefore\ x=\pm 2$.

x এর এই মান (2) এ বসাইলে,

যখন $x=2, \quad y^2=9. \qquad \therefore\ y=\pm 3.$

যখন $x=-2,\ y^2=3^{-2}=\frac{1}{9}. \quad \therefore\ y=\pm\frac{1}{3}.$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l}x=2\\y=-3\end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l}x=-2\\y=\frac{1}{3}\end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}$$

Ex. 18. *The area of the rectangular floor of a room is 192 sq. ft., and one of its diagonals is 20 ft. Find the perpendicular of the floor.*

মনে কর, ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে x ft. ও y ft.

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$xy=192 \cdots \text{(i)} \qquad \sqrt{x^2+y^2}=20,$$

বা, $x^2+y^2=400 \cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) হইতে, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=400+384=784.$

$\therefore\ x+y=28.$

$\therefore$ মেঝের পরিসীমা $=2(x+y)=56$ ft.

Examples XIII

Solve the following equations :—

1. $x+y=16,\ xy=63.$

2. $x-y=2,\ xy=35.$

3. $2x+3y=7,\ xy=2.$

4. $5x+3y=39,\ xy=24.$

5. $5x-2y=2,\ xy=8.$

6. $x^2+y^2=13,\ x+y=5.$

7. $x^2-y^2=99,\ x+y=11.$

8. $x^2+y^2=25,\ xy=12.$

9. $x^2+xy+y^2=49,\ x+y=8.$

10. $x^2-xy+y^2=19,\ x-y=2.$

11. $x-y=10,\ x^2-4xy+y^2=52.$

12. $3x-2y=2,\ 9x^2-7xy+4y^2=104.$

13. $3x+4y=25,$
$x^2+y^2=25.$

14. $x+2y=5,$
$3x^2-5xy+4y^2=16.$

15. $x+3y=7,$
$2x^2+3xy+4y^2=24.$

16. (i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},$
$x+y=5.$

(ii) $x+y+xy=5,$
$xy(x+y)=6.$

17. (i) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4},$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}.$

(ii) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{481}{576},$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{29}{24}.$

18. $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=19,$
$\frac{25}{x^2}+\frac{9}{y^2}=181.$

19. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5,$
$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}.$

20. $5x-3y=1,$
$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=2\frac{2}{3}.$

21. $x+y=\frac{5}{6},$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$

22. $2x+3y=14,$
$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{y-2}=5.$

23. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=2.$

24. $x+y=a+b,$
$(x+a)(y+b)=c^2.$

25. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2a,$
$(a-b)x+(a+b)y=a+b.$

26. $x^2+pxy+y^2=p+2,$
$qx^2+xy+qy^2=2q+1.$

27. $x+y-\sqrt{xy}=7,$
$x^2+y^2+xy=133.$

28. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\tfrac{3}{2}},$
$\sqrt{xy}=3.$

29. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},$
$x+y=10.$

30. $2\sqrt{\frac{x}{y}}+3\sqrt{\frac{y}{x}}=5,$
$x+y=13.$

31. $x^2+y^2=10,$
$x+y+3\sqrt{x+y}=10.$

32. (i) $x^3-y^3=218,$
$x-y=2.$

(ii) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2},$
$x+y=3.$

33. (i) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3,$
$x+y=9.$

(ii) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=4,$
$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=28.$

34. $x^3+y^3=9,$
$x^2-xy+y^2=3.$

35. $x-\sqrt{x}=7-y,$
$y-\sqrt{y}=9-x.$

36. $xy-\frac{x}{y}=a,$
$xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a}.$

37. $x^2-2xy=21,$
$xy+y^2=18.$

38. $\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{5}{3},$
$x^2+y^2=2.$

39. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}},$
$2x-3y=4.$

40. $9^x=3^y,\ 8^{xy}=4^{y+1}.$

41. $x^y=y^2,\ y^{2y}=x^4.$

42. $y^x=4,\ y^2=2^x.$

43. $y^x=x^y,\ x^a=y^b.$

44. $8.2^{xy}=4^y,\ 9^x.3^{xy}=\frac{1}{27}.$

45. $18y^x-y^{2x}=81,\ y^2=3^x.$

46. The area of a rectangular courtyard is 735 sq. ft. and its perimeter is 112 ft. Find its length and breadth.

47. A rectangular garden has its diagonal 60 ft., and its length is 12 ft. more than its breadth. Find its area.

48. The sum of the three sides of a right-angled triangle is 30, and the product of these sides is 780. Find the area of the triangle.

ANSWERS

1. $x=9, y=7;\ x=7, y=9.$ **2.** $x=7, y=5;\ x=5, y=7.$

3. $x=2, y=1;\ x=\frac{3}{2}, y=\frac{4}{3}.$ **4.** $x=3, y=8;\ x=4\frac{4}{5}, y=5.$

5. $x=2, y=4;\ x=-1\frac{3}{5}, y=-5.$ **6.** $x=3, y=2;\ x=2, y=3.$

7. $x=10, y=1.$

8. $x=4, y=3;\ x=3, y=4;\ x=-4, y=-3;\ x=-3, y=-4.$

9. $x=5, y=3;\ x=3, y=5.$ **10.** $x=5, y=3;\ x=-3, y=-5.$

11. $x=12, y=2;\ x=-2, y=-12.$ **12.** $x=4, y=5;\ x=-3\frac{1}{3}, y=-6.$

13. $x=3, y=4.$ **14.** $x=3, y=1;\ x=\frac{6}{13}, y=2\frac{7}{26}.$

15. $x=1, y=2;\ x=-1\frac{7}{13}, y=2\frac{11}{13}.$ **16.** (i) $x=3, y=2;\ x=2, y=3.$
(ii) $x=2, y=1;\ x=1, y=2.$ (Two more imaginary sets of solutions)

17. (i) $x=2, y=1;\ x=1, y=2.$ (ii) $x=\frac{6}{5}, y=\frac{8}{5};\ x=\frac{8}{5}, y=\frac{6}{5}.$

18. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3};\ x=\frac{5}{9}, y=\frac{3}{10}.$ **19.** $x=6, y=10;\ x=4, y=15.$

20. $x=2, y=3;\ x=\frac{3}{40}, y=-\frac{6}{40}.$ **21.** $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2};\ x=2\frac{1}{2}, y=-1\frac{2}{3}.$

22. $x=3\frac{1}{2}, y=2\frac{1}{3};\ x=3\frac{2}{5}, y=2\frac{2}{5}.$ **23.** $x=a, y=b.$

24. $x=b+\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)},\ y=a-\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)};$
$x=b-\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)},\ y=a+\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}.$

25. $x=\frac{a}{a-b},\ y=\frac{b}{a+b};\ x=y=\frac{a+b}{2a}.$ **26.** $x=1, y=1;\ x=-1, y=-1.$

27. $x=9, y=4;\ x=4, y=9.$ **28.** $x=6, y=1\frac{1}{2};\ x=1\frac{1}{2}, y=6.$

29. $x=8, y=2;\ x=2, y=8.$ **30.** $x=9, y=4;\ x=y=6\frac{1}{2}.$

31. $x=3, y=1;\ x=1, y=3.$ (Two more imaginary sets of solutions).

32. (i) $x=7, y=5;\ x=-5, y=-7.$ (ii) $x=2, y=1;\ x=1, y=2.$

33. (i) $x=8, y=1;\ x=1, y=8.$ (ii) $x=9, y=1;\ x=1, y=9.$

34. $x=2, y=1;\ x=1, y=2.$ **35.** $x=9, y=1;\ x=\frac{1}{4}, y=6\frac{1}{4}.$

36. $x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ y=\sqrt{a^2+1};\ x=-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ y=-\sqrt{a^2+1}.$

37. $x=7, y=2;\ x=-7, y=-2;\ x=\sqrt{3}, y=-3\sqrt{3};\ x=-\sqrt{3}, y=3\sqrt{3}.$

38. $x=\frac{7}{5}, y=-\frac{1}{5};\ x=-\frac{1}{5}, y=\frac{7}{5}.$

39. $x=2, y=0;\ x=-12, y=-9\frac{1}{3}.$ **40.** $x=1, y=2;\ x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}.$

41. $x=\pm 2, y=2;\ x=\pm\frac{1}{2}, y=-2.$ **42.** $x=2, y=\pm 2;\ x=-2, y=\pm\frac{1}{2}.$

43. $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}},\ y=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}.$

44. $x=3, y=-3;\ x=-1, y=1.$ **45.** $x=2, y=\pm 3;\ x=-2, y=\pm\frac{1}{3}.$

46. 35 ft., 21 ft. **47.** 1728 sq. ft. **48.** 30.

চতুর্দশ অধ্যায়

ভেদ (Variation)

14·1. সংজ্ঞা।

দুইটি চলরাশি যদি পরস্পর এরূপভাবে সম্বন্ধ হয় যে, উহাদের মধ্যে একটি পরিবর্তিত হইলে অপরটিও সেই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে রাশি দুইটি সরলভেদে অবস্থিত (varies directly) বলা হয়। সাধারণতঃ আমরা "সরল" কথাটি ব্যবহার না করিয়া শুধু 'দুইটি রাশিভেদে অবস্থিত' বলিয়া থাকি।

মনে কর, একখানি ট্রেন সমান বেগে প্রতি ঘণ্টায় 50 মাইল বেগে চলিতেছে। তাহা হইলে ট্রেনখানি আধ ঘণ্টায় 25 মাইল, দুই ঘণ্টায় 100 মাইল, 15 মিনিটে $12\frac{1}{2}$ মাইল ইত্যাদি পথ অতিক্রম করিবে। এখানে সময়ের হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অতিক্রান্ত পথের দূরত্বের হ্রাসবৃদ্ধি হইবে। সময় দ্বিগুণ হইলে, অতিক্রান্ত দূরত্ব দ্বিগুণ হইবে, সময় অর্ধেক হইলে অতিক্রান্ত দূরত্ব অর্ধেক হইবে ইত্যাদি। এই ব্যাপারই অন্যপ্রকারে প্রকাশ করা হয়, "কোন চলন্ত বস্তুর গতিবেগ সমান থাকিলে, অতিক্রান্ত পথ সময়ের সহিত ভেদে অবস্থিত।"

দুই রাশি ভেদে অবস্থিত বুঝাইতে সংক্ষেপের জন্যে ভেদ-নির্দেশক সাংকেতিক চিহ্ন '$\propto$' ব্যবহার করা হয়। A এবং B ভেদে অবস্থিত বুঝাইতে আমরা সংক্ষেপে $A \propto B$ লিখিয়া থাকি।

14·2. যদি $A \propto B$ হয়, তবে $A = mB$ হইবে, m একটি ধ্রুবক।

মনে কর, Aএর এক প্রস্থ মান $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ হইলে Bএর অনুরূপ এক প্রস্থ মান যথাক্রমে $b_1, b_2, b_3, \ldots$ হয়।

তাহা হইলে, সংজ্ঞানুসারে $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{b_1}$; $\frac{A}{a_2} = \frac{B}{b_2}$; $\frac{A}{a_3} = \frac{B}{b_3}$; ইত্যাদি।

$\therefore$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots\cdots$, প্রত্যেকটি $\frac{A}{B}$ এর সমান বলিয়া।

$\therefore$ $\dfrac{A \text{ এর যে-কোন মান}}{B \text{ এর অনুরূপ মান}}$ সতত অপরিবর্তিত থাকে।

অর্থাৎ, $\frac{A}{B} = m$, যখন m একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad A = mB.$

'm' **ভেদ-ধ্রুবক** (Constant of Variation) নামে পরিচিত।

ভেদে অবস্থিত দুই রাশির যদি অনুরূপ মান (অর্থাৎ কোনটির নির্দিষ্ট এক মান এবং তদনুসারে অপরটির মান) দেওয়া থাকে, তবে ভেদ-ধ্রুবক নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, $A \propto B$ এবং Aএর মান যখন 15, Bএর মান তখন 3. $\because \; A \propto B, \; \therefore \; A = mB \; ; \; \therefore \; 15 = m.3 \; ; \; \therefore$ ভেদ-ধ্রুবক $m = 5$.

বিপরীতক্রমে, যদি $A = mB$ হয় (m একটি ধ্রুবক), তাহা হইলে $A \propto B$ হইবে। কারণ, B পরিবর্তিত হইলে A-ও সেই একই অনুপাতে পরিবর্তিত হইবে।

14·3. ব্যস্তভেদ (Inverse Variation)।

দুইটি রাশি A ও B যদি এরূপভাবে সম্বদ্ধ হয় যে, উহাদের একটি অপরটির অন্যোন্যকের (reciprocal) সহিত সরলভেদে অবস্থিত, তবে A, B রাশি দুইটি ব্যস্তভেদে অবস্থিত (vary inversely) বলা হয়। A এবং B ব্যস্তভেদে অবস্থিত হইবে, যদি $A \propto \frac{1}{B}$ হয়, অর্থাৎ যদি $A = \frac{m}{B}$ হয়, m একটি ধ্রুবক।

অর্থাৎ $AB = m.$

অতএব, ইহা হইতে অনুধাবন করা যায় যে, দুইটি রাশি ব্যস্তভেদে অবস্থিত হইলে উহাদের গুণফল ধ্রুবক হইবে এবং বিপরীতক্রমে দুইটি রাশির গুণফল ধ্রুবক হইলে উহাদের একটি অপরটির সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত হইবে।

একটি কার্য সম্পন্ন করিতে যদি 16 জন লোকের 12 দিন লাগে, তবে 8 জন লোকের 24 দিন, 32 জন লোকের 6 দিন ইত্যাদি লাগিবে। ইহা হইতে সুস্পষ্ট যে, নিযুক্ত লোকসংখ্যা বৃদ্ধি পাইলে কার্য-সমাপনের সময় সেই অনুপাতে হ্রাস পায়। আবার, নিযুক্ত লোক-সংখ্যা হ্রাস করিলে কার্য-সমাপনের সময় সেই অনুপাতে বৃদ্ধি পায়। অতএব, উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে কোন কার্যে নিযুক্ত লোক-সংখ্যা, সেই কার্য-সমাপনের সময়ের সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত।

14·4. যৌগিক ভেদ (Joint Variation)।

একটি রাশি যদি অপর কতকগুলি রাশির গুণফলের সহিত ভেদে অবস্থিত হয়, তবে প্রথম রাশিটি অপর রাশিগুলির সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত (is in joint variation with or varies jointly as) বলা হয়।

$A \propto BC$ অথবা $A = mBC$ (m একটি ধ্রুবক) হইলে, A রাশি B এবং C রাশির সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত। কোন টাকার উপর নির্দিষ্ট হারে কিছু সময়ের সুদ যৌগিক ভেদের প্রকৃষ্ট উদাহরণ। যদি আসল টাকা P, সময় n, সুদের হার r এবং সুদ I হয়, তাহা হইলে $I \propto Pnr$.

আবার, A রাশি যদি $\frac{B}{C}$ রাশির সহিত ভেদে অবস্থিত হয়, তবে A রাশি B রাশির সহিত সরলভেদে এবং C রাশির সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত বলা হয়। কোন ভ্রমণকার্য শেষ করিতে যে সময় লাগে, তাহা ভ্রমণপথের দৈর্ঘ্যের সহিত সরলভেদে এবং ভ্রমণের গতিবেগের সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত।

14·5. কতকগুলি প্রয়োজনীয় তথ্য।

(i) যদি $A \propto B$ হয় এবং $B \propto C$ হয়, তবে $A \propto C$ হইবে।

$\because A \propto B$, $\therefore A = mB$, m একটি ধ্রুবক। আবার, $\because B \propto C$, $\therefore B = nC$, n একটি ধ্রুবক।

$\therefore A = mB = mnC$. অতএব, $A \propto C$. [$\because m, n$ উভয়েই ধ্রুবক বলিয়া mn-ও ধ্রুবক]

(ii) যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$ হয়, তবে $A \pm B \propto C$

এবং $\sqrt{AB} \propto C$ হইবে।

$\because A \propto C$. $\therefore A = mC$. অনুরূপ কারণে, $B = nC$.

$\therefore A \pm B = (m \pm n)C$. অর্থাৎ $A \pm B \propto C$.

আবার, $AB = mnC^2$. $\therefore \sqrt{AB} = \sqrt{mn}C$. $\therefore \sqrt{AB} \propto C$.

(iii) যদি $A \propto B$ হয় এবং $C \propto D$ হয়, তবে $AC \propto BD$ এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$ হইবে। $\because A = mB$ এবং $C = nD$ (m, n ধ্রুবক), $\therefore AC = mnBD$, অর্থাৎ $AC \propto BD$, এবং $\frac{A}{C} = \frac{m}{n} \cdot \frac{B}{D}$ অর্থাৎ $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

(iv) যদি $A \propto B$ হয় এবং $A \propto C$ হয়, তবে $A \propto B - C$ হইবে।

$A \propto B, \quad \therefore \ A = mB$ বা $B = \frac{1}{m} \cdot A.$

আবার, $A = nC, \quad \therefore \ C = \frac{1}{n} A.$

$$\therefore \quad B - C = A\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = \frac{A(n-m)}{mn}. \quad \therefore \ A = \frac{mn}{n-m}(B - C).$$

অর্থাৎ $A \propto B - C.$

(v) যদি $A \propto BC$ হয়, তবে $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$ হইবে।

এখানে $A = mBC$, m ধ্রুবক।

$\therefore \quad B = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{C}$ এবং $C = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{B}$.

$\therefore \quad B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$ হইবে যেহেতু $\frac{1}{m}$ একটি ধ্রুবক।

14·6. ভেদ-সংক্রান্ত একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা।

তিনটি রাশি A, B, C যদি এইরূপ সম্বদ্ধ হয় যে, $A \propto B$ যখন C ধ্রুবক এবং $A \propto C$ যখন B ধ্রুবক, তাহা হইলে $A \propto BC$ হইবে, যখন B, C উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

Aএর পরিবর্তন অংশতঃ Bএর এবং অংশতঃ Cএর পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল। মনে কর, B এবং C এর পরিবর্তন যুগপৎ না হইয়া পৃথক্ পৃথক্ ভাবে সংঘটিত হয় এবং দুই পৃথক্ পরিবর্তনের ফলে A এর পরিবর্তন সাধিত হয়, তাহাও পৃথক্ পৃথক্ রূপে হইবে। এখন, মনে কর, A, B, C রাশিত্রয়ের তিনটি যুগপৎ মান a, b, c অর্থাৎ Aএর মান যখন a, তখন Bএর মান b এবং Cএর মান c.

প্রথমতঃ, ধর Cএর মান অপরিবর্তিত থাকিল এবং Bএর মান পরিবর্তিত হইয়া b হইল, তাহা হইলে Aএর পরিবর্তন সম্পূর্ণ হইল না এবং Bএর পরিবর্তনের ফলে Aএর মান a না হইয়া অপর একটি মান a' হইল মনে কর। তাহা হইলে

$$\frac{A}{a'} = \frac{B}{b}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় পর্যায়ে ধর, B অপরিবর্তিত থাকিল অর্থাৎ Bএর মান b রহিল এবং Cএর মান পরিবর্তিত হইয়া c হইল। তখন Aএর মানের পরিবর্তন সম্পূর্ণ হইয়া a' হইতে a হইল। তাহা হইলে

$$\frac{a'}{a}=\frac{C}{c}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

এক্ষণে (1) এবং (2) গুণ করিয়া, $\frac{A}{a'}\times\frac{a'}{a}=\frac{B}{b}\cdot\frac{C}{c}$;

$$\text{অর্থাৎ,}\quad A=\frac{a}{bc}\times BC.$$

$$\therefore\quad A\propto BC.$$

দ্রষ্টব্য। সময় এবং কার্যসংক্রান্ত প্রশ্নাবলীর সমাধানে আমরা এই প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ করিতে পারি।

নির্দিষ্ট-সংখ্যক লোক কর্তৃক কৃত কোন কার্যের পরিমাণ এবং কার্য করিবার সময় সরলভেদে অবস্থিত। আবার, কোন নির্দিষ্ট সময়ে কৃত কার্যের পরিমাণ এবং নিযুক্ত লোকের সংখ্যা সরলভেদে অবস্থিত। সুতরাং, উপরের প্রতিজ্ঞা-অনুসারে নিযুক্ত লোকের সংখ্যা এবং কার্যকাল (কতদিন, ইত্যাদি) উভয়েই পরিবর্তিত হইলে নিষ্পন্ন কার্যের পরিমাণ ও দিন বা ঘণ্টার সংখ্যা সরলভেদে অবস্থিত হইবে।

রসায়নবিদ্যা বা পদার্থবিদ্যায় বায়বীয়-চাপ সংক্রান্ত প্রভৃতি প্রশ্নাবলী সমাধানে এই প্রতিজ্ঞার উপযোগিতার সম্যক উপলব্ধি হইবে।

14·7. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If $x+y\propto z$ when y is constant and $x+z\propto y$, when z is constant, show that $x+y+z\propto yz$ when both y and z vary.*

$\because\ x+y\propto z,\ \therefore\ x+y=mz,$ m একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ x+y+z=mz+z=(m+1)z.$

$\therefore\ x+y\propto z,$ যখন y অপরিবর্তিত থাকে।

আবার, $x+z\propto y,\ \therefore\ x+z=ny,$ n একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ x+y+z=ny+y=(n+1)y.$

$\therefore\ x+y+z\propto y,$ যখন z অপরিবর্তিত থাকে।

$\therefore\ x+y+z\propto yz,$ যখন y, z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

Ex. 2. *If x varies inversely as* y^2-1 *and* $y=10$, *when* $x=24$; *find x, when* $y=5$.

$\because\ x \propto y^2-1$. $\therefore\ x=m/y^2-1$, m একটি ধ্রুবক।

এই সমীকরণে $x=24$ এবং $y=10$ বসাইয়া আমরা পাই

$$24=\frac{m}{99}. \quad \therefore \quad m=24\times 99.$$

$$\therefore \quad x=\frac{24\times 99}{y^2-1}.$$

এখানে yএর মান 5 বসাইয়া আমরা পাই $x=\dfrac{24\times 99}{25-1}=99.$

Ex. 3. *If* $a\propto b+c$, $b\propto c+a$ *and* $c\propto a+b$, *find the relation between the constants of variation.*

যেহেতু, $a\propto b+c$, $\therefore\ a=l(b+c)$, বা $a-lb-lc=0 \quad \cdots (1)$

$b\propto c+a$, $\therefore\ b=m(c+a)$. বা $-ma+b-mc=0 \quad (2)$

$c\propto a+b$, $\therefore\ c=n(a+b)$, বা $-na-nb+c=0 \cdots (3)$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা।

$$\frac{a}{lm+l}=\frac{b}{lm+m}=\frac{c}{1-lm}=k \text{ (মনে কর)।}$$

$\therefore\ a=kl(m+1),\ b=km(l+1),\ c=k(1-lm).$

a, b এবং cএর এই মানগুলি (3)-এ বসাইলে,

$$-nkl(m+1)-nkm(l+1)+k(1-lm)=0,$$

বা, $-lmn-ln-lmn-mn+1-lm=0$

বা, $2lmn+mn+nl+lm=1.$

Ex. 4. *If* $a^2+b^2\propto ab$, *show that* $a+b\propto a-b$.

$\because\ a^2+b^2\propto ab$. $\therefore\ a^2+b^2=m.ab$, m ধ্রুবক।

$$\therefore \quad \frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{m}{2}.$$

$\therefore$ যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\dfrac{m+2}{m-2}$,

বা, $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\dfrac{m+2}{m-2}.$

বর্গমূল লইয়া, $\frac{a+b}{a-b} = \pm\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}$ = একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad a+b \propto a-b.$

Ex. 5. *If z varies directly as x and inversely as the square of y, find the percentage increase in z due to an increase in x of 12% and a decrease in y of 20%.*

যেহেতু, z, xএর সহিত সরলভেদে এবং yএর বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে অবস্থিত

$\therefore \quad z = \frac{mx}{y^2}$, m একটি ধ্রুবক।

$12\% = \frac{3}{25}$ এবং $20\% = \frac{1}{5}$

এক্ষণে, xএর মান 12% বা $\frac{3}{25}$ বৃদ্ধি পাইলে এবং yএর মান 20% বা $\frac{1}{5}$ হ্রাস পাইলে zএর বর্ধিত মান যদি z' হয়, তবে

$$z' = \frac{mx(1+\frac{3}{25})}{\{y(1-\frac{1}{5})\}^2} = \frac{mx.\frac{28}{25}}{y^2.\frac{16}{25}} = \frac{mx}{y^2}.\frac{7}{4} = \frac{7}{4}.z.$$

$\therefore \quad z$ এর বৃদ্ধি $\frac{7}{4}z - z = \frac{3}{4}z$,

অর্থাৎ 75% বৃদ্ধি।

Ex. 6. *The volume of a pyramid varies jointly as its height and the area of its base ; when the area of the base is 80 sq. ft. and the height 18 ft. the volume is 480 cu. ft. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 510 cu. ft. and height 9 ft. ?*

মনে কর, পিরামিডের আয়তন V, উচ্চতা h এবং ভূমির ক্ষেত্রফল A.

তাহা হইলে, $V = m.Ah$, m একটি ধ্রুবক।

এই সমীকরণে V, A এবং h এর প্রদত্ত মান বসাইয়া,

$$480 = m \times 80 \times 18.$$

$$\therefore \quad m = \frac{480}{80 \times 18} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \quad V = \tfrac{1}{3}Ah.$$

আবার যখন $V = 510$ এবং $h = 9$,

$$510 = \tfrac{1}{3}.A \times 9. \quad \therefore A = 170.$$

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল = 170 বর্গফুট।

Ex. 7. *Three globes of gold whose radii are 3 cms., 4 cms. and 5 cms. are melted into a new globe ; find the radius of the new globe, given that the volume of a globe varies as the cube of its radius.*

মনে কর, গোলক তিনটির আয়তন V_1, V_2 এবং V_3 এবং উৎপন্ন গোলকের আয়তন V এবং ব্যাসার্ধ r.

যেহেতু, গোলকের আয়তন এবং উহার ব্যাসার্ধের ঘন ভেদে অবস্থিত,

$\therefore \quad V_1 = m.3^3 = 27m,\ V_2 = m.4^3 = 64m,$

$V_3 = m.5^3 = 125m$ এবং $V = mr^3$, m একটি ধ্রুবক।

যেহেতু, $V = V_1 + V_2 + V_3.$

$\therefore \quad mr^3 = 27m + 64m + 125m,$

বা, $\quad r^3 = 216.$

$\therefore \quad r = 6.$

$\therefore$ উৎপন্ন গোলকের ব্যাসার্ধ $= 6$ সে. মি.।

Ex. 8. *If x, y, z be three variables such that $y+z-x$ is constant and $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$, show that $x+y+z \propto yz$.*

যেহেতু $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$

$\therefore \quad (z+x-y)(x+y-z) = m.yz$, m একটি ধ্রুবক।

মনে কর, $y+z-x = k$ একটি ধ্রুবক।

বা, $\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\} = m.yz,$

বা, $x^2-(y-z)^2 = m.yz,$

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz = myz-4y^2,$

বা, $x^2-(y+z)^2 = yz(m-4),$

বা, $(x+y+z)(x-y-z) = yz(m-4),$

বা, $(x+y+z)(-k) = yz(m-4) \quad [\because y+z-x=k]$

$\therefore \quad \dfrac{x+y+z}{yz} = -\dfrac{m-4}{k} =$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y+z \propto yz.$

Ev. 9. *The rate of consumption of coal by a locomotive varies as the square of the speed and is* 1800 *lbs. per hour when the speed is* 40 *miles per hour. If the cost of coal be Rs.* 44·80 *per ton and if the other expenses of the train be Rs.* 32·40 *per hour, find a formula for the cost in n.p. per mile when the speed is v miles per hour.*

যেহেতু ইঞ্জিনের প্রতি ঘণ্টায় কয়লা-খরচ এবং গতিবেগের বর্গ ভেদে অবস্থিত। সুতরাং ইঞ্জিনের কয়লা-খরচ প্রতি ঘণ্টায় c এবং গতিবেগ v হইলে,

$c = kv^2$, k একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad 1800 = k.1600$, অর্থাৎ $k = \frac{9}{8}$.

ইঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় v মাইল হইলে, 1 ঘণ্টায় অর্থাৎ v মাইল যাইতে ইঞ্জিনের কয়লা-খরচ kv^2 পাউণ্ড বা $\frac{9}{8}v^2$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে কয়লা-খরচ $\frac{9v}{8}$ পা. বা $\frac{9v}{8 \times 2240}$ টন।

এবং $\frac{9v}{8 \times 2240}$ টন কয়লার মূল্য $= \frac{9v}{8 \times 2240} \times 4480$ পে. $= \frac{9v}{4}$ ন. প.;

আবার, 1 ঘণ্টায় অর্থাৎ v মাইল যাইতে অন্যান্য খরচ 3240 ন. প.;

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে অন্যান্য খরচ $= \frac{3240}{v}$ ন. প.;

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে মোট খরচ $= \left(\frac{3240}{v} + \frac{9v}{4}\right)$ ন. প.

$= 9\left(\frac{33·6}{v} + ·25v\right)$ ন. প.।

Examples XIV

1. If $x \propto \frac{1}{y}$ and $y \propto \frac{1}{z}$, show that $z \propto x$.

2. If y be the sum of three quantities which vary as x, x^2, x^3 and when $x = 1, 2, 3$, $y = 4, 8, 18$ respectively, express y in terms of x.

Ex. 7. *Three globes of gold whose radii are 3 cms., 4 cms. and 5 cms. are melted into a new globe ; find the radius of the new globe, given that the volume of a globe varies as the cube of its radius.*

মনে কর, গোলক তিনটির আয়তন V_1, V_2 এবং V_3 এবং উৎপন্ন গোলকের আয়তন V এবং ব্যাসার্ধ r.

যেহেতু, গোলকের আয়তন এবং উহার ব্যাসার্ধের ঘন ভেদে অবস্থিত,

$\therefore \quad V_1 = m.3^3 = 27m,\ V_2 = m.4^3 = 64m,$

$V_3 = m.5^3 = 125m$ এবং $V = mr^3$, m একটি ধ্রুবক।

যেহেতু, $V = V_1 + V_2 + V_3$.

$\therefore \ mr^3 = 27m + 64m + 125m,$

বা, $r^3 = 216.$

$\therefore \quad r = 6.$

$\therefore$ উৎপন্ন গোলকের ব্যাসার্ধ $= 6$ সে. মি.।

Ex. 8. *If x, y, z be three variables such that $y+z-x$ is constant and $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$, show that $x+y+z \propto yz$.*

যেহেতু $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$

$\therefore \quad (z+x-y)(x+y-z) = m.yz$, m একটি ধ্রুবক।

মনে কর, $y+z-x = k$ একটি ধ্রুবক।

বা, $\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\} = m.yz,$

বা, $x^2-(y-z)^2 = m.yz,$

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz = myz-4y^2,$

বা, $x^2-(y+z)^2 = yz(m-4),$

বা, $(x+y+z)(x-y-z) = yz(m-4),$

বা, $(x+y+z)(-k) = yz(m-4) \quad [\because y+z-x=k]$

$\therefore \quad \dfrac{x+y+z}{yz} = -\dfrac{m-4}{k} =$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y+z \propto yz.$

Ev. 9. *The rate of consumption of coal by a locomotive varies as the square of the speed and is* 1800 *lbs. per hour when the speed is* 40 *miles per hour. If the cost of coal be Rs.* 44·80 *per ton and if the other expenses of the train be Rs.* 32·40 *per hour, find a formula for the cost in n.p. per mile when the speed is v miles per hour.*

যেহেতু ইঞ্জিনের প্রতি ঘণ্টায় কয়লা-খরচ এবং গতিবেগের বর্গ ভেদে অবস্থিত। সুতরাং ইঞ্জিনের কয়লা-খরচ প্রতি ঘণ্টায় c এবং গতিবেগ v হইলে,

$c = kv^2$, k একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad 1800 = k.1600$, অর্থাৎ $k = \frac{9}{8}$.

ইঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় v মাইল হইলে, 1 ঘণ্টায় অর্থাৎ v মাইল যাইতে ইঞ্জিনের কয়লা-খরচ kv^2 পাউণ্ড বা $\frac{9}{8}v^2$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে কয়লা-খরচ $\frac{9v}{8}$ পা. বা $\frac{9v}{8 \times 2240}$ টন।

এবং $\frac{9v}{8 \times 2240}$ টন কয়লার মূল্য $= \frac{9v}{8 \times 2240} \times 4480$ পে. $= \frac{9v}{4}$ ন.প.;

আবার, 1 ঘণ্টায় অর্থাৎ v মাইল যাইতে অন্যান্য খরচ 3240 ন. প.;

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে অন্যান্য খরচ $= \frac{3240}{v}$ ন. প.;

$\therefore$ 1 মাইল যাইতে মোট খরচ $= \left(\frac{3240}{v} + \frac{9v}{4}\right)$ ন. প.

$= 9\left(\frac{33{\cdot}6}{v} + {\cdot}25v\right)$ ন. প.।

Examples XIV

1. If $x \propto \frac{1}{y}$ and $y \propto \frac{1}{z}$, show that $z \propto x$.

2. If y be the sum of three quantities which vary as x, x^2, x^3 and when $x = 1, 2, 3$, $y = 4, 8, 18$ respectively, express y in terms of x.

3. If $\frac{x}{y} \propto x+y$ and $\frac{y}{x} \propto x-y$, show that x^2-y^2 is constant.

4. A quantity a varies directly as x and another quantity b varies inversely as x. When $x=2$, the sum of a and b is 7, and when $x=3$, the sum is 8. Find the sum when $x=4$.

5. A varies jointly as B and C; and $A=4$, when $B=3$ and $C=2$; find A when $B=5$ and $C=9$.

6. If $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$, show that $x \propto y$.

7. x varies directly as y and inversely as z, and $x=2$, when $x=\frac{4}{7}$ and $z=\frac{1}{4}$, find the relation between x, y, z. Hence find x, when $y=12$ and $z=\frac{7}{12}$.

8. If $5x-y \propto 10x-11y$ and $y=5$, when $x=7$, find the relation between x and y.

9. If $a \propto bc$ and $b \propto ca$, show that c is a constant.

10. If $x+y \propto x-y$, show that

(i) $x^3+y^3 \propto xy(x-y)$; (ii) $xy \propto x^2-y^2$.

11. If $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \propto \frac{1}{x-y}$, prove that $x^2+y^2 \propto xy$.

12. If $a \propto b$ and $b \propto c$, show that

$a+b+c \propto \sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$.

13. If $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$ and $z \propto \frac{b}{a}$, show that $b \propto \sqrt[4]{ax}$.

14. If $x \propto y$ and $y \propto z$ and if a, b, c and a', b', c' are two sets of corresponding values of x, y, z, show that

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

15. If $x \propto y$ and $y \propto z$, show that

(i) $x^2+y^2+z^2 \propto yz+zx+xy$;

(ii) $x^3+y^3+z^3 \propto xyz$;

(iii) $ax+by+cz \propto A\sqrt{yz}+B\sqrt{zx}+C\sqrt{xy}$;

(iv) $x^n+y^n+z^n \propto yz^{n-1}+zx^{n-1}+xy^{n-1}$.

16. Given that y is inversely proportional to $ax+2$ where a is a constant, and that $y=48$ when $x=10$, and $y=30$, when $x=20$; find the value of a and the relation between x and y.

17. The time of oscillation of a simple pendulum varies as the square root of its length. The times of oscillation of three pendulums are proportional to a, b and c. If the second is d ft. longer than the first, find the difference in length between the second and the third.

18. The electrical resistance of a wire of circular cross-section varies directly as its length and inversely as the square of the radius of its cross-section. Two wires have equal resistances and the length of one is twice that of the other. Show that the one is four times as heavy as the other.

19. If $a^2+b^2 \propto x^2+y^2$, $ab \propto xy$ and $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, show that $a+b \propto x+y$.

20. If $ax^2+2hxy+by^2 \propto z^2$ and $lx+my \propto z$, show that $x \propto y$.

21. If $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \propto x^2y^2$, prove that either $x^2+y^2=z^2$, or $x^2+y^2-z^2 \propto xy$.

22. The weight w of a right circular cylindrical body varies as its height h and square of the diameter d of its base. Insert suitable values in the blank of the following table :

w	50		22·5	100
h	5	8	4	
d	2	·5		2

23. The wind pressure on a plane surface varies jointly as the surface area and the square of the wind's velocity. The

pressure on a square foot is $1\frac{7}{9}$ lbs. when the wind is blowing at the rate of 20 miles an hour ; find the velocity of the wind when the pressure on a square yard is 64 lbs.

24. The volume of a circular cylinder varies as the square of the radius of its base when the height is the same, and as the height when the base is the same. The volume is 88 cu. ft. when the height is 7 ft. and the radius of the base is 2 ft., what will be the height of a cylinder on a base of 9 ft. radius when the volume is 396 cu. ft. ?

25. The distance fallen through by a heavy body from its position of rest varies as the square of the time of its fall ; a body is noticed to fall through 144 ft. in 3 seconds from its position of rest. How far will it fall in the next 2 seconds ?

26. The expenses of a boarding-house are partly constant and partly vary as the number of boarders. When the numbers of boarders are 80 and 110, the expenses are Rs. 3950/- and Rs. 5300/- respectively. What will they be when the number of boarders falls to 65 ?

27. At the Calcutta Football League Competition the number of matches played on each day varied jointly as the number of days from the beginning and end of the competition up to and including the day in question. On three successive days 6, 5 and 3 matches respectively were played. Which days were these and how long did the competition last ?

28. The altitude of a triangle varies directly as its area and inversely as its base. A triangle of $2\frac{2}{9}$ sq. yards in area standing on a base of 16 inches has an altitude of 4 ft. ; find the base of a triangle 2 sq. yards in area and has an altitude of 2 ft. 8 in.

29. If m gold sovereigns in a row stretch as far as n copper pennies, and p sovereigns in a pile are as high as q pennies. Compare the value of equal bulks of gold and copper, assuming that the area of a circle varies as the square of its radius.

30. A solid spherical glass globe of 1″ diamater is blown into a hollow spherical globe of 3″ diameter. If the hollow space within the second globe is concentric with the solid globe, find the thickness of glass in the second globe, given that the volume of a sphere varies as the cube of its radius.

31. The pressure in a liquid varies as depth, when the density is constant and it varies as density when the depth is constant. The pressure is 1, when the depth is 32 and density is 1. Find the depth at which the pressure is 2 when the density is 16.

32. It is known that the intensity of illumination at a given point is directly proportional to the strength of the light source and inversely proportional to the square of the distance from the light source. If I_1 is the intensity of illumination with a given source and at a given point, then prove that to produce same amount of illumination at other points the strength of the light source varies as the square of the distance from the light source.

33. In between certain height above the earth, the velocity of sound in air is independent of density and pressure of the air, and varies directly as the square root of $T+273$, where T is the temperature at that height. A rocket is sent and through some automatic device it registers a sound velocity 990 ft./sec. at a height where $T=27°$C. Obtain an expression of the velocity of sound satisfying the above law.

34. The volume of a given mass of gas varies directly as the absolute temperature, when the pressure is constant and inversely as the pressure, when the temperature is constant. If the volume be 50 cubic inches, when the pressure is 60 inches of mercury and the absolute temperature 300, find the volume, when the pressure is 70 inches of mercury and the absolute temperature 280.

35. It is known from observation that square of the period of revolution of a planet varies as the cube of its distance from the sun. Express the 'year' of Mars in days (of Earth), when '1 year' of a planet means one complete revolution round the sun in space.

[Take distance of the Earth from the Sun as 91·25 million miles and that of Mars as 66 million miles.]

36. The gravitational pull at the earth's surface on an unit mass taken as 980 dynes. What will be the gravitational pull on a artificial satellite which is orbiting in a circular path at height 500 km. above the earth. It is given that the mass of the satellite is 500 kg and earth's radius as 6370 km.

37. In a vertical dam the speed of the outflow of water varies as the square root of the depth of water and area of cross-section of the hole. If the hole is of circular cross-section of radius 1 meter and depth of water 49 m. the outflow is 11 m/sec. Calculate the speed of the water when the hole is of rectangular cross-section of 3 m. high and 1 m. broad and the depth of water is 36 m. [Take $\pi = \frac{22}{7}$]

ANSWERS

2. $y=6x-3x^2+x^3$. **4.** $9\frac{1}{2}$. **5.** 30. **7.** $7y=8zx$; 18. **8.** $7y=5x$.

16. $\frac{3}{10}$; $y(3x+20)=2400$. **17.** $\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}d$. **22.** $w=6$; $d=1{\cdot}5$; $h=10$.

23. 40 m.p.h. **24.** $1\frac{5}{6}$ ft. **25.** 256 ft. **26.** Rs. 3275.

27. 4th, 5th and 6th days respectively; 6 days. **28.** 1 ft. 6 in.

29. Gold is $\frac{240pm^2}{qn^2}$ times costlier than copper. **30.** $\frac{1}{2}(3-\sqrt[3]{26})$ in.

31. 4. **33.** $33\sqrt{3}(T+273)^{\frac{1}{2}}$. **34.** 40 cu. m. **35.** 224·5 days (approx.).

36. 42×10^7 dynes. (approx.). **37.** 9 m/sec.

পঞ্চদশ অধ্যায়

অমূলদ সংখ্যা

(Irrational Quantities)

15·1. পূর্বে পঞ্চম অধ্যায়ে অমূলদ সংখ্যা বা করণী-সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। সেখানে অমূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে, যে সকল বাস্তব সংখ্যা দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত রূপে প্রকাশ করা যায় না, তাহাদিগকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। সেই সূত্রে আরও বলা হইয়াছে যে, প্রকৃত করণীমাত্রেই অমূলদ সংখ্যা, যদিও অমূলদ সংখ্যামাত্রই করণী নয়, করণী ব্যতীত অন্য অমূলদ সংখ্যাও আছে। করণী-সংক্রান্ত বহু বিষয় উক্ত অধ্যায়ে সন্নিবিষ্ট হইয়াছে, তাহার সহিত শিক্ষার্থিগণ পূর্বেই পরিচিত।

বর্তমান অধ্যায়ে করণী-সংক্রান্ত আরও কয়েকটি আবশ্যকীয় বিষয়, যথা, দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল, ঘনমূল, বহুপদবিশিষ্ট দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল, সাধারণ দ্বিপদ (কিন্তু দ্বিঘাত নয়) ও বহুপদ করণীর করণী-নিরসক উৎপাদক প্রভৃতি আলোচিত হইল। এইগুলির জন্য দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ প্রভৃতি প্রয়োজন হয় বলিয়া এই সকলের আলোচনা পূর্বে সম্ভবপর হয় নাই।

15·2. দ্বিপদ করণীর কয়েকটি বিশেষ ধর্ম।

(A) একটি দ্বিঘাত করণী কখনই একটি মূলদ সংখ্যা ও একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া, $a=b^2+c\pm 2b\sqrt{c}$.

$$\therefore\ \sqrt{c}=\pm\frac{a-b^2-c}{2b}.$$

অর্থাৎ করণী $\sqrt{c}$ একটি মূলদ সংখ্যার সমান।

$\sqrt{c}$ প্রকৃত করণী হইলে, সংজ্ঞানুসারে ইহা অসম্ভব।

অতএব, উপরের উপপাদ্য সত্য বলিয়া প্রমাণিত হইল।

(B) যদি $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ হয়, এবং a, c মূলদ রাশি, এবং $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ প্রকৃত করণী হয়, তবে $a=b$ এবং $c=d$ হইবে, অর্থাৎ

দুই দিকের মূলদ রাশিদ্বয় পরস্পর সমান, এবং অমূলদ রাশিদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

a যদি cএর সমান না হয়, মনে কর, $a=c+m$ $(m\neq 0)$, a এবং c মূলদ রাশি বলিয়া $m(=a-c)$ ও একটি মূলদ রাশি হইবে, তাহা হইলে

$$c+m+\sqrt{b}=c+\sqrt{d},$$

বা, $\sqrt{d}=m+\sqrt{b}$, বর্গ করিয়া

$$d=m^2+b+2m\sqrt{b},$$

বা, $\sqrt{b}=\dfrac{d^2-m-b}{2m}$,

অর্থাৎ একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সমান। কিন্তু সংজ্ঞানুসারে ইহা হইতে পারে না। সুতরাং, a ও c অসমান হইতে পারে না। অর্থাৎ $a=c$.

$$\therefore \quad \sqrt{b}=\sqrt{d}, \quad \text{বা} \quad b=d.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি $a\pm\sqrt{b}=0$ হয়, তবে $a=0$ এবং $b=0$.

2. যদি $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ হয়, তবে $a=c$ এবং $b=d$ হইবে।

3. যদি $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ হয়, তবে $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ হইবে।

15·3. দুইটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের বর্গ সর্বদাই একটি মূলদ রাশি এবং একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা বিয়োগফলের সমান হইবে।

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

এখানে $\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{y}$ অসদৃশ করণী হইলে $\sqrt{xy}$ একটি করণী হইবে। x এবং y মূলদ রাশি বলিয়া $x+y$ মূলদ। অতএব, উপরের উপপাদ্য সত্য।

এখানে সহজেই দেখা যায় যে, $\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{y}$এর একটি মূলদ হইলেও উপরের উপপাদ্য সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত।

যদি $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = a+\sqrt{b}$ হয়, তবে

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = a-\sqrt{b}$ হইবে

কারণ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b}$ হইলে, § 14·2 (B) হইতে $x+y=a$, এবং $2\sqrt{xy}=b$.

$$\therefore \quad a-\sqrt{b} = x+y-2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.$$

15·4. দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়।

মনে কর, $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। এক্ষেত্রে § 14·3 হইতে আমরা বর্গমূলটির সাধারণ রূপটি ধরিতে পারি। কোন বিশেষ ক্ষেত্রে $\sqrt{x}$ বা $\sqrt{y}$ এর যে-কোন একটি মূলদ হইতে পারে, অর্থাৎ x বা y একটি বর্গরাশি হইতে পারে।

ধর, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = a+\sqrt{b}$, তাহা হইলে

$$x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b},$$

$\therefore$ § 14·2 (B) হইতে $x+y=a \qquad \cdots \quad \text{(i)}$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b} \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এই দুই সমীকরণ হইতে

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = a^2 - b.$$

$$\therefore \quad x-y = +\sqrt{a^2-b} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) এবং (iii) হইতে যোগ ও বিয়োগ করিয়া,

$$x = \tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b}),\ y = \tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}),$$

অথবা, $x = \tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}),\ y = \tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b}).$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= +(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$$= +\{\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}\}.$$

এখানে লক্ষণীয় যে, x হইতে $\sqrt{x}$ র দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান হইতে পারে, কিন্তু (ii) হইতে $\sqrt{x}$ র প্রত্যেক মানে $\sqrt{y}$ এর একটিমাত্র মান পাওয়া যাইবে। কাজেই নির্ণেয় বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এবং '$\pm$' চিহ্নযুক্ত দুইটিমাত্র মান হইবে চারিটি নয়।

অনুরূপে, $a-\sqrt{b}$এর বর্গমূল-নির্ণয়ে আমরা $a\sqrt{b}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ধরিয়া অগ্রসর হইয়া নির্ণেয় বর্গমূল

$$\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\pm\{\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{b^2-b})}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}\}$$

পাইতে পারি।

দ্রষ্টব্য 1. উপরে প্রাপ্ত বর্গমূলে যদি $\mathbf{a^2-b}$ **ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গ** হয় তবে $a\pm\sqrt{b}$ র বর্গমূল দুইটি দ্বিঘাত করণীর (অথবা বিশেষ ক্ষেত্রে একটি মূলদ এবং একটি দ্বিঘাত করণীর) সমষ্টি বা অন্তরফলরূপে প্রকাশ করিতে পারি। অন্যথায় নির্ণেয় বর্গমূলের রূপ অনেক জটিলতর, সেজন্য সেক্ষেত্রে ইহার বিশেষ কার্যকারিতা নাই।

2. উপরোক্ত পদ্ধতি ছাড়াও বর্গমূল বাহির করিবার আরও একটি বিকল্প পথ রহিয়াছে। পঞ্চম অধ্যায়ে § 5.8 এর Ex. 9 এর পর দ্রষ্টব্যে ইহা সামান্য আলোচিত হইয়াছে। ঐ পদ্ধতিকে শুধু পর্যবেক্ষণ দ্বারা $a\pm\sqrt{b}$ কে $p(x+y\pm2\sqrt{x}\sqrt{y})$ রূপে প্রকাশ করিতে হয়। p, একটি মূলদ অথবা অমূলদ উৎপাদক। নিম্নে উদাহরণাবলী Ex. 1 ও 2 দেখ।

15·5. দ্বিঘাত বহুপদ করণী $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এর বর্গমূল নির্ণয়।

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া,

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{yz}$$

তাহা হইলে দুই পক্ষের মূলদ অংশ সমান বলিয়া

$$a=x+y+z \quad \cdots\ \text{(i)}$$

এক্ষণে মনে কর,

$$\sqrt{b}=2\sqrt{xy} \quad \cdots\ \text{(ii)}$$

$$\sqrt{c}=2\sqrt{zx} \quad \cdots\ \text{(iii)}$$

এবং $\sqrt{d}=2\sqrt{yz}$ .... (iv)

(ii), (iii) এবং (iv) হইতে,

$$4xy=b \quad \cdots\ \text{(v)}$$

$$4zx=c \quad \cdots\ \text{(vi)}$$

$$d=4yz \quad \cdots\ \text{(vii)}$$

(v), (vi) এবং (vii) হইতে,

$$64x^2y^2z^2 = bcd,$$

বা, $8xyz = \pm\sqrt{bcd}$ .... (viii)

(v), (vi), (vii) হইতে এবং (viii)র সাহায্যে আমরা x, y, zএর মান নির্ণয় করিতে পারি এবং ইহাদের এই লব্ধ মান (i) বসাইয়া যদি দেখা যায় (i) এর উভয় পক্ষকে তাহা সিদ্ধ করিতেছে, তাহা হইলে সেইগুলিই x, y, zএর উদ্দিষ্ট মান হইবে। এই ভাবেই (viii) এর '+' অথবা '−' চিহ্নর কোন্‌টি লইতে হইবে স্থির করিতে হইবে।

যদি $a, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}$ প্রত্যেকটি ধনাত্মক হয়, তাহা হইলে $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ প্রত্যেকটি ধনাত্মক লইতে হইবে এবং (viii) র '+' চিহ্ন লইতে হইবে। সুতরাং

$$8xyz = \sqrt{bcd} \quad \cdots \quad \text{(ix)}$$

এবং (v), (vi) ও (vii) এর সাহায্যে

$$x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{bcd}}{d}, \quad y = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{bcd}}{c}, \quad z = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{bcd}}{b}.$$

(i) এ-বসাইয়া,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{bcd}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) = a,$$

বা, $bc + cd + bd = 2a\sqrt{bcd}$ (x)

অর্থাৎ b, c, d যদি (x)-এ উল্লিখিত সর্ত পালন করে, তবে উপরোক্ত পদ্ধতিতে বর্গমূল বাহির করা সম্ভব হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি রাশিটি $a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d}$ হয়

তবে $\sqrt{(a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$,

বা, $\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$ ধরা যাইতে পারে।

15·6. দ্বিঘাত দ্বিপদ করণীর ঘনমূল নির্ণয়।

মনে কর, $a + \sqrt{b}$ এর ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইবে। এক্ষেত্রে § 14·4 এর অনুরূপ ঘনমূলটির সাধারণ রূপ $x + \sqrt{y}$ ধরিতে পারি।

ধর, $a+\sqrt{b}=(x+\sqrt{y})^3$ .... (i)

$=x^3+3xy+\sqrt{y}\,(3x^2+y).$ .... (ii)

$\therefore$ § 14·2 (B) অনুসারে,

$a=x^3+3xy$ .... (iii)

$\sqrt{b}=\sqrt{y}\,(3x^2+y)$ .... (iv)

আবার (i) হইতে,

$$x+\sqrt{y}=(a+\sqrt{b})^{\frac{1}{3}}.$$

§ 14·13 অনুসিদ্ধান্ত 3 অনুযায়ী

$$x-\sqrt{y}=(a-\sqrt{b})^{\frac{1}{3}}.$$

সুতরাং,

$x^2-y=(a^2-b)^{\frac{1}{3}}=m(say).$ .... (v)

এক্ষণে (iii) এবং (v) এর সহযোগে

$$a=x^3+3x\,(x^2-m),$$

অর্থাৎ $4x^3-3mx-a=0$ .... (vi)

(vi) সমাধান করিয়া 'x' এর যে মান পাওয়া যাইবে, তাহা (v)-এ বসাইলে y পাওয়া যাইবে এবং সঙ্গে সঙ্গে $a+\sqrt{b}$এর ঘনমূল বাহির করা সম্ভবপর হইবে।

দ্রষ্টব্য 1. উপরে (v) হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, 'm'এর মান অর্থাৎ $(a^2-b)^{\frac{1}{3}}$এর মান যদি মূলদ না হয়, তবে উপরোক্ত পদ্ধতির কার্যকারিতা কম।

2. প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য যে, সমীকরণ (vi)-এ 'x'এর ঘাত 3 থাকায় ঐ সমীকরণের তিনটি বীজ থাকিবে, একটি বাস্তব ও দুইটি কাল্পনিক বীজ। বাস্তব ঘনমূল নির্ণয়ে বলা বাহুল্য বাস্তব বীজটিই লইতে হইবে।

3. দ্বিপদ করণীর দুইটি পদই যদি মিশ্র করণী হয়, তবে উপরোক্ত পদ্ধতি ছাড়াও আরও একটি বিকল্প উপায় আছে, Ex 8. দেখ।

15·7. দ্বিপদ করণীর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয়।

Case I. $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয়।

ধর, $a^{\frac{1}{p}}=x$ এবং $b^{\frac{1}{q}}=y$ এবং p ও q এর লঘিষ্ঠ সাধারণ **গুণনীয়ক** n, সেজন্যে x^n এবং y^n উভয়েই মূলদ ; ফলতঃ x^n-y^n ও একটি মূলদ রাশি।

§ 1·5 (A) এ দেখিয়াছ যে, n যদি যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, তবে $x^n - y^n$ সকল ক্ষেত্রেই $x - y$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

বস্তুতঃ, $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$.

সুতরাং, পূর্বোক্ত সংজ্ঞানুসারে $x - y$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1} ;$$

এবং লব্ধ **মূলদ গুণফল $x^n - y^n$.**

Case II. $\sqrt[p]{a} + \sqrt[q]{b}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয়।

পূর্বের ন্যায় $x = a^{\frac{1}{p}}$, $y = b^{\frac{1}{q}}$ এবং p ও qএর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক n ধরা হইল।

(a) § 1·5 (B) অনুসারে n যে-কোন ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে $x^n - y^n$ = সর্ব্বদাই $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে এবং

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - y^{n-1}).$$

সুতরাং, এক্ষেত্রে করণী-নিরসক উৎপাদক

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - y^{n-1} ;$$

এবং লব্ধ **মূলদ গুণফল $x^n - y^n$.**

(b) § 1·5 (C) অনুসারে n কোন ধনাত্মক অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে $x^n + y^n$ সর্বদাই $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে এবং

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

সুতরাং, করণী-নিরসক উৎপাদক

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}$$

এবং লব্ধ **মূলদ গুণফল $x^n + y^n$.**

উদাহরণের জন্য Ex. 9 দেখ।

15·8. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the square root of* $16 - 5\sqrt{7}$.

ধর, $16 - 5\sqrt{7} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$.

অতএব, $x + y = 16$ .... (i)

$2\sqrt{xy} = 5\sqrt{7}$

বা, $4xy = 175$. .... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে,

$$(x-y)^2 = 256 - 175 = 81.$$

$$\therefore \quad x - y = \pm 9. \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে,

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{25}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{25}{2} \end{array}\right\}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - \sqrt{7})$.

বিকল্প পদ্ধতি :

পর্যবেক্ষণের সাহায্যে

$$16 - 5\sqrt{7} = \tfrac{1}{2}\,[\,32 - 2.5.\sqrt{7}\,]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\,25 + 7 - 2.5.\sqrt{7}\,]$$

$$= \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{7})^2 = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - \sqrt{7})\right]^2.$$

Ex. 2. *Find the square root of* $12 + 5\sqrt{6}$.

ধর, $12 + 5\sqrt{6} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$.

$$\therefore \quad x + y = 12 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$2\sqrt{xy} = 5\sqrt{6}$$

$$4xy = 150. \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

অতএব, $(x-y)^2 = 144 - 150 = -6 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$

স্পষ্টতই $(x-y)^2$ একটি বাস্তব, মূলদ রাশি নহে ; সুতরাং, § 15·3 র কার্যকারিতা বিশেষ নেই। এক্ষেত্রে

$$12 + 5\sqrt{6} = \sqrt{6}(5 + 2\sqrt{6}).$$

এখন, Ex. 1এর অনুরূপ $5 + \sqrt{6}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে, অথবা,

$$5 + 2\sqrt{6} = 2 + 3 + 2\sqrt{2.3}$$

$$= [\pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm 6^{\frac{1}{4}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Ex. 3. *Find the square root of* $\sqrt{45}+\sqrt{40}$.

এক্ষেত্রে $\sqrt{45}+\sqrt{40}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ ধরা সম্ভব নহে, যেহেতু বামপক্ষে কোন মূলদ রাশি থাকিবে না। কিন্তু

$$\begin{aligned}\sqrt{45}+\sqrt{40} &= \sqrt{5}[3+2\sqrt{2}] \\ &= \sqrt{5}(2+1+2\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{5}(\sqrt{2}+1)^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm 5^{\frac{1}{4}}(\sqrt{2}+1)$.

Ex. 4. *Find the square root of* $a+b+\sqrt{a^2+2ab}$.

প্রদত্ত রাশি $= a+b+\sqrt{a^2+2ab} = \frac{1}{2}[2a+2b+2\sqrt{a^2+2ab}]$

$$= \tfrac{1}{2}[a+(a+2b)+2\sqrt{a(a+2b)}]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sqrt{a}+\sqrt{a+2b}]^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{a}+\sqrt{a+2b}]$.

Ex. 5. *Find the square root of* $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$.

ধর, $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

$$= x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$$

সুতরাং, $x+y+z=10 \qquad \cdots$ (i)

$xy=6,\ yz=15,\ zx=10. \qquad \cdots$ (ii)

(ii) হইতে সমাধান করিয়া,

$$x=\pm 2,\ y=\pm 3,\ z=\pm 5\ ;$$

কিন্তু $x=2, y=3, z=5$ (i) কে সিদ্ধ করে।

সুতরাং, নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Ex. 6. *Find the fourth root of* $284-48\sqrt{35}$.

প্রথমে $284-48\sqrt{35}$ বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। ইহা Ex. 1 র ন্যায় § 14·3 এর অনুরূপ করা যাইতে পারে,

$$284-48\sqrt{35}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.$$

$\therefore \quad x + y = 284$

$2\sqrt{xy} = 48\sqrt{35}$

$xy = 24^2.35.$

$(x-y)^2 = (284)^2 - 4.24^2.35$

$= 4^2.$

$\therefore \quad x - y = \pm 4.$

$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x = 144 \\ y = 140 \end{array}\right\}$

$\therefore \quad (284 - 48\sqrt{35})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} - \sqrt{140} = (12 - 2\sqrt{35}).$

যেহেতু $\quad 12 - 2\sqrt{35} = 5 + 7 - 2\sqrt{35}$

$= (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2.$

$\therefore \quad (284 - 48\sqrt{35})^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}).$

Ex. 7. *Find the cube root of* $7 - 5\sqrt{2}$.

ধর, $\quad (7 - 5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = x - \sqrt{y} \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

এবং, $\quad (7 + 5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = x + \sqrt{y}.$

সুতরাং, $\quad x^2 - y = (49 - 50)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1 \quad \cdots$ (ii)

$[\because (-1)^3 = -1]$

আবার, (i) হইতে,

$7 - 5\sqrt{2} = (x - \sqrt{y})^3 = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y}$

$\therefore \quad 7 = x^3 + 3xy. \quad \cdots \quad \cdots$ (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে,

$x^3 + 3x(x^2 + 1) = 7,$

বা, $\quad 4x^3 + 3x - 7 = 0,$

বা, $\quad (x-1)(4x^2 + 4x + 7) = 0.$

$\therefore \quad x = 1$ ধরিলে (ii) হইতে $y = 2.$

সুতরাং, নির্ণেয় ঘনমূল $= 1 - \sqrt{2}.$

দ্রষ্টব্য। পরের অধ্যায়ে দেখা যাইবে যে, $4x^2+4x+7$এর বীজদ্বয় কাল্পনিক, বাস্তব ঘনমূল নির্ণয়ে ইহার প্রয়োজন নাই।

Ex. 8. *Find the cube roots of* $11\sqrt{5}-17\sqrt{2}$.

উপরে বর্ণিত উপায়ে ইহা সমাধান করা সম্ভব, কিন্তু দ্বিঘাত করণীর উভয় পদই যদি মিশ্র করণী হয়, তবে নিম্নে বর্ণিত উপায়ে খুব সহজেই তাহাদের ঘনমূল বাহির করা যায়।

ধর, $$\begin{aligned}11\sqrt{5}-17\sqrt{2}&=(x\sqrt{5}-y\sqrt{2})^3 \qquad \cdots \text{(i)}\\ &=5x^3\sqrt{5}-2y^3\sqrt{2}-3xy\sqrt{5}\sqrt{2}(x\sqrt{5}-y\sqrt{2})\\ &=\sqrt{5}(5x^3+6xy^2)-\sqrt{2}(2y^3+15x^2y).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 5x^3+6xy^2=11 \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(ii)}$$
$$2y^3+15x^2y=17 \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(iii)}$$

আবার, (i) হইতে,

$$x\sqrt{5}-y\sqrt{2}=(11\sqrt{5}-17\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$$

এবং $(x\sqrt{5}+y\sqrt{2})=(11\sqrt{5}-17\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$.

স্থতরাং, $$\begin{aligned}3x^2-2y^2&=(11^2.5-17^2.2)^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}\\ &=3. \qquad \cdots \qquad \cdots \text{(iv)}\end{aligned}$$

(ii) এবং (iv) হইতে

$$5x^3+3x(5x^2-3)=11$$
$$20x^3-9x-11=0$$
$$(x-1)(20x^2+20x+11)=0.$$

$\therefore$ বাস্তব বীজ $x=1$ লইয়া $y=\pm 1$ পাওয়া গেল।

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Ex. 9. *Find the rationalising factor of* $\dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{2}}}$.

প্রদত্ত রাশি $$\begin{aligned}&=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3^{\frac{2}{6}}-2^{\frac{3}{6}}}=\frac{1}{9^{\frac{1}{6}}-8^{\frac{1}{6}}}\\ &=\frac{9^{\frac{5}{6}}+9^{\frac{4}{6}}8^{\frac{1}{6}}+9^{\frac{3}{6}}8^{\frac{2}{6}}+9^{\frac{2}{6}}8^{\frac{3}{6}}+9^{\frac{1}{6}}8^{\frac{4}{6}}+8^{\frac{5}{6}}}{9-8}\\ &=3\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{2}+6+2\sqrt[3]{9}\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ex. 10. *If* $\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}$
$$+\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=2a, \quad \cdots\cdots (1)$$
prove that $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

স্পষ্টতঃই $[(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2]-[(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2]$
$$=4x\sqrt{a^2-b^2} \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots (2)$$
প্রদত্ত শর্ত দিয়া ভাগ করিয়া,
$$\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}-\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}$$
$$=\frac{2x\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad \cdots\cdots (3)$$
(1) ও (3) যোগ করিয়া,
$$\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}+a.$$
বর্গ করিয়া,
$$(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2=\frac{(x\sqrt{a^2-b^2}+a^2)^2}{a^2},$$
অর্থাৎ $a^2[x^2+2x\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)+y^2]$
$$=x^2(a^2-b^2)+2xa^2\sqrt{a^2-b^2}+a^4,$$
বা, $(a^2-a^2+b^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2(a^2-b^2)$,

বা, $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$,

বা, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Examples XV

1. Find the square roots of :

(i) $4+2\sqrt{3}$. (ii) $28+10\sqrt{3}$. (iii) $28-6\sqrt{3}$. [*H. S. 1960*]

(iv) $76+10\sqrt{3}$. (v) $17+12\sqrt{2}$. [*H. S. 1960 Comp.*]

(vi) $37-20\sqrt{3}$. [*H. S. 1961 Comp.*]

(vii) $33-4\sqrt{35}$. [*H. S. 1961*]

(viii) $17-12\sqrt{2}$. [*H. S. 1962*]

(ix) $8+\sqrt{60}$. [*H. S. 1962 Comp.*]

(x) $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$. [*H. S. 1963*]

(xi) $32-8\sqrt{15}$. (xii) $30+4\sqrt{14}$.

(xiii) $107-24\sqrt{15}$. (xiv) $94+6\sqrt{245}$.

(xv) $151-20\sqrt{57}$. (xvi) $101-28\sqrt{13}$.

(xvii) $\frac{9}{4}-\sqrt{5}$. (xviii) $\frac{73}{18}+\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

(xix) $\frac{13}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}$. (xx) $6\sqrt{5}-\sqrt{55}$.

2. Find the square roots of :

(i) $22+\sqrt{403}$. (ii) $\sqrt{36}+\sqrt{48}$. (iii) $\sqrt{32}+\sqrt{24}$.

(iv) $\sqrt{27}-\sqrt{24}$. (v) $3\sqrt{6}-4\sqrt{3}$. (vi) $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$.

(vii) $-12+5\sqrt{6}$. (viii) $2\sqrt{10}+6\sqrt{2}$. (ix) $4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$.

3. Find the square roots of :

(i) $x+\sqrt{x^2-y^2}$. (ii) $2a+2\sqrt{2ab-b^2}$.

(iii) $a+b+c+2\sqrt{(bc+ca)}$. (iv) $1+x^2+\sqrt{1+x^2+x^4}$.

(v) $2x+1+\frac{1}{2}\sqrt{15x^2+8x-12}$.

(vi) $2ab-ax-bx-2\sqrt{ab(ab-ax-bx+x^2)}$.

4. Find the square roots of :

(i) $10+2\sqrt{2}-2\sqrt{7}-2\sqrt{14}$. (ii) $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$.

(iii) $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$.

(iv) $1+4(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(v) $\sqrt{(b-c)(c-a)}+\sqrt{(c-a)(a-b)}+\sqrt{(a-b)(b-c)}$.

5. Find the fourth roots of :

(i) $49+20\sqrt{6}$. (ii) $17+12\sqrt{2}$. (iii) $56-24\sqrt{5}$.

6. Find the value of :

(i) $\sqrt{x^2+y^2}$. (ii) $(2x)^{\frac{3}{2}}+(2y)^{\frac{1}{2}}$.

whence, $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$.

7. Prove that

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$$ and hence simplify

$$\sqrt{64+6\sqrt{7}}-\sqrt{67-12\sqrt{7}}.$$

8. Show that

$$\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

9. Find the cube roots of :

(i) $7+5\sqrt{2}$. (ii) $45+29\sqrt{2}$. (iii) $22+10\sqrt{7}$.

(iv) $11\sqrt{5}+17\sqrt{2}$. (v) $99\sqrt{2}+59\sqrt{5}$. (vi) $17\sqrt{5}-38$.

(vii) $21\sqrt{6}+23\sqrt{5}$. (viii) $25\sqrt{7}+27\sqrt{6}$.

10. Find the rationalising factor of :

(i) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$.

11. Express with rational denominator

(i) $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$. (ii) $\frac{2-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}$. (iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}}$.

(iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$. (v) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

12. Find the value of

$$\frac{2\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{48}}{7+3\sqrt{5}}$$ given $\sqrt{5}=2{\cdot}23067$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$.

13. If $x=(7+\sqrt{50})^{\frac{1}{3}}-(7-\sqrt{50})^{\frac{1}{3}}$ show that $x^3+3x-14=0$.

14. If $a(b-c)^2=c(b+c)^2$ find the value of

$$\frac{c}{b}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}.$$

15. Find the product of

$$\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$
$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

16. If $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}+\sqrt{ef}=\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}$,

prove that $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$.

17. If $na=1+\sqrt{1-a^2}$ and $x=\sqrt{2}+1$, find the value of

$$\frac{a}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right).$$

18. Prove that

$$\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}=2x.$$

19. If $x=\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+n^3}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+n^3}}$,

show that $x^3+3nx-2m=0$.

20. If $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ and $x=my-\sqrt{a^2+b^2m^2}$,
then $x^2+y^2=a^2+b^2$.

21. If $x=z\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-z^2}$ then

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)=4x^2y^2z^2.$$

22. If $(x+\sqrt{x^2-bc})(y+\sqrt{y^2-ca})(z+\sqrt{z^2-ab})$
$$=(x-\sqrt{x^2-bc})(y-\sqrt{y^2-ca})(z-\sqrt{z^2-ab}),$$

show that the expression $=\pm abc$.

23. Show that if

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(x+b)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-b)^2+y^2},$$

then $2(x^2-y^2)=a^2-b^2$.

ANSWERS

[Ex 1-5 '+' ও '−' চিহ্ন বসাইয়া লইতে হইবে]

1. (i) $1+\sqrt{3}$. (ii) $5+\sqrt{3}$. (iii) $3\sqrt{3}-1$.

(iv) $5\sqrt{3}+1$. (v) $3+2\sqrt{2}$. (vi) $5-2\sqrt{3}$.

(vii) $2\sqrt{7}-\sqrt{5}$. (viii) $3-2\sqrt{2}$. (ix) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

(x) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$. (xi) $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$. (xii) $2\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

(xiii) $4\sqrt{5}-3\sqrt{3}$. (xiv) $7+3\sqrt{5}$. (xv) $2\sqrt{19}-5\sqrt{3}$.

(xvi) $2\sqrt{13}-7$. (xvii) $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$. (xviii) $\sqrt{2}+\frac{1}{6}$

(xix) $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$. (xx) $\sqrt[4]{5}.\frac{1-\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$.

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{31}+\sqrt{13})$. (ii) $\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3}$. (iii) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1)$.

(iv) $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}-1)$. (v) $6^{\frac{1}{4}}(\sqrt{2}-1)$. (vi) $2^{\frac{1}{4}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(vii) $\sqrt[4]{54}-\sqrt[4]{24}$. (viii) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{5}+1)$. (ix) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$.

3. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}]$. (ii) $\sqrt{2a-b}+\sqrt{b}$.

(iii) $\sqrt{a+b}+\sqrt{c}$. (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}]$.

(v) $\frac{1}{2}[\sqrt{5x+6}+\sqrt{3x-2}]$. (vi) $\sqrt{a(b-x)}+\sqrt{b(a-x)}$.

4. (i) $\sqrt{7}-\sqrt{2}-1$. (ii) $2-\sqrt{5}+2\sqrt{3}$. (iii) $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

(iv) $1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. (v) $\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}+\sqrt{a-b}]$.

5. (i) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt{5}-1$. (iii) $\sqrt{2}+1$.

6. (i) $\sqrt{14}$. (ii) $9+7\sqrt{3}$. **7.** 3.

9. (i) $1+\sqrt{2}$. (ii) $3+\sqrt{2}$. (iii) $\sqrt{7}+1$.

(iv) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. (v) $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})$. (vi) $\sqrt{5}-2$.

(vii) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. (viii) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

10. (i) $3\sqrt[3]{9}+3.\sqrt[3]{3}\sqrt{2}+6+2.\sqrt[3]{9}\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt[3]{2}+1$.

11. (i) $\frac{1-2^{\frac{5}{3}}+2^{\frac{4}{3}}}{3}$. (ii) $\frac{5-8\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}}{11}$. (iii) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}$.

(iv) $2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$. (v) $3(2^{\frac{1}{3}}-1)$.

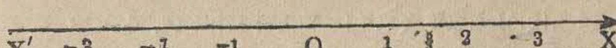
12. 1·3355. **14.** $1, \frac{c^2}{b^2}$. **15.** 1. **17.** $1+2a$.

ষোড়শ অধ্যায়

কাল্পনিক রাশি ও জটিল রাশি

16·1. সংজ্ঞা: পূর্বে বর্গমূল বাহির করিবার সময় দেখিয়াছ যে, a যদি একটি মূলদ অথবা অমূলদ বাস্তব রাশি হয় এবং x যদি 'a' র বর্গমূল হয় তবে $a = x \times x$ বা $a = (-x) \times (-x)$, যেমন $16 = 4 \times 4$ বা $(-4) \times (-4)$; অতএব, 16 র বর্গমূল $+4$ অথবা -4. অনুরূপভাবে $(4 + 2\sqrt{3})$ র বর্গমূল $\pm(\sqrt{3} + 1)$। সুতরাং, যেহেতু **সমস্ত বাস্তব ঋণরাশি ও ধনরাশির বর্গ সকল সময়েই ধনরাশি,** অতএব কোন ঋণরাশির বর্গমূল কখনই বাস্তব রাশি হইতে পারে না। ফলে যে সকল রাশি দ্বারা ঋণরাশির বর্গমূল প্রকাশ করা যায়, তাহাদিগকে কাল্পনিক রাশি (Imaginary quantities) নামে অভিহিত করা হয়। দুর্ভাগ্যক্রমে এই কাল্পনিক কথাটি ঠিক অভিধানিক অর্থে ব্যবহৃত হয় নাই। পরবর্তী অনুচ্ছেদে দেখানো যাইবে যে, বস্তুতঃ গণিতে ব্যবহৃত এই 'বাস্তব' বা 'কাল্পনিক' কথাগুলি সংখ্যাকে প্রকাশ করিবার একটি উপায় মাত্র। বাস্তব রাশি যে পরিমাণ বাস্তব, কাল্পনিক রাশিও সেই পরিমাণ বাস্তব, দ্বিতীয় বাস্তব কথাটি এখানে অভিধানিক অর্থেই ব্যবহৃত হইয়াছে। উচ্চতর গণিতের বিভিন্ন শাখায় এবং তড়িৎপ্রবাহ সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী সমাধানে এই উক্তির সম্যক্ উপলব্ধি হইবে।

16·2. জ্যামিতিক লেখ সাহায্যে সংখ্যার প্রকাশ:



ধর, $X'OX$ একটি সরলরেখা, O উহার মধ্যবিন্দু। OA_1 দৈর্ঘ্যকে যদি একক ধর তাহা হইলে A_1 বিন্দুটি 1 কে সূচিত করে। সুতরাং, 2 কে সূচিত করতে $OA_2 = 2OA_1$ লইলেই চলিবে। এইভাবে $3, 4, 5, \cdots$ সমস্ত অখণ্ড ধনসংখ্যাগুলিই OX রেখার উপরস্থ বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। এইভাবে OA_1 কে 1 ধরিয়া $OB_1 = -1$ লইলে B_1 বিন্দু -1 সূচিত করিবে, অনুরূপভাবে -2, -3, $-4, \cdots$ প্রভৃতি অখণ্ড ঋণরাশিগুলি OX' রেখার উপরস্থ বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। আবার $\frac{5}{3}$ কে প্রকাশ করিতে হইলে লক্ষ্য কর $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, সুতরাং, A_1A_2 কে সমান তিনভাগে ভাগ করিলে দ্বিতীয় অংশের শেষ বিন্দুই হইবে

উদ্দিষ্ট $\frac{5}{3}$। সেই রকমে $-\frac{7}{4}$ B_1 ও B_2 র মধ্যবর্তী একটি বিন্দু। এককথায় প্রতিটি মূলদ বাস্তব সংখ্যা $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$ m ও n অখণ্ড সংখ্যা) র জন্য XOX' সরলরেখায় সর্বদাই একটি নির্দিষ্ট বিন্দু একটি নির্দিষ্ট এককে মানে বর্তমান হইবে। পূর্বেই বলা হইয়াছে, অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π, e প্রভৃতিকে যেহেতু $\frac{m}{n}$ এর রূপে প্রকাশ করা যায় না ; সুতরাং, তাহাদের মূলদ রাশির মত সহজেই XOX' র উপরস্থ বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে না। তবে উচ্চতর গণিতে, গণিতের "সূক্ষ্ম অনুবীক্ষণ যন্ত্র" সংখ্যা বিভাজন পদ্ধতিতে দেখানো যাইবে যে, প্রত্যেকটি অমূলদ রাশির জন্য XOX' র উপর একটি করিয়া বিন্দু বর্তমান হইবে এবং XOX' সরলরেখার প্রতিটি বিন্দুর জন্য একটি নির্দিষ্ট এককে একটি করিয়া বাস্তব মূলদ অথবা অমূলদ সংখ্যা পাওয়া যাইবে। অর্থাৎ XOX' সরলরেখার সমস্ত বিন্দুই সম্পূর্ণ বাস্তব হইবে। এইজন্য XOX' কে বাস্তব অক্ষ আখ্যা দেওয়া হয়।

লক্ষ্য করিয়াছ উপরোক্ত সংজ্ঞায় XOX' র উপরস্থ বিন্দু দ্বারা $\sqrt{-1}$ প্রকাশ করিবার কোন উপায় নেই। $\sqrt{-1}$ কে জ্যামিতিক লেখ সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইলে

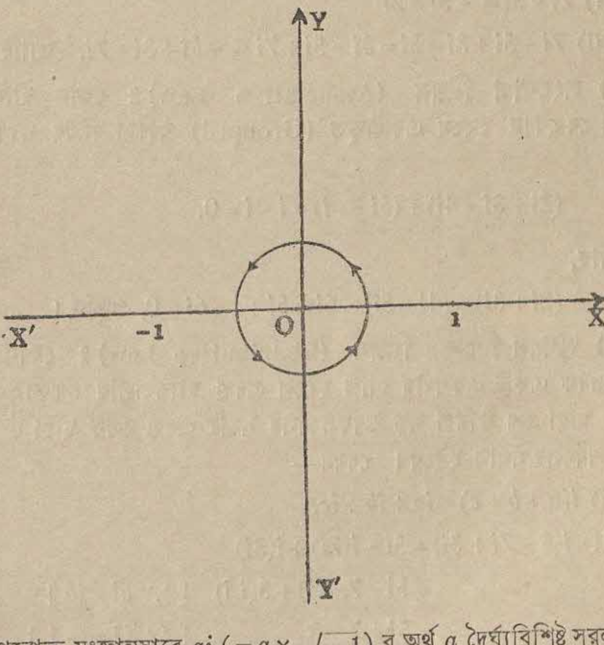
(a) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$;

(b) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$;

(c) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 1.$

ধর্মগুলির সাহায্য লইতে হইবে। আমরা জানি যে, 4 এবং -4 একই দূরত্বে 0 বিন্দুর বিপরীত দিকে অবস্থিত, অর্থাৎ -1 দ্বারা গুণ করিবার প্রক্রিয়াকে আমরা ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে 180° আবর্তনের (চিত্র খ) অনুরূপ বলিয়া ধরিতে পার। এখন (a) অনুসারে $\sqrt{-1}$ দ্বারা গুণ করিবার প্রক্রিয়াকে যদি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে 90° আবর্তনের সমতুল্য বলিয়া গণনা কর তাহা হইলে '-1' দ্বারা গুণ করিবার সংজ্ঞার সাথে বিরোধ ঘটিবে না। বস্তুতঃ, $\sqrt{-1}$ দ্বারা গুণন-প্রক্রিয়া, 90° আবর্তনের সমতুল বলিয়া গণ্য করা হইবে (চিত্র b)। সুতরাং, $-\sqrt{-1} = (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$ দ্বারা কোন রাশিকে গুণ করিলে তাহা ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে 270° আবর্তিত হইবে, অর্থাৎ OY' অক্ষের উপর পড়িবে।

এখন ধর, C এবং D যথাক্রমে OY এবং OY' উপরস্থ বিন্দু এবং $OC = OD = 1$ (যে এককে $OA = 1$ ধরা হইয়াছে) তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে C ও D বিন্দু যথাক্রমে $\sqrt{-1}$ ও $-\sqrt{-1}$। স্পষ্টতঃই বাস্তব অক্ষে যেভাবে অন্যান্য বাস্তব রাশি পাইবার উপায় বর্ণিত হইয়াছে, সেইভাবে YOY' অক্ষের উপরও অন্যান্য রাশিগুলি পাওয়া যাইবে। যেহেতু এই সকল রাশিগুলি বাস্তব অক্ষের উপর থাকিবে না, সেজন্য এগুলি কাল্পনিক রাশি (Imaginary numbers) নামে অভিহিত হয়, এবং লিখিবার সুবিধার জন্য $\sqrt{-1} = i$ অথবা j অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। YOY' কে কাল্পনিক অক্ষ (অভিধানিক অর্থে নয়) আখ্যা দেওয়া হয়।



উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে $ai\ (= a \times \sqrt{-1})$ র অর্থ a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরলরেখাকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে 90° আবর্তন করা। সুতরাং, ai, OY অক্ষে (a, ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা) O হইতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু। আবার $ia\ (= \sqrt{-1} \times a)$, সংজ্ঞানুসারে O হইতে a দূরত্বে অবস্থিত OY অক্ষের উপর বিন্দু। অতএব $ai = ia$

দ্রষ্টব্য। উপরোক্ত আলোচনায় দেখা যায় যে, i দ্বারা কোন রাশিকে গুণ করিলে তাহা 90° আবর্তিত হইয়া যায় ; সেজন্য i র এই ধর্মটি উচ্চতর গণিতে এবং তড়িৎপ্রবাহ-সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী সমাধানে বিশেষভাবে প্রযুক্ত হইয়াছে।

16·3. বীজগণিতের প্রাথমিক নিয়মাবলী।

সংজ্ঞানুসারে কাল্পনিক রাশি একটি নতুন জাতীয় সংখ্যা হইলেও বাস্তব রাশির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য বীজগণিতের প্রাথমিক নিয়মগুলি ইহা পালন করিবে। যথা,

(I) বিনিময় নিয়ম (Commutative Law)ঃ একটি রাশিমালার সমস্ত পদের সমষ্টি, উক্ত সমষ্টি বাহির করিবার ক্রমের উপর নির্ভর করে না। যেমন—

(i) $2i-3i=-3i+2i$

(ii) $7i-5i+3i=5i=3i-5i+7i=-5i+3i+7i$, ইত্যাদি।

(II) সংযোগ নিয়ম (Associative Law)ঃ কোন রাশিমালার যোগফল যে-কোন রকমে একত্রীভূত (Grouped) করিয়া নির্ণয় করা যায়। যেমন—

$$(2i+3i-4i)+(5i-6i)=i-i=0.$$

আবার,

$$(2i+3i)-(4i-5i)-6i=5i+i-6i=0, \text{ প্রভৃতি।}$$

(III) গুণনে বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive Law)ঃ কোন রাশিমালার গুণক একটি একপদীয় রাশি হইলে প্রদত্ত রাশিমালার প্রত্যেক পদকে ঐ গুণক দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলির সমষ্টি প্রদত্ত গুণক দ্বারা ঐ রাশিমালার গুণফলের সমান হইবে। যেমন—

(i) $i(a+b+c)=ia+ib+ic.$

(ii) $i(5-7i+3i)=5i-i(7i)+i(3i)$

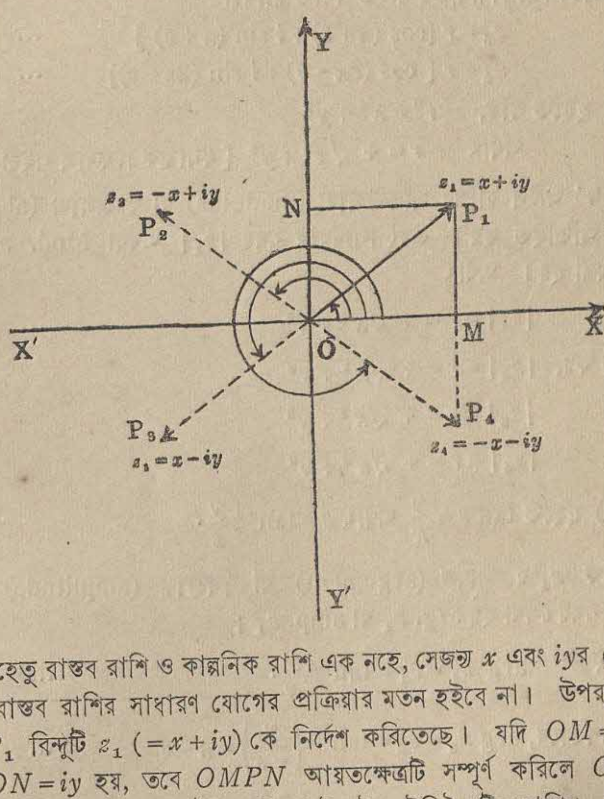
$=5i-7.(i.i)+3(i.i)$ [$\because ai=ia$]

$=5i+7-3$ [$\because i^2=-1$]

$=4+5i.$ [II, অনুসারে]

16·4. জটিল রাশি (Complex number)ঃ যে-কোন রাশি $x+iy$ কে জটিল রাশি বলে। x, y বাস্তব রাশি। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে লক্ষ্য করিয়াছ যে, একটি সমতলের উপর কোন বিন্দুকে প্রকাশ করিতে সেই

সমতলের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি সরলরেখা লওয়া হয়। এখানে দেখানো হইয়াছে যে, XOX' সরলরেখার সমস্ত রাশিই বাস্তব, এবং YOY' সরলরেখার সমস্ত রাশিই কাল্পনিক ; সুতরাং, OX ও OY কে অক্ষ ধরিলে XOY সমতলের প্রতিটি বিন্দু একটি করিয়া রাশি নির্দেশ করিবে। ঐ রাশিকে জটিল রাশি বলা হইবে। সাধারণতঃ z দ্বারা ইহা সূচিত হয়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সংজ্ঞার সহিত সঙ্গতি রাখিয়া বলা যাইতে পারে $z=x+iy$.



যেহেতু বাস্তব রাশি ও কাল্পনিক রাশি এক নহে, সেজন্য x এবং iyর যোগফল দুইটি বাস্তব রাশির সাধারণ যোগের প্রক্রিয়ার মতন হইবে না। উপরস্থ চিত্রে দেখ P_1 বিন্দুটি $z_1\ (=x+iy)$ কে নির্দেশ করিতেছে। যদি $OM=x$ হয় এবং $ON=iy$ হয়, তবে $OMPN$ আয়তক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ করিলে O বিন্দুর বিপরীতস্থ আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু Pই হইবে উদ্দিষ্ট জটিল রাশি। এইভাবে $z_2=-x+iy$, $z_3=x-iy$, $z_4=x-iy$ (x, ও y সবসময়েই বাস্তব ধনরাশি ধরা হইয়াছে) গুলি P_2, P_3, P_4 বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। এখন যদি

$OP = r$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হয়, এবং যদি OP, OX এর ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে

$$x = r\cos\theta \text{ এবং } y = r\sin\theta. \qquad \cdots \quad (1)$$

সুতরাং, $z_1 = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$;

আবার যেহেতু $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, এবং $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$.

অতএব, $z_2 = -x + iy = r[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)] \quad \cdots \quad (2)$

এইভাবে ত্রিকোণমিতির সহিত সঙ্গতি রাখিয়া

$$z_3 = r[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)] \qquad \cdots \quad (3)$$

$$z_4 = r[\cos(2\pi - \theta) + i\sin(2\pi - \theta)] \qquad \cdots \quad (4)$$

(1) হইতে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$

অর্থাৎ $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ [ধনাত্মক চিহ্নমাত্র লইয়া] (5)

এই 'r' জটিল রাশির **মডিউলাস** (modulus) বা **শুদ্ধমান** (absolute value) অভিহিত হয়। এবং লিখিবার সময় $|z_1|$ অথবা Mod. z_1-রূপে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ

$$|z_1| = r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cdots \quad (6)$$

লক্ষ্য কর, $|z_2| = r = +\sqrt{x^2 + y^2}$

$$|z_3| = r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

এবং $|z_4| = r = +\sqrt{x^2 + y^2}$

[(1) হইতে $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ অর্থাৎ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$.

'θ' কে z_1 র **যুক্তি** (argument) বা **বিস্তার** (amplitude) বলে, লিখিবার সময় লেখা হয় arg. z_1 বা amp. z_1 ;

অর্থাৎ $\arg z_1 = \theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}. \qquad \cdots \quad (7)$

অনুরূপভাবে, $\arg z_2 = \theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{-x}\right) = \pi - \theta \qquad \cdots \quad (8)$

$$\arg z_3 = \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{-x}\right) = \pi + \theta \qquad \cdots \quad (9)$$

$$\arg z_4 = \theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right) = 2\pi - \theta \qquad \cdots \quad (10)$$

লক্ষ্য কর, $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, আবার $\theta_3 = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, কিন্তু $\theta_1 \neq \theta_3$, জটিল রাশির যুক্তি স্থির করিতে মনে রাখিবে x এবং y র সহিত কোন চিহ্ন আছে কিনা। কারণ জটিল রাশি সমতলের কোন চতুর্থাংশে অবস্থিত তাহার উপরই ইহার যুক্তি নির্ভর করিবে।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি $z = z_1 - z_2$ একটি জটিল রাশি হয় এবং $z_1 = x_1 + iy_1$, ও $z_2 = x_2 + iy_2$ হয় তবে উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি হইতে জান ইহা z_1 ও z_2 র মধ্যের দূরত্ব।

এবং $\arg(z_1 - z_2) = \tan^{-1}\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

2. জটিল রাশিতে $y = 0$ হইলে ইহা সম্পূর্ণ বাস্তব, এবং তখন ইহার যুক্তি 0^c, অথবা, π^c.

3. জটিল রাশিতে যদি $x = 0$ হয়, তাহা হইলে ইহা সম্পূর্ণ কাল্পনিক হইবে, এবং সমস্ত কাল্পনিক রাশির যুক্তি হয় $\frac{\pi^c}{2}$ অথবা $\frac{3\pi^c}{2}$.

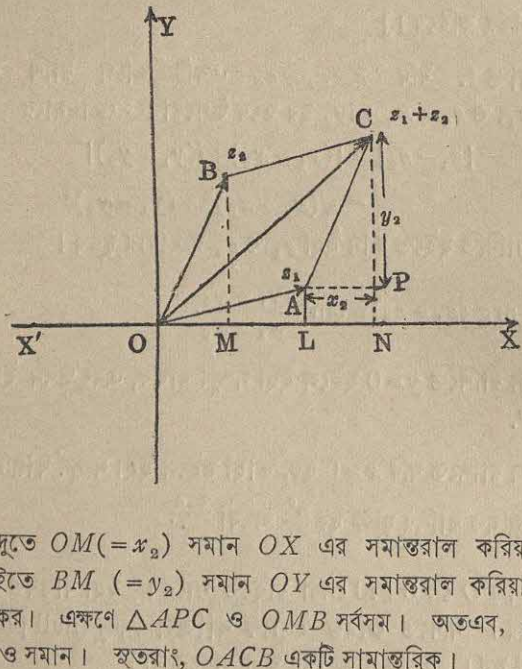
4. মূলবিন্দু O কে $0 + i0$ লেখা যাইতে পারে। ইহা বাস্তবও নয়, অথবা কাল্পনিকও নয়। গণিতে সেজন্য ইহাকে **বাতিল বিন্দু** (null point) নামে অভিহিত করা হয়। ইহার যুক্তি স্থির করা যাইবে না।

সংজ্ঞা। উপরিউক্ত সমতলকে **জটিল সমতল** (Complex plane) বা **আরগাণ্ডীয় সমতল** (Argand's plane) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। 'যুক্তি'র উপরোক্ত আলোচনা একাদশ শ্রেণীতে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক (Inverse circular function) শেষ হইবার পর সম্যক্‌ভাবে করা যাইবে।

16·5. (I) জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি জটিল রাশির যোগফল নির্ণয় (To find geometrically the sum of two complex quantities).

মনে কর, XOY জটিল সমতলে A ও B বিন্দু যথাক্রমে $z_1 = x_1 + iy_1$ ও $z_2 = x_2 + iy_2$ বিন্দুকে সূচিত করিতেছে। আমাদের $z_1 + z_2$ বিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইবে।



A বিন্দুতে $OM(=x_2)$ সমান OX এর সমান্তরাল করিয়া AP টান। P বিন্দু হইতে BM $(=y_2)$ সমান OY এর সমান্তরাল করিয়া PC টান। AC যুক্ত কর। এক্ষণে $\triangle APC$ ও OMB সর্বসম। অতএব, AC, OBর সমান্তরাল ও সমান। সুতরাং, $OACB$ একটি সামান্তরিক।

যেহেতু $PN = y_1$; অতএব, $CN = PN + PC = y_1 + y_2$.

আবার, $OL = x_1$; অতএব, $ON = OL + LN = x_1 + x_2$.

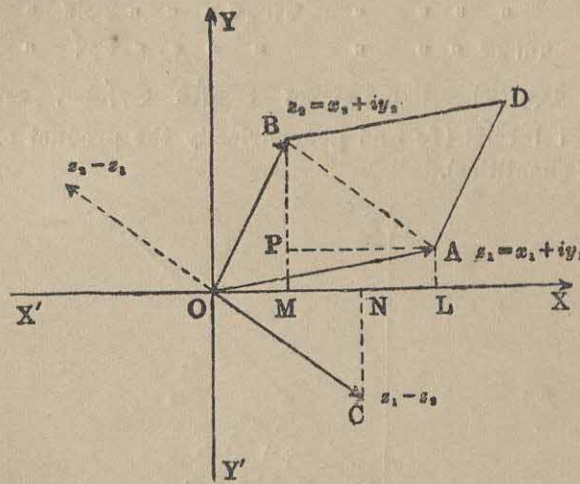
সুতরাং, জটিল সমতলে C বিন্দু $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

বা, $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$,

বা, $z_1 + z_2$.

সুতরাং, C, উদ্দিষ্ট বিন্দু। লক্ষ্য কর, C বিন্দু $OABC$ সামান্তরিকের O বিপরীতস্থ কৌণিক বিন্দু।

(II) জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি জটিল রাশির বিয়োগফল নির্ণয় (To find geometrically the difference of two complex quantities).



মনে কর, জটিল সমতলে z_1 ও z_2 যথাক্রমে A ও B বিন্দু। z_1-z_2 বিন্দুটিকে নির্ণয় করিতে হইবে। AP, BM এর উপর লম্ব টান। উপরোক্ত চিত্র অনুসারে,

$$x_1-x_2=OL-OM=ML=AP.$$

এখন OX হইতে APর সমান করিয়া ON কাটিয়া লও।

আবার, $y_1-y_2=AL-BM=-BP.$

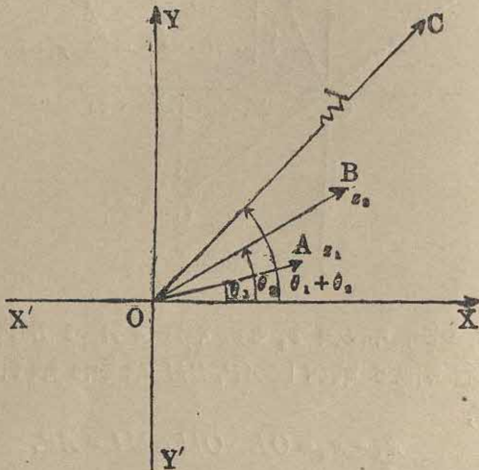
OY' সমান্তরাল করিয়া $BP=NC$ অঙ্কিত কর। তাহা হইলে C উদ্দিষ্ট বিন্দু হইবে। যেহেতু অঙ্কনানুসারে $\triangle APB$ ও $\triangle ONC$ সর্বসম, ও $AP \parallel$ ও ON. সুতরাং, OC এবং BA (সামান্তরিক $OADB$র কর্ণ) সমান্তরাল এবং $OC=BA$.

অনুসিদ্ধান্ত। অন্য উপায়ে C কে নির্ধারণ সম্ভব। BO কে বর্ধিত কর OB' পর্যন্ত যেন $BO=OB'$। অতএব, সংজ্ঞানুসারে B' বিন্দু $-z_2$. সুতরাং, 16·5(1) অনুসারে $AOB'C$ সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করিলে C বিন্দুটি পাওয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। নিম্নে বর্ণিত ধর্ম-গুলি সহজেই অনুধাবনযোগ্য।

যদি $x_1 - x_2$ ধনাত্মক হয় ও $y_1 - y_2$ ধনাত্মক হয়, তবে C প্রথম চতুর্থাংশে থাকে
" " ঋণাত্মক " " " " " " C দ্বিতীয় " "
" " " " " " ঋণাত্মক " " " তৃতীয় " "
" ধনাত্মক " " " " " " " চতুর্থ " "

(III) জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি জটিল রাশির গুণফল নির্ণয় (To find geometrically the product of two complex quantities).



ধর, জটিল সমতলে z_1 ও z_2 যথাক্রমে A ও B বিন্দু, যদি $OA = r_1$ ও $OB = r_2$ হয় এবং যদি OA ও OB যথাক্রমে OX এর সহিত θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে 16·4 অনুসারে

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

এবং $$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

যেখানে,

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \theta_1 = \tan^{-1} \frac{y_1}{x_1};$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},\ \theta_2 = \tan^{-1} \frac{y_2}{x_2}.$$

এখন যদি $z = z_1 z_2$ হয়, তাহা হইলে

$$z = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).\, r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে z একটি C বিন্দুকে নির্দেশ করিবে,

যেখানে $OC = r_1 r_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

এবং OC, OX র সহিত $(\theta_1 + \theta_2)$ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং, C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

(IV) জ্যামিতির সাহায্যে দুইটি জটিল রাশির ভাগফল নির্ণয় (To find the division of two complex quantities).

ধর জটিল সমতলে z_1 ও z_2 যথাক্রমে A ও B দুইটি বিন্দু। পূর্বের ন্যায়,

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

যদি $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ হয়, তবে

$$z = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে $OC = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$,

এবং OC, OX র সহিত $\theta_1 - \theta_2$ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং, C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

16·6. জটিল রাশি সম্বন্ধীয় বিবিধ উপপাদ্য :

(i) যদি $a+ib=0$ হয় তবে $a=0$ এবং $b=0$ হইবে (a, b বাস্তব)

প্রমাণ : $a+ib=0$; অতএব, $a=-ib$ বর্গ করিয়া,

$$a^2=(-i)^2b^2=-b^2.$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=0.$$

কিন্তু যেহেতু a, b উভয়েই বাস্তব সেজন্য উহাদের কোনটারই পূর্ণবর্গ ঋণাত্মক হইবে না। সুতরাং a, b র প্রত্যেকটি আলাদাভাবে শূন্য হইবে, অন্যথায় তাহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না। অর্থাৎ

$$a=0, b=0.$$

(ii) যদি $a+ib=c+id$ হয় তবে $a=c$ এবং $b=d$ হইবে। ($a, b, c, d,$ বাস্তব)

প্রমাণ : $a+ib=c+id.$

$$\therefore \quad a-c+i(b-d)=0.$$

(i)-অনুসারে $a-c=0,\ b-d=0,$ অর্থাৎ $a=c,\ b=d$ উপরের উপপাদ্যটি গুরুত্বপূর্ণ। ইহাকে এইভাবে লেখা যাইতে পারে। যদি z_1 ও z_2 দুইটি জটিল রাশি হয় এবং $z_1=z_2$ হয়, তবে

z_1 র বাস্তব অংশ $=z_2$ র বাস্তব অংশ

এবং z_1 র কাল্পনিক অংশ $=z_2$ র কাল্পনিক অংশ।

(iii) কতকগুলি বিভিন্ন জটিল রাশির যোগফল ও বিয়োগফল সাধারণতঃ একটি জটিল রাশি হইবে।

$$(a+ib)+(c-id)-(e-if)+\cdots$$

$$=(a+c-e+\cdots)+i(b-d+f+\cdots)$$

$=$ জটিল রাশি। (সাধারণতঃ) $=A+iB$

$b-d+f\cdots=0$ হইলে রাশিটি সম্পূর্ণ বাস্তব হইবে

এবং $a+c-e\cdots=0$ হইলে রাশিটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক হইবে।

(iv) কতকগুলি বিভিন্ন জটিল রাশির গুণফলও একটি জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $(a+ib)(c+id)(e+if)$

$$=[(ac-bd)+i(ad+bc)](e+if)$$
$$=(A+iB)(e+if) \qquad [\text{ধর}]$$
$$=(Ae-Bf)+i(Be+Af)$$
$$=X+iY$$
= জটিল রাশি। [সাধারণতঃ]

(v) জটিল রাশির যে-কোন ঘাতও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $(a+ib)^n=(a+ib)(a+ib)\cdots\cdots n$ তম উৎপাদক

$$=X+iY \qquad [\text{(iv)-অনুসারে}]$$
= জটিল রাশি।

(vi) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$
$=X+iY=$ জটিল রাশি।

(vii) জটিল রাশির যে-কোন মূলও জটিল রাশি হইবে।

মনে কর, $a+ib$ জটিল রাশির n-তম মূল $=x$.

$$\therefore\ \sqrt[n]{a+ib}=x, \quad \therefore\ a+ib=x^n.$$

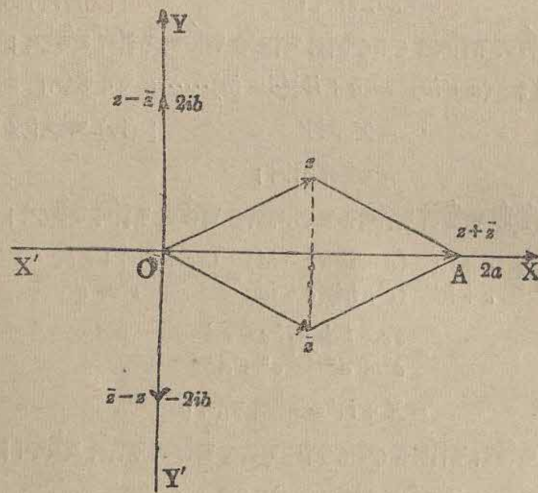
এখন যদি x^n বাস্তব হয় তাহা হইলে (ii)-অনুসারে $b=0$. কিন্তু তাহা অসম্ভব। কারণ সেক্ষেত্রে সংখ্যাটি বাস্তব হইয়া যায়। আবার x^n যদি সম্পূর্ণ কাল্পনিক হয় তবে $a=0$, সেক্ষেত্রেও রাশিটি জটিল থাকে না। অতএব, x একটি জটিল রাশি।

16·7. অনুবন্ধী জটিল রাশি (Conjugate complex quantities) :

দুইটি জটিল রাশির কাল্পনিক অংশদ্বয় যদি বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় তাহা হইলে, ঐ রাশিদ্বয়কে অনুবন্ধী জটিল রাশি বলে। যথা, $a+ib$ ও $a-ib$, গণিতে ইহাদের z ও $\bar{z}$ বা z ও z^* রূপে প্রকাশ করা হয়। লক্ষ্য কর, z যদি

প্রথম চতুর্থাংশে অবস্থিত হয় তবে $\bar{z}$ চতুর্থ-চতুর্থাংশে অবস্থিত হইবে এবং z দ্বিতীয় চতুর্থাংশে অবস্থিত হইলে $\bar{z}$ তৃতীয় চতুর্থাংশে অবস্থিত হইবে। নিম্নে ইহাদের কয়েকটি ধর্ম্ম আলোচিত হইল—

(i) $z+\bar{z}=a+ib+a-ib=2a$ সম্পূর্ণ বাস্তব। জ্যামিতির সাহায্যেও দেখানো সম্ভব। নিম্নের চিত্র দেখ। A বিন্দু উদ্দিষ্ট বিন্দু হইবে।



(ii) $z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib.$

(iii) $\bar{z}-z=(a-ib)-(a+ib)=-2ib.$

(iv) $z\bar{z} \;=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

$=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$, সম্পূর্ণ বাস্তব।

(v) §16·4 সংজ্ঞানুসারে,

$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2}.$

সুতরাং, $|z_1| = |\bar{z}|$

জ্যামিতির সাহায্যে ইহাদের §16·4-এ প্রকাশ করা হইয়াছে।

16·8. শুদ্ধমান সম্পর্কিত দুইটি মূল্যবান্ উপপাদ্য।

(i) কতকগুলি জটিল রাশির গুণফলের শুদ্ধমান ঐ জটিল রাশিগুলির শুদ্ধমানের গুণফল।

প্রথমে দুইটি রাশির সাহায্যে উপরোক্ত উপপাদ্যের সত্যতা নির্ধারণ করা হইবে। ধর,

$$z_1 = a + ib \text{ এবং } z_2 = c + id.$$

অতএব, $z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad).$

সুতরাং, $|z_1 z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2}$

$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2}$$

$$= |z_1|.|z_2|. \qquad [\text{ সংজ্ঞানুসারে }]$$

বিকল্প-পদ্ধতি :

ধর $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

r_1, r_2, z_1 ও z_2 র শুদ্ধ মান।

যেহেতু $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$

[§ 16·5 (iii) দেখ]

অতএব, সংজ্ঞানুসারে $z_1 z_2$ র শুদ্ধমান $= r_1 r_2$.

অতএব, $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|.|z_2|.$

অনুসিদ্ধান্ত। উপরোক্ত পদ্ধতিতে খুব সহজেই তিন বা ততোধিক জটিল রাশির ক্ষেত্রে ইহা প্রমাণ করা যাইবে।

(ii) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের শুদ্ধমান ঐ জটিল রাশি দুইটির শুদ্ধমানের ভাগফলের সমান।

ধর, জটিল রাশিদ্বয় যথাক্রমে

$$z_1 = a + ib \text{ এবং } z_2 = c + id.$$

অতএব, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \quad \cdots\cdots (1)$

$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

সুতরাং $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}. \qquad \text{[সংজ্ঞানুসারে]}$$

বিকল্প-পদ্ধতি :

(*a*) (1) হইতে

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

অতএব, 16·8 (i) অনুসারে,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|(a+ib)(c-id)|}{c^2+d^2} = \frac{|a+ib|.|c-id|}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(*b*) ধর, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}.[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

[16·5 (iv) দেখ]

সুতরাং, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}.$

16·9. জটিল রাশির বর্গমূল নির্ণয়।

মনে কর, $\sqrt{a+ib} = x+iy.$ [x, y বাস্তব]

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া,

$$a+ib = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

§ 16·6 (ii) অনুসারে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমান করিয়া,

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \quad (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2.$$

$$x^2 + y^2 = + \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) হইতে, [∵ x, y বাস্তব ; অতএব, বামপক্ষ ধনাত্মক]

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

$$\therefore \quad x = \pm\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right]^{\frac{1}{2}},\ y = \pm\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

উপরে b যদি ধনাত্মক হয় তবে (1) হইতে যেহেতু $2xy = b$; অতএব, x এবং y উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক হইবে। আবার b যদি ঋণাত্মক হয় তবে x এবং y র একটি ধনাত্মক হইলে অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

দ্রষ্টব্য। $a + ib$ র অনুবন্ধী জটিল রাশির বর্গমূলও (3) হইলে পাওয়া যাইবে।

16·10. i এর বিভিন্ন ঘাত।

(i) ধনাত্মক ঘাত :

সংজ্ঞানুসারে

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1,$

$i^3 = i^2 i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1,$ ইত্যাদি।

সুতরাং, n যদি ধনাত্মক রাশি হয় তবে

$i^{4n} \quad = (i^4)^n = (+1)^n = 1$;

$i^{4n+1} = i^{4n}.i = i$;

$i^{4n+2} = i^{4n+2} = i^2 = -1$;

$i^{4n+3} = i^{4n+3} = i^3 = -i$; ইত্যাদি।

(ii) ঋণাত্মক ঘাত ঃ

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\ ;$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1\ ;$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i\ ;$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1.$$

এইভাবে $i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} = \frac{1}{+1} = 1\ ;$

$$i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} = \frac{1}{i} = -i\ ;$$

$$i^{-(4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}} = \frac{1}{i^2} = -1\ ;$$

$$i^{-(4n+3)} = \frac{1}{i^{4n+3}} = \frac{1}{i^3} = i.$$

(iii) ভগ্নাংশ-সমন্বিত ঘাত ঃ

$$i^{\frac{1}{2}} = \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2i-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2i+i^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\ ;$$

$$i^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{i^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{1+i} = \pm\frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-(i^2)^2}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

দ্রষ্টব্য 1. 16·9 অনুসারেও ইহা বাহির করা সম্ভব।

লক্ষ্য কর, $\sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2i-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$

দ্রষ্টব্য 2. $i^{\frac{1}{m}}$ বাহির করা বর্তমান পরিধিতে সম্ভব নহে। উচ্চতর গণিতের অন্যান্য উপপাদ্যের সাহায্যে ইহা বাহির করা সম্ভব।

16·11. '1' র ঘনমূল বাহির করিতে হইবে (To find the cube roots of unity).

মনে কর, $x=\sqrt[3]{1}$.

অতএব, $x^3=1$, বা, $x^3-1=0$,

বা, $(x-1)(x^2+x+1)=0$. $\cdots$ (1)

সুতরাং, হয় $x=1$, $\cdots$ (2)

অথবা, $x^2+x+1=0$

অর্থাৎ, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$.

অর্থাৎ, $x^3-1=0$ সমীকরণের বীজত্রয় যথাক্রমে

$$1,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

বলা বাহুল্য, শেষোক্ত দুইটি বীজই জটিল।

লক্ষ্য কর,

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

আবার, $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

এই বিশেষ ধর্মের জন্য $x^3-1=0$ সমীকরণের বীজত্রয়কে যথাক্রমে $1,\ \omega,\ \omega^2$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

যদি $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ হয়, তবে $\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ইত্যাদি।

$\therefore\ x=\sqrt[3]{1}=1,\ \omega,\ \omega^2$.

16·12. '1' ঘনমূলগুলির কয়েকটি বিশেষ ধর্ম।

(i) $1+\omega+\omega^2=0$,

$$1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=1-1=0,$$

অর্থাৎ, '1' ঘনমূলত্রয়ের যোগফল $=0$.

(ii) $\omega.\omega^2=1.$

ধর, $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. $\therefore\ \omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\ \omega.\omega^2=\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{4}=\frac{1+3}{4}=1$$

অর্থাৎ, জটিল মূলদ্বয়ের গুণফল $=1$.

(iii) ω ও ω^2 অনুবন্ধী জটিল রাশি।

ধর, $\omega=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ অতএব,

$$\omega^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে তাহারা অনুবন্ধী জটিল রাশি।

(iv) n যদি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$$\omega^n=1,\ \text{বা},\ \omega,\ \text{বা},\ \omega^2.$$

লক্ষ্য কর, $\omega^3=1.$

$\omega^4=\omega^3.\,\omega=\omega,$ [(ii)-অনুসারে]

$\omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2,$

$\omega^6=\omega^3.\omega^3=1$; ইত্যাদি।

আবার, $\omega^{3m}=(\omega^3)^m=1,$

$\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\omega=\omega,$

এবং $\omega^{3m+2}=\omega^{3m}.\omega^2=\omega^2$; ইত্যাদি।

16·13. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Multiply* $2\sqrt{3}+3\sqrt{-2}$ by $4\sqrt{2}-5\sqrt{-3}.$

এক্ষণে, $(2\sqrt{3}+i\,3\sqrt{2})(4\sqrt{2}-i5\sqrt{3})$ [$\because\ \sqrt{-1}=i$]

$=(8\sqrt{6}-i^2 15\sqrt{6})+i\,(12.2-10.3)$

$=23\sqrt{6}-6i$ নির্ণেয় গুণফল।

Ex. 2. *Express* $\dfrac{9+19i}{5+3i}-\dfrac{13(2i-1)}{4+7i}$ *in the form* $A+iB.$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(9+19i)}{5+3i} - \frac{13(2i-1)}{4+7i}$$

$$= \frac{(9+19i)(4+7i) - 13\,(2i-1)(5+3i)}{(5+3i)(4+7i)}$$

$$= \frac{\{(36-133)+i\,(76+63)\} - 13\,\{(-5-6)+i\,(10-3)\}}{(20-21)+i\,(12+35)}$$

$$= \frac{46+48i}{-1+47i} = \frac{(46+48i)(-1-47i)}{(-1+47i)(-1-47i)}$$

$$= \frac{(-46+48.47) - i(-48+47.46)}{1+(47)^2}$$

$$= \frac{\{1+(47)^2\}\{1-i\}}{1+(47)^2} = 1-i.$$

$\because$ (i) $-46+48.47 = -47+1+48.47 = 47(48-1)+1.$

(ii) $48+47{\cdot}46 = \;\; 47+1+47.46 = 47(46+1)+1.$

Ex. 3. *Express with rational denominator*

$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{6}}.$$

প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-i\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(i\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{\{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{3}.\sqrt{6}\}+i\{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}.\sqrt{6}\}}{11+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\{(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})+i\,(3-2\sqrt{3}+\sqrt{6})\}\{11-2\sqrt{6}\}}{(11+2\sqrt{6})(11-2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{(10+33\sqrt{2}-12\sqrt{3}+7\sqrt{6})+i(21+12\sqrt{2}-22\sqrt{3}+5\sqrt{6})}{97}$$

Ex. 4. *Find the modulus of* $\dfrac{24+7i}{4+3i}.$

ধর, $\quad z = \dfrac{24+7i}{4+3i}.$

$$\therefore \quad |z| = \left|\frac{24+7i}{4+3i}\right| = \frac{|24+7i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{24^2+7^2}}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

[§ 16·8 অনুসারে]

$$= \frac{\sqrt{576+49}}{\sqrt{16+9}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}} = 5.$$

[যুক্তি $z = \tan^{-1}\frac{7}{24} + \tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{\frac{7}{24}+\frac{3}{4}}{1-\frac{7.3}{24.4}}$

$= \tan^{-1}\frac{28+72}{96-21} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$·]

Ex. 5. *Find the modulus of*

$$2.\frac{(4+6i)^2(3+i\sqrt{5})^3}{(7+i\sqrt{7})^3}.$$

ধর, প্রদত্ত জটিল রাশি z.

$$\therefore \quad |z| = \left|\frac{2.(4+6i)^2.(3+i\sqrt{5})^3}{(7+i\sqrt{7})^3}\right|$$

$$= \frac{|2|\,|(4+6i)^2|.|(3+i\sqrt{5})^3|}{|(7+i\sqrt{7})^3|}$$

$$= \frac{2.(\sqrt{4^2+6^2})^2.(\sqrt{3^2+5})^3}{(\sqrt{7^2+7})^3}.$$ [§ 16·8 অনুসারে]

$$\because \quad |(4+i6)^2| = |(4+i6)(4+i6)| = |4+i6|.|4+i6|$$

$= (\sqrt{4^2+6^2})^2$, ইত্যাদি।

$$|z| = 2\cdot\frac{52.14\sqrt{14}}{56.\sqrt{56}} = 13\cdot$$

Ex. 6. *Simplify*

$$\{\sqrt{2}+1+i(\sqrt{2}-1)\}^3 + \{(\sqrt{2}+1)-i(\sqrt{2}-1)\}^3.$$

এক্ষণে, $\{\sqrt{2}+1+i(\sqrt{2}-1)\}^3 = (\sqrt{2}+1)^3 + \{i(\sqrt{2}-1)\}^3$
$+ 3(\sqrt{2}+1)i(\sqrt{2}-1)\{(\sqrt{2}+1)+i(\sqrt{2}-1)\}$

$= (2\sqrt{2}+3.2.1+3\sqrt{2}+1) - i(2\sqrt{2}-3.2.1+3\sqrt{2}-1)$
$+ 3i\{(\sqrt{2}+1)+i(\sqrt{2}-1)\}$

$= (10+2\sqrt{2}) + i(10-2\sqrt{2}).$ (1)

অনুরূপভাবে, $\{\sqrt{2}+1-i(\sqrt{2}-1)\}^3=(10+2\sqrt{2})-i(10-2\sqrt{2})$.
[অথবা (1) র উভয় পক্ষকে i র বদলে $-i$ বসাইয়া]

প্রদত্ত রাশি $=4(5+\sqrt{2})$.

Ex. 7. *Show that if* $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, *then* $a^6+a^4+a^2+1=0$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে $\sqrt{2}a=1+i$.

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া,

$$2a^2=1+2i+i^2=2i. \qquad [\because\ i^2=-1]$$

$\therefore\ a^2=i$.

এক্ষণে, $a^6+a^4+a^2+1=a^4(1+a^2)+(1+a^2)$

$$=(1+a^2)(1+a^4)$$
$$=(1+i)(1+i^2)=(1+i)(1-1)$$
$$=(1+i)\times 0=0.$$

Ex. 8. *Find the square root of*

(i) $1-i$. (ii) $\frac{2-36i}{2+3i}$.

(i) ধর, $1-i=(x-iy)^2$.

অথবা, $1-i=x^2-y^2-2ixy$.

স্থতরাং, $x^2-y^2=1$, ... (1)

$2xy=1$. ... (2)

$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$

$$=1+1=2.$$

(ii) $z=\frac{2-36i}{2+3i}=\frac{(2-36i)(2-3i)}{2^2-(3i)^2}=\frac{(4-108)-i(72+6)}{4+9}$

$$=\frac{-104-78i}{13}=-(8+6i)=-[9+2.3.i+i^2]$$

$=i^2(3+i)^2$.

$\therefore$ z র বর্গমূল $\pm i(3+i)$ বা $\pm(3i-1)$.

দ্রষ্টব্য। এখানে $8+6i$ র বর্গমূল পর্যবেক্ষণ পদ্ধতিতে বাহির করা হইয়াছে। অবশ্য Ex.(i) র ন্যায় এক্ষেত্রেও বর্গমূল নির্ণয় করা সম্ভব।

Ex. 9. *Find the fourth roots of $7+24i$.*

এক্ষণে $7+24i=16-9+24i=4^2+2.4.3i+(3i)^2$

$$=(4+3i)^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{7+24i}=\pm(4+3i).$$

আবার, $\quad 4+3i=\dfrac{8+6i}{2}=\dfrac{(3+i)^2}{2},$

এবং $\quad -(4+3i)=\dfrac{i^2(3+i)^2}{2}.$

সুতরাং, $\quad (7+4i)^{\frac{1}{4}}=\pm\dfrac{3+i}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{i(3+i)}{\sqrt{2}}$

$$=\pm\frac{3+i}{\sqrt{2}}, \pm\frac{3i-1}{\sqrt{2}}.$$

Ex. 10. *Express as the sum of two squares*

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2).$$

এক্ষণে, $\quad (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$

$$=(1+ix)(1-ix)(1+iy)(1-iy)(1+iz)(1-iz)$$

$$=(1+ix)(1+iy)(1+iz).(1-ix)(1-iy)(1-iz).$$

কিন্তু, $\quad (1+ix)(1+iy)(1+iz)$

$$=\{1-xy+i(x+y)\}(1+iz)\}$$

$$=1-xy-z(x+y)\}+i\{x+y+z(1-xy)\}$$

$$=(1-xy-yz-zx)+i(x+y+z-xyz) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, $\quad (1-ix)(1-iy)(1-iz)$

$$(1-ix)(1-iy)(1-iz)=(1-xy-yz-zx)-i(x+y+z-xyz)$$

[অথবা (1)এর উভয় পক্ষে i বদলে $-i$ বসাইয়া]

সুতরাং, $\quad (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$

$$=(1-xy-yz-zx)^2+(x+y+z-xyz)^2$$

Ex. 11. *Show that if* $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, then

$$(1+\omega-\omega^2)^{18}-(1-\omega+\omega^2)^{18}=0$$

যেহেতু $\omega=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\quad \omega^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{-1-3(i\sqrt{3})^2+3i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^3}{8}$$

$$=\frac{-1+9+3i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}}{8}=1. \qquad \cdots\ (1)$$

আবার, $2\omega+1=i\sqrt{3}$.

উভয় পক্ষে বর্গ করিয়া,

$$4\omega^2+4\omega+1=-3,$$

বা, $1+\omega+\omega^2=0. \qquad \cdots\ (2)$

$\therefore\quad 1+\omega-\omega^2=-2\omega^2,$

এবং $1-\omega+\omega^2=-2\omega.$

সুতরাং, $(1+\omega-\omega^2)^{18}-(1-\omega+\omega^2)^{18}$

$$=(-2\omega^2)^{18}-(-2\omega)^{18}$$

$$=(-2)^{18}[\omega^{36}-\omega^{18}]=(-2)^{18}[(\omega^3)^{12}-(\omega^3)^6]$$

$$=(-2)^{18}[1-1] \qquad [\text{1 অনুসারে}]$$

$$=0.$$

Ex. 12. *Prove that*

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n=2,$$ *if n be a multiple of 3 and* -1, *if n be any other integer.*

এককের ঘনমূল হইতে,

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \omega^3=1 \quad \cdots\ (1)$$

এবং $1+\omega+\omega^2=0. \qquad \cdots\ (2)$

n যদি 3 র গুণিতক হয় তবে ধর $n = 3m$, m যে-কোন পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং,

বাম পক্ষ $= (\omega)^{3m} + (\omega^2)^{3m} = \omega^{3m} + \omega^{6m}$
$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$ [(1) হইতে]

n যদি 3 র গুণিতক না হয়, ধর $n = 3m + 1$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1} = \omega^{3m+1} + \omega^{6m+2}$
$= (\omega^3)^m . \omega + (\omega^3)^{2m} . \omega^2 = \omega + \omega^2$ [(1) হইতে]
$= -1$

আবার, $n = 3m + 2$ হইতে পারে, সুতরাং, এক্ষেত্রে

বাম পক্ষ $= (\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2} = \omega^{3m+2} + \omega^{6m+4}$
$= (\omega^3)^m . \omega^2 + (\omega^2)^{2m+1} . \omega = \omega^2 + \omega$ [(1) হইতে]
$= -1$ [(2) হইতে]

Ex. 13. *Factorise* $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

§ 2·7 হইতে, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

এক্ষণে, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
$= a^2 + b^2\omega^3 + c^2\omega^3 + (\omega + \omega^2)\, ab$
$+ (\omega + \omega^2)bc + (\omega + \omega^2)ca.$
$\because \; 1 + \omega + \omega^2 = 0.$

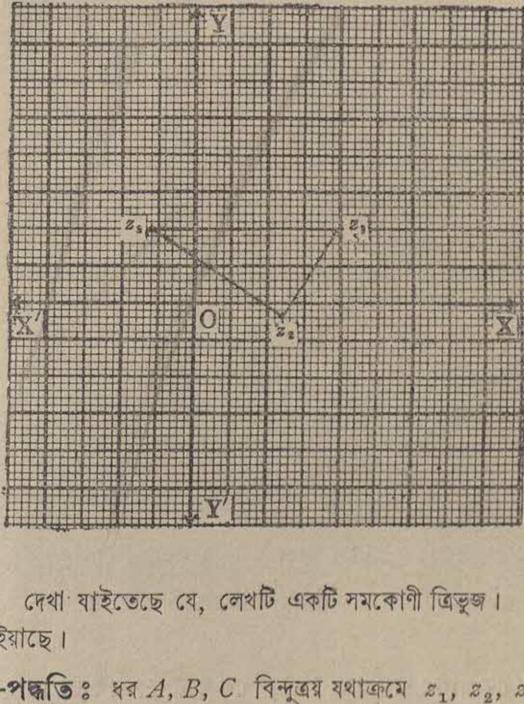
$= a(a + b\omega^2 + c\omega) + \omega b(a + \omega^2 b + \omega c) + \omega^2 c(a + \omega^2 b + \omega c)$
$= (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega).$

সুতরাং, $a^3 + b^3 + c^3 - ab - bc - ca$
$= (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

Ex. 14. *By plotting or otherwise show the following points are the vertices of a right-angled triangle in the Argand's plane,*

$z_1 = 10 + 5i$, $z_2 = 6 - i$, $z_3 = -3 + 5i$.

লেখ সাহায্যে : ধর O মূল বিন্দু এবং XOX' বাস্তব অক্ষ এবং YOY' কাল্পনিক অক্ষ। ক্ষুদ্র বর্গের 2 বাহুকে একক ধরিয়া z_1, z_2 z_3 স্থাপন করিয়া



যোগ কর। দেখা যাইতেছে যে, লেখটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। z_2 বিন্দুতে সমকোণ হইয়াছে।

বিকল্প-পদ্ধতি : ধর A, B, C বিন্দুত্রয় যথাক্রমে z_1, z_2, z_3. সুতরাং § 16·4 অনু. 1. হইতে z_1, z_2 র মধ্যে দূরত্ব $= |z_1 - z_2|$

$$AB = |z_1 - z_2| = |(10+5i) - (6-i)|$$
$$= |4+6i| = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}.$$

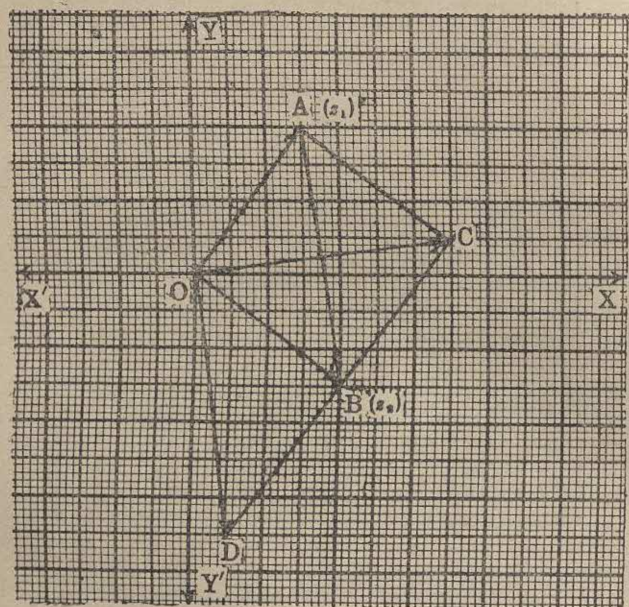
সেইভাবে, $BC = |z_2 - z_3| = |(6-i) - (-3+5i)|$

$$= |9-6i| = \sqrt{9^2+6^2} = 3\sqrt{13}$$
$$CA = |z_3 - z_1| = |(-3+5i) - (10+5i)| = |-13| = 13.$$

$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = 2^2 . 13 + 3^2 . 13 = (4+9)13 = 13^2 = CA^2.$

$\therefore \quad ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

Ex. 15. *If $z_1 = 3 + 4i$ and $z_2 = 4 - 3i$, find geometrically the values of $z_1 + z_2$, and $z_2 - z_1$.*

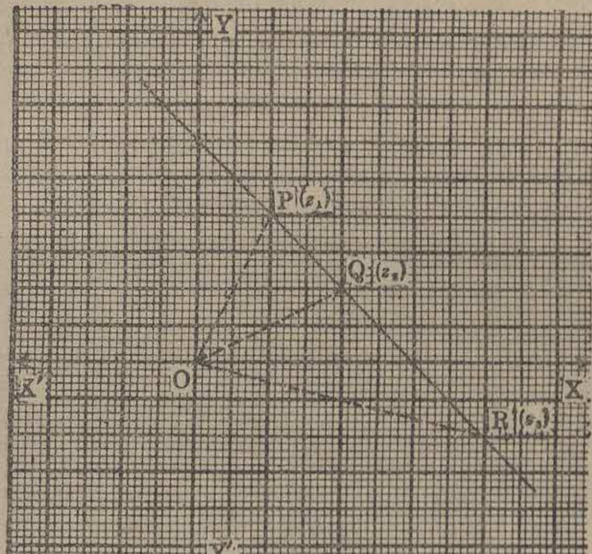


XOX' কে বাস্তব অক্ষ এবং YOY' কে কাল্পনিক অক্ষ ধর। ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বাহুকে একক ধরিয়া $z_1 = 3 + 4i$ এবং $z_2 = 4 - 3i$ বসাও। যথাক্রমে তাহারা A ও B বিন্দু হইল। $AOBC$ সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর। তাহা হইলে C বিন্দুটি $z_1 + z_2$ সূচিত করিবে। ছক-কাগজ হইতে C বিন্দুটি $7 + i$. আবার AB যুক্ত কর $OABD$ সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর। D বিন্দুটি উদ্দিষ্ট $z_2 - z_1$ বিন্দু হইবে। ছক-কাগজ হইতে D বিন্দুটি $1 - 7i$.

দ্রষ্টব্য। $z_1 - z_2$ বাহির করিতে হইলে $OBAD'$ সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর। D'-বিন্দুটি $-1 + 7i$.

Ex. 16. *If the complex numbers $1 + 2i$, $2 + i$, $4 - i$ are*

represented by the points P, Q, R respectively. Find geometrically or otherwise that P, Q, R are collinear.



লেখ সাহায্যে ছক-কাগজের ক্ষুদ্র 10 বাহুকে একক ধরিয়া, z_1, z_2, z_3 স্থাপন কর। ঐগুলি যোগ করিলে PQR একটি সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

বিকল্প-পদ্ধতি ঃ জটিল রাশির যুক্তির সংজ্ঞা হইতে ইহা প্রতীয়মান যে, কতকগুলি জটিল রাশির যুক্তি যদি ধ্রুবক হয়, তবে সেই রাশিগুলির সঞ্চারপথ একটি মূলবিন্দুভেদী সরলরেখা হইবে।

সেজন্য তিনটি জটিল রাশির যুক্তি যদি এইরূপ ভাবে সম্বন্ধ হয় যে, $z_1 - z_2$, $z_2 - z_3$, $z_3 - z_2$, রাশিত্রয়ের যুক্তি সমান, তবে z_1, z_2, z_3 একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

§ 16·4 অনু. 1. অনুসারে

$$(z_1 - z_2) \text{ র যুক্তি} = \tan^{-1}\frac{2-1}{1-2} = \tan^{-1}(-1) = 135^\circ.$$

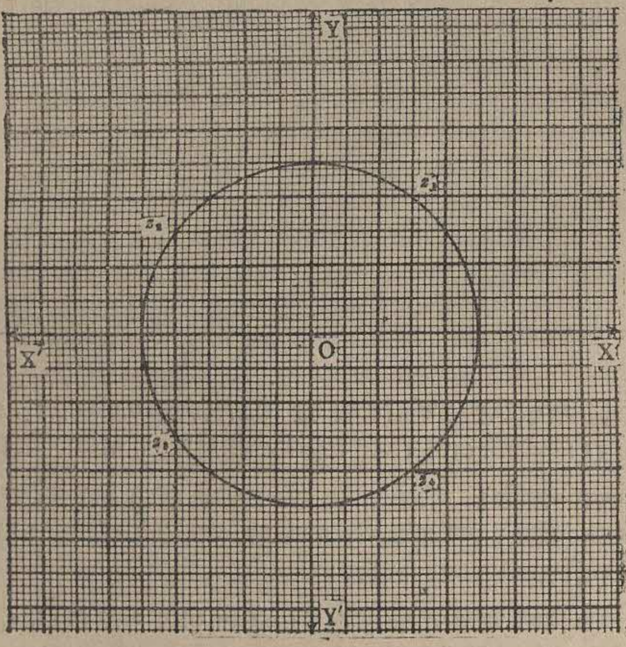
$$(z_2 - z_3) \text{ র যুক্তি} = \tan^{-1} \frac{1-(-1)}{2-4} = \tan^{-1}(-1) = 135°.$$

$$(z_3 - z_1) \text{ র যুক্তি} = \tan^{-1} \frac{-1-2}{4-1} = \tan^{-1}(-1) = 135°.$$

Ex. 17. *Representing or otherwise, show that the following complex numbers*

(i) $3+4i,\ 3-4i,\ -4+3i,\ -4-3i$

(ii) $1+5i,\ 2+4i,\ 3+i,\ -2+6i$, *with centre* $-2+i$, *are concyclic.*



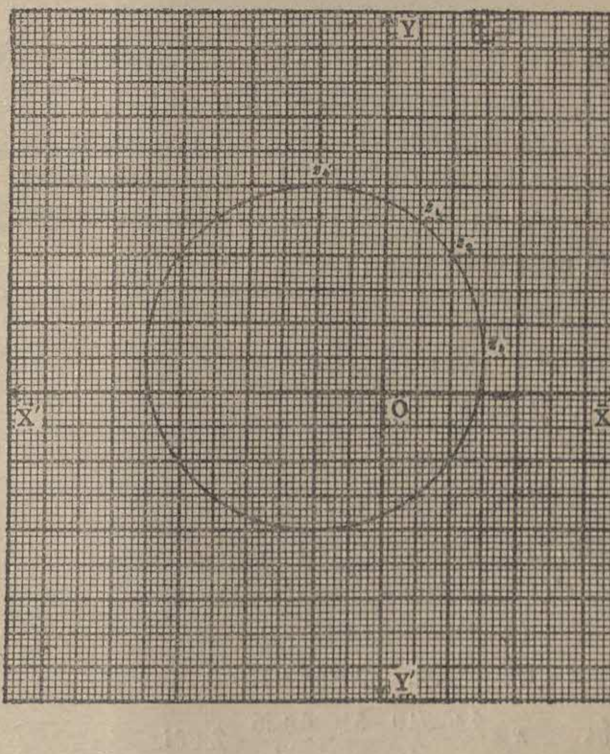
লেখ সাহায্যে

(i) ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বাহুকে একক ধরিয়া নিম্নোক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

$$z_1 = 3+4i,\ z_2 = 3-4i,\ z_3 = -4+3i,\ z_4 = -4-3i.$$

লক্ষ্য কর, ঐগুলি মূলবিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী এবং এই দূরত্ব 5 এককের সমান। সুতরাং, তাহারা একটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু হইবে।

(ii) অনুরূপভাবে ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 5 বাহুকে একক ধরিয়া $z_1=1+5i,\ \ z_2=2+4i,\ \ z_3=3+i,\ \ z_3=-2+6i$ স্থাপন করা হইল। লক্ষ্য কর, উক্ত বিন্দুগুলি $-2+i$ হইতে সতত সমদূরবর্তী। সুতরাং ঐগুলি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু হইবে।



বিকল্প-পদ্ধতি ঃ

লক্ষ্য কর

$$|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\qquad |z_2|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,$$
$$|z_3|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5,\ |z_4|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5.$$

অর্থাৎ z_1, z_2, z_3, z_4 শুদ্ধমানগুলি ধ্রুবক এবং 5 এর সমান। যেহেতু জটিল রাশির শুদ্ধমান মূলবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্দেশ করে ; সুতরাং, z_1, z_2, z_3, z_4 প্রত্যেকটি একটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু হইবে।

(ii) ধর, z_0 বৃত্তের কেন্দ্র

$\therefore \; z_0 = -2+i.$

যেহেতু কেন্দ্র হইতে বৃত্তের উপরস্থ বিন্দুগুলি সতত সমদূরবর্তী। সুতরাং, যদি

$$z_1 - z_0,\; z_2 - z_0,\; z_3 - z_0,\; z_4 - z_0$$

বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু হয় তবে তাহাদের শুদ্ধমানগুলি ধ্রুবক হইবে। এক্ষণে

$$|z_1 - z_0| = |(1+5i) - (-2+i)| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$
$$|z_2 - z_0| = |(2+4i) - (-2+i)| = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$
$$|z_3 - z_0| = |(3+i) - (-2+i)| = |5| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$$
$$|z_4 - z_0| = |(-2+6i) - (-2+i)| = |5i| = \sqrt{0^2+5^2} = 5$$

অর্থাৎ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 হইবে।

Ex. 18. *Solve*

(i) $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0.$

(ii) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = i^{\frac{1}{2}} + i^{-\frac{1}{2}}.$

(i) পর্যবেক্ষণের সাহায্যে $x = 1$ বসাইয়া,

$$1 - 5 + 17 - 13 = 0.$$

সুতরাং, $(x-1)$ একটি উৎপাদক।

$$\therefore \; x^2(x-1) - 4x(x-1) + 13(x-1) = 0,$$
$$(x-1)(x^2 - 4x + 13) = 0.$$

$\therefore \; x = 1,$ অথবা, $x^2 - 4x + 13 = 0.$

অর্থাৎ $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{10-5^2}}{2} = \dfrac{4 \pm i6}{2} = 2 \pm 3i.$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ ত্রয় $1,\; 2+3i,\; 2-3i$

(ii) $i^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{2i}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{(1+2i+i^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pm(1+i)}{\sqrt{2}}.$

সেইভাবে $i^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pm(1-i)}{\sqrt{2}}$. $\therefore\ i^{\frac{1}{2}} + i^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$.

$x^{\frac{1}{2}} = z$ ধর এবং ধনাত্মক চিহ্ন লইয়া, $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

$z^2 - \sqrt{2}\,z + 1 = 0,\ z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad x = \frac{1 \pm 2i + i^2}{2} = \pm i.$$

আবার ঋণাত্মক চিহ্ন লইয়া, $z + \frac{1}{z} = -\sqrt{2}$,

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}},\ x = \frac{\mp 2i}{2} = \pm i.$$

$\therefore$ বীজদ্বয় $x = i, -i$.

কিন্তু $x = -i$ সমকরণটিকে সিদ্ধ করে না। সুতরাং নির্ণেয় বীজ $x = i$

Examples XVI

Simplify :

1. (i) $\sqrt{-108} - \sqrt{-147} + \sqrt{3}$.

(ii) $4\sqrt{75} + 2\sqrt{-27} - \sqrt{-48}$.

2. (i) $(4\sqrt{5} + 3\sqrt{-3})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{-3})$.

(ii) $(\sqrt{5} + \sqrt{-3})(\sqrt{-6} + \sqrt{2})$.

(iii) $(3+i)(1+2i) - (2-i)(2+3i)$. (iv) $(5+4i)^2 - (4-3i)^2$.

(v) $(5+i\sqrt{6})(3-i\sqrt{8})(4+i\sqrt{5})$. (vi) $(-1+i\sqrt{3})^3$.

3. By plotting in a graph paper, perform the addition and subtraction :

(i) $(2+3i)+(3+2i)$. (ii) $(-5+7i)+(3-4i)$.

(iii) $(4+3i)+(-7-5i)$. (iv) $(6+7i)+(7-8i)$.

4. (i) $(9+13i)-(7+11i)$. (ii) $(7+12i)-(10+5i)$.

(iii) $(9-10i)-(12+7i)$. (iv) $(4-15i)-(2-8i)$.

5. Express in the form of $A+iB$:

(i) $(7-3i)(-3+4i)$. (ii) $\dfrac{3+4i}{5-7i}$.

(iii) $\dfrac{(8+3i)(4+5i)}{(2+7i)(9-5i)}$. (iv) $\dfrac{(2+7i)(3+5i)}{(2+7i)+(3+5i)}$.

(v) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$. (vi) $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$.

(vii) $\dfrac{x+iy}{x-iy}-\dfrac{x-iy}{x+iy}$. (viii) $\dfrac{a+bi+ci^2+di^3}{a-bi-ci^2+di^3}$.

(ix) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{3+2i}{2-5i}-\dfrac{3-2i}{2+5i}\right]$. (x) $\dfrac{1}{(1-i)^3}$.

6. Express with a rational denominator :

(i) $\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}}$. (ii) $\dfrac{1}{2\sqrt{-5}-5\sqrt{2}}$. (iii) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{-7}}{\sqrt{5}+i\sqrt{5}}$.

(iv) $\dfrac{12}{3+i\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$. (v) $\dfrac{(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(i\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{5}}$.

7. Find the square roots of :

(i) $4i$. (ii) $4+3i$. (iii) $21-20i$.

(iv) $-8+8\sqrt{-8}$. (v) $23-i12\sqrt{3}$. (vi) $\sqrt{3}-i$.

(vii) $2-2i\sqrt{15}$. (viii) $\sqrt{28}+i\sqrt{147}$.

(ix) $(2+2\sqrt{15})+i\sqrt{2}(6+2\sqrt{15})$. (x) $\dfrac{107}{36}+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

8. (i) $a^2-1+2ia$. (ii) $x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$.

(iii) $y+i\sqrt{x^2-y^2}$. (iv) $a+\sqrt{a^2-1}$ [$a<1$].

(v) $a^2+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{4}{i}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-2$.

(vi) $x^2+8x-3+2i\sqrt{2x^2-3x-2}$.

(vii) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+i\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{9}{4}$.

9. Determine the modulus and if possible amplitudes of :

(i) $3+4i$. (ii) $12-5i$. (iii) $-7+24i$.

(iv) $-13-12i$. (v) $-19+i10\sqrt{6}$.

10. (i) $(2+i)(3+i)$. (ii) $(2+i)(5+i)(8+i)$.

(iii) $\dfrac{3+4i}{12+5i}$. (iv) $\dfrac{119+120i}{239+i}$.

(v) $\dfrac{(3+i)(1+2i)}{(2-i)(2+3i)}$. (vi) $\dfrac{(8+6i)(-1-5i)}{(8+6i)+(-1-5i)}$.

(vii) $\dfrac{2+3i}{3-5i}-\dfrac{2-3i}{3+5i}$. (viii) $\dfrac{c+id}{c-id}-\dfrac{c-id}{c+id}$.

[একাদশ শ্রেণীতে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক (Inverse Circular Function) পঠন শেষ হইবার পর ছাত্রগণ Ex. 9 ও 10-র শুদ্ধমানের সহিত যুক্তি ও নির্ণয় করিতে সক্ষম হইবে। উত্তরমালায় নির্ণিত যুক্তি গুলি দেওয়া হইল।]

11. Find only the modulus of :

(i) $\dfrac{(1+3i)(1+4i)(1+5i)}{(2+3i)(6+7i)}$. (ii) $(1-3i)^2(3+4i)^3$.

(iii) $\dfrac{(2+3i)^2}{(8-i)^3}$. (iv) $\dfrac{(2+3i)(3-2\sqrt{2}i)}{(5+i)(5-3i)}$.

12. Simplify :

(i) $(4+3i)^{\frac{1}{2}}+(4-3i)^{\frac{1}{2}}$. (ii) $(4+3i\sqrt{20})^{\frac{1}{2}}-(4-3i\sqrt{20})^{\frac{1}{2}}$.

(iii) $\dfrac{i^{\frac{1}{2}}+(-i)^{\frac{1}{2}}}{i^{\frac{1}{2}}+(-i)^{-\frac{1}{2}}}$. (iv) $\dfrac{(x+i)^3-(x-i)^3}{(x+i)^2-(x-i)^2}$.

(v) $\left(\dfrac{4+3i}{3-2i}\right)^3+\left(\dfrac{4-3i}{3+2i}\right)^3$.

13. Show that

$$(a^2+ib^2)(a^2-ib^2)=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2).$$

14. If $x=3+2i$, show that $x^4-4x^3+4x^2+8x+39=0$.

15. If $x=3-2i$, $y=3+2i$, show that $x^2+xy+y^2=23$.

16. If $x=\frac{2a}{a^2+1}$, find the value of

$$\frac{\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}.$$

17. Prove the following quantities

(i) If $(a-ib)(c-id)=x-iy$, then

$$(a+ib)(c+id)=x+iy.$$

(ii) $\frac{a-ib}{c-id}=x-iy$, then $\frac{a+ib}{c+id}=x+iy$.

(iii) $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ then, $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$.

18. Show that a real values of x will satisfy the equation

$$\frac{1+ix}{1-ix}=a+ib \text{ if } a^2+b^2=1.$$

19. If $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$, then shew that

$$4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}.$$

20. Find the fourth roots of :

(i) $(-7+24i)$. (ii) i. (iii) $120-119i$.

21. Express as the sum of two squares

(i) $(1+x^2)(1+y^2)$. (ii) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)$.

22. Find the value of

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{19}+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{20}.$$

23. If $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, then find the value of

$$2\alpha(1+2\alpha)^3(1+2\alpha+3\alpha^2)^4.$$

24. If ω is a cube root of unity, show that

(i) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

(ii) $(1-\omega+\omega^2)^4+(1+\omega-\omega^2)^4=-16$.

(iii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9.$

(iv) $\dfrac{x+\omega y+\omega^2 z}{y+\omega z+\omega^2 x}=\omega.$

(v) $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy.$

25. Resolve into linear factor

(i) $x^3+y^3.$ (ii) $x^3-y^3.$

(iii) $a^2-ab+b^2.$ (iv) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$

26. Prove that

$$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$$
$$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$$
$$=27abc, \text{ if } a+b+c=0.$$

27. If $x=a+b$, $y=a+b\omega$, $z=a+b\omega^2$, show that

$$x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3).$$

28. Prove if $x+y+z=xyz$, then $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ is a perfect square.

29. Show that

$$(x+y\omega+z\omega^2)^2+(x\omega+y\omega^2+z)^2+(x\omega^2+y+z\omega)^2=0.$$

30. Prove that $(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$, where $X=x^2+2yz$, $Y=y^2+2zx$, $Z=z^2+2xy$.

31. Prove that if $a+b+c=0$ where, $a=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$, $b=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$, $c=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$, then

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

32. If $x=\cos\theta+i\sin\theta$ and $1+\sqrt{1-a^2}=na$, prove that

$$1+a\cos\theta=\frac{a}{2n}\left(1+nx\right)\left(1+\frac{n}{x}\right).$$

33. Plot the following points in a graph paper and show that the following points are the vertices of a triangle

(i) $1+3i$, $-7+6i$ and $5-i$;

(ii) $1+i$, $5-i$, $2+3i$;

(iii) $2i$ $3+5i$ $-3-i$.

34. By plotting or otherwise show that the following points form a parallelogram,

$$2-i, \quad 2i, \quad 2+3i, \quad 4.$$

35. By plotting or otherwise, show that the points $-2+3i$, $6+7i$, $8-3i$ are the vertices of a right-angled triangle.

36. Use graph paper or from the argument of the complex numbers show that the following points are collinear.

(i) $-1+3i, \quad 2+9i, \quad -3-i$;

(ii) $1+4i, \quad 3-2i, \quad -3+16i$;

(iii) $1+\frac{1}{3}i, \; 2+\frac{5}{3}i, \; 5-\frac{i}{3}$;

(iv) $a+(b+c)i, \quad b+(c+a)i, \quad c+(a+b)i.$

[জটিল রাশির যুক্তির সাহায্যে Ex. 35 সমাধান একাদশ শ্রেণীতে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক (Invere Circular Function) শেষ হইবার পর করা যাইতে পারে।]

37. Use a graph paper, or from the modulus show that the following points are concyclic.

(i) $3+4i, \quad -3+4i, \quad -3-4i, \quad 3-4i$, centre origin

(ii) $3-4i, \; 4-i, \; 2-2i$, centre $\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}$.

(iii) $2-i, \; 2+3i, 4-i$ centre $3+i$.

(iv) $3+2i, \; 1+4i, \quad 3+4i, \; 1+2i$, centre $2+3i$.

38. If $x : y = a+ib : c+id$, show that

$$(c^2+d^2)\,x^2 - 2(ac+bd)\,xy + (a^2+b^2)y^2 = 0.$$

39. Show that $\sqrt{[-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-\cdots+\infty]}}}} = \omega$ or ω^2.

40. If $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, show that

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n$.

(ii) $(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = 2^n$.

41. What is meant by the amplitude of a complex number ? Express the amplitudes of the complex numbers $a-ib$, $-a+ib$, $-a-ib$ in terms of the amplitudes of $a+$ib.

[C. U. 1959 Comp]

42. Solve.

(i) $x^2-8x+25=0.$

(ii) $4x^3+3x-7=0.$

(iii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120.$

(iv) $(1+i)x^2-(7+13i)x+2+60i=0.$

(v) $x^2+y^2=z^2,\ xyz=780,\ x+y+z=30.$

ANSWERS

1. (i) $\sqrt{3}\,(1-i)$. (ii) $2\sqrt{3}\,(10+i)$. **2.** (i) $78+\sqrt{-15}$.

(ii) $\sqrt{2}\,(\sqrt{5}-3)+i\sqrt{6}(1+\sqrt{5})$. (iii) $-5+3i$.

(iv) $2(1+32i)$ (v) $[252-3\sqrt{30}-5\sqrt{40}]+i\,[63\sqrt{5}-12\sqrt{6}-20\sqrt{8}]$

(vi) 8. **5.** (i) $-9+37i$. (ii) $\frac{13+41i}{74}$.

(iii) $\frac{69+35i}{106}$. (iv) $\frac{227+503i}{169}$. (v) $-1+i$ (vi) $\frac{4}{7}-i\frac{\sqrt{6}}{14}$.

(vii) $0+\frac{4xyi}{x^2+y^2}$. (viii) $\frac{\{a^2+b^2-c^2-d^2\}+2i\{ab-cd\}}{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

(ix) $0+\frac{19}{29}i$. (x) $-\frac{1-i}{4}$. **6.** (i) $\frac{2-i\sqrt{3}}{7}$.

(ii) $-\frac{5\sqrt{2}+2i\sqrt{5}}{120}$. (iii) $-i\frac{\sqrt{35}}{5}$.

(iv) $\frac{2-2\sqrt{2}-i\sqrt{7}(2+\sqrt{2})}{2}$

(v) $\frac{(8\sqrt{2}+18\sqrt{3})+i(112\sqrt{5}-30\sqrt{30})}{76}$.

[Ex 7, 8 '±' চিহ্ন বসাইয়া লইতে হইবে]

7. (i) $\sqrt{2}(1+i)$. (ii) $\frac{3+i}{\sqrt{2}}$. (iii) $5-2i$.

(iv) $2\sqrt{2}(1+i\sqrt{2})$. (v) $3\sqrt{3}-2i$. (vi) $\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)-i(\sqrt{3}-1)]$.

(vii) $(\sqrt{5}+i\sqrt{3})$. (viii) $\sqrt[4]{7}\,[\sqrt{\tfrac{7}{2}}+i\sqrt{\tfrac{3}{2}}]$. (ix) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+i\sqrt{6}$

(x) $\sqrt{3}-\frac{i}{36}$. **8.** (i) $a+i$.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{x^2+x+1}+i\sqrt{x^2-x+1}\}$.

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+y)+i(x-y)\}$. (iv) $(2x+1)+i(x-2)$.

(v) $a+\frac{1}{a}+2i$. (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a})$.

(vii) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+\frac{i}{2}\right)$. **9.** (i) $5, \tan^{-1}\frac{4}{3}$.

(ii) $13, -\tan^{-1}\frac{5}{12}$. (iii) $25, \pi-\tan^{-1}\frac{24}{7}$ (iv) $\sqrt{313}, \pi+\tan^{-1}\frac{12}{13}$.

(v) $31, \pi-\tan^{-1}\frac{10\sqrt{6}}{9}$. **10.** (i) $5\sqrt{2}, 45°$. (ii) $65\sqrt{2}, 45°$.

(iii) $\frac{5}{13}, \tan^{-1}\frac{33}{56}$. (iv) $\frac{169}{\sqrt{(239)^2+1}}, 45°$.

(v) $\sqrt{\frac{10}{13}}, \tan^{-1}\frac{9}{7}$. (vi) $2\sqrt{13}, -\tan^{-1}\frac{86}{27}$.

(vii) $\frac{9}{17}$; 0. (viii) $\frac{4icd}{c^2+d^2}, \frac{\pi}{2}$. **11.** (i) 2,

(ii) 1250. (iii) $\frac{1}{\sqrt{13}}$. (iv) $\frac{1}{2}$. **12.** (i) $\pm 3\sqrt{2}$.

(ii) $\pm 2i\sqrt{5}$. (iii) 1. (iv) $\frac{3x^2-1}{2x}$. (v) $\frac{1302}{2197}$.

16. $\frac{2a}{a^2+1}-i\frac{a^2-1}{a^2+1}$. **20.** (i) $\pm(2+i)\pm(2i-1)$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+i\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$. (iii) $\pm(3+2i), \pm(3i-2)$.

21. (i) $(1-xy)^2+(x+y)^2$.

(ii) $\{(ac-bd)e-(ad+bc)f\}^2+(ac-bd)f+\{(ad+bc)e\}^2$

22. -1. **23.** $i\sqrt{3}$. **25.** (i) $(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$.

(ii) $(x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$. (iii) $(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$.

(iv) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

41. If $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$, then, $-\theta, \pi-\theta, \pi+\theta$. **42.** (i) $4\pm 3i$.

(ii) $1, 4\omega, 4\omega^2$. (iii) $-1, 6, \frac{5\pm i\sqrt{39}}{2}$

(iv) $7-2i, 3+5i$.

(v) $\left.\begin{array}{l}x=12\\y=5\\z=13\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=14+i\sqrt{194}\\y=14-i\sqrt{194}\\z=2\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=14-i\sqrt{194}\\y=14+i\sqrt{194}\\z=2\end{array}\right\}$

সপ্তদশ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালাতত্ত্ব

(Theory of Quadratic Equations and Expressions)

17·1. এক অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট প্রত্যেক দ্বিঘাত সমীকরণ প্রয়োজনীয় সরলকরণান্তে $ax^2+bx+c=0$, এই আকারে পরিণত করা যায়। সাধারণ আকারের এই সমীকরণের বীজের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ, তথা রাশিমালা-সংক্রান্ত নানাবিধ বিষয় এই অধ্যায়ে পর্যালোচিত হইবে। পূর্বেই প্রদর্শিত হইয়াছে এই সমীকরণের দুইটি বীজ। এখন প্রমাণ করা হইবে

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইয়ের অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

(A quadratic equation cannot have more than two roots.)

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির, যদি সম্ভব হয়, তিনটি বিভিন্ন বীজ α, β, γ আছে।

যেহেতু α, β, γ সমীকরণটির বীজ, ইহাদের প্রত্যেকটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে। [বিভাজ্যতা-বিষয়ক উপপাদ্য § 1·3 দ্রষ্টব্য]

স্থতরাং, $a\alpha^2+b\alpha+c=0.$ ... ... (i)

$a\beta^2+b\beta+c=0.$ ... ... (ii)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0.$ ... ... (iii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া আমরা পাই

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0, \text{ বা, } (\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$$

$\therefore\ a(\alpha+\beta)+b=0$ [$\because$ α, β বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\beta\neq 0$. ... (iv)

অনুরূপভাবে (ii) ও (iii) হইতে আমরা পাই $a(\beta+\gamma)+b=0$ ... (v)

$\therefore$ (iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া, $a(\alpha-\gamma)=0$ ... (vi)

কিন্তু ইহা অসম্ভব, যেহেতু $a\neq 0$ এবং α, γ বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\gamma\neq 0$.

অতএব, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইয়ের অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি ধরা যায় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি x-এর তিনটি বিভিন্ন মান α, β, γ দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে উপরের (vi) হইতে দেখ $a=0$.

যেহেতু $\alpha-\gamma \neq 0$, এবং (iv) ও (iii) হইতে যথাক্রমে $b=0$ এবং $c=0$. অতএব, সমীকরণটি $0.x^2+0.x+0=0$-তে পরিণত হয়। এবং xএর যে-কোন মান দ্বারা সিদ্ধ বলিয়া ইহা একটি **অভেদ** (Identities). সুতরাং, ইহা হইতে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হই

যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণ অজ্ঞাত রাশির দুইয়ের অধিক মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে সমীকরণটি একটি অভেদ।

বিপরীতক্রমে, $Ax^2+Bx+C=0$ যদি একটি অভেদ হয় অর্থাৎ xএর তিনটি বা ততোধিক মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে $A=0$, $B=0$, $C=0$.

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে বাস্তব, কাল্পনিক, মূলদ, অমূলদ রাশি লইয়া সবিশেষ আলোচনা করা হইয়াছে। দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ-সংক্রান্ত আলোচনায় দেখা যাইবে যে, সাধারণভাবে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, বাস্তব, অথবা জটিল রাশি হইবে, এমনকি সমীকরণের সহগগুলি মূলদ বাস্তব হইলেও বীজদ্বয় জটিলও হইতে পারে। পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে সেই সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করা হইল।

Ex. *Prove that*

$$\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$$

ইহা xএর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহার উভয় পক্ষে xএর তিনটি বিভিন্ন মান a, b, c, xএর পরিবর্তে বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় বলিয়া ইহা xএর যে-কোন মানে সিদ্ধ হইবে। সুতরাং, ইহা একটি অভেদ। উপরোক্ত অনুসিদ্ধান্ত-অনুসারে প্রদত্ত সমীকরণটিকে যদি $Ax^2+Bx+C=0$ লেখা হয়, তবে দেখা যাইবে $A=0$, $B=0$, $C=0$. ছাত্রগণকে ইহার যথার্থ বিচার করিতে বলা হইতেছে।

17·2. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বা ধর্ম (Nature of the roots of a quadratic)।

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব এবং মূলদ) এর বীজদ্বয় $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

বীজদ্বয়ের এই আকার হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্থির করা সম্ভব।

(1) b^2-4ac ধনাত্মক হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং অসমান হইবে ;

(2) b^2-4ac পূর্ণবর্গ হইলে, বীজ দুইটি মূলদ এবং অসমান হইবে ;

(3) b^2-4ac শূন্য হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং সমান হইবে ;

এবং (4) b^2-4ac ঋণাত্মক হইলে, বীজ দুইটি অবাস্তব এবং অসমান হইবে।

অর্থাৎ, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান না করিয়া শুধু মাত্র b^2-4ac হইতে আমরা বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করিতে পারি বলিয়া b^2-4ac রাশিমালাকে দ্বিঘাত সমীকরণের **বীজ-নিরূপক** (discriminant) বা নিরূপক বলা হয়।

Ex. 1. *Show that the equation* $3x^2-7x+5=0$ *cannot be satisfied by any real values of* x.

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সহিত তুলনা করিলে $a=3$, $b=-7$ এবং $c=5$.

$\therefore$ নিরূপক b^2-4ac এক্ষেত্রে $=(-7)^2-4.3.5=49-60=-11.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব।

$\therefore$ এই সমীকরণের কোন বাস্তব বীজ নাই।

Ex. 2. *Prove that the equation* $5px^2+(4p+5q)x+4q=0$ *has rational roots.*

প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ হইবে যদি ইহার নিরূপক পূর্ণবর্গ হয়। এখন, এই সমীকরণের নিরূপক $=(4p+5q)^2-4.5p.4q$

$$=16p^2+40pq+25q^2-80pq$$
$$=16p^2-40pq+25q^2$$
$$=(4p-5q)^2.$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

Ex. 3. *For what values of* k *will the equation* $2a^2x^2-5kx+8=0$ *have equal roots?*

প্রদত্ত সমীকরণের নিরূপক 0 হইলে বীজদ্বয় সমান হইবে। এই সমীকরণের নিরূপক $25k^2-4.2a^2.8=25k^2-64a^2$.

$\therefore$ $25k^2-64a^2=0$ অর্থাৎ $k=\pm\frac{8}{5}a$ হইলে প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

17·3. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সহিত সহগগুলির সম্বন্ধ (Relation between roots and coefficients) ।

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় যদি α, β হয়, তবে সমাধান করিয়া

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}. \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং
$$\alpha.\beta=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

আবার, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটিকে $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ আকারেও লিখিলে,

উপরের (i) ও (ii) লব্ধ ফল হইতে আমরা লিখিতে পারি, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 এর সহগ একক হইলে ইহার

(a) বীজদ্বয়ের সমষ্টি, সমীকরণের x এর সহগের সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ;

(b) বীজদ্বয়ের গুণফল, সমীকরণের x-নিরপেক্ষ পদের (absolute term) সমান হইবে।

বিপরীতক্রমে, যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল যথাক্রমে p এবং q হয়, তবে উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে সমীকরণটি $x^2-px+q=0$ হইবে।

দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত বীজদ্বয় হইতে সমীকরণটি গঠন।

মনে কর, α, β নির্ণেয় সমীকরণের প্রদত্ত বীজ এবং নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2+px+q=0$.

$\therefore \quad \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ [p, q মান বসাইয়া]

বা, $(x-\alpha)(x-\beta)=0$.

$\therefore$ যে-কোন দ্বিঘাত সমীকরণ নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে
$x^2-(\text{বীজদ্বয়ের সমষ্টি})\times x+\text{বীজদ্বয়ের গুণফল}=0.$

সুতরাং, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটি দেওয়া থাকিলে আমরা সহজেই সমীকরণটি নির্ণয় করিতে পারি।

Ex. 1. *Find the condition that the roots of* $ax^2+bx+c=0$ *may be (i) both positive, (ii) opposite, but the greater of them negative.*

α, β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ হইলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

(i) উভয় বীজ ধনাত্মক হইলে, α, β উভয়েই ধনাত্মক হইবে, $\therefore$ c এবং a একই চিহ্নযুক্ত হইবে। আবার, $\alpha+\beta$ ধনাত্মক বলিয়া $\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইবে, $\therefore$ b এবং a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore$ উভয় বীজ ধনাত্মক হইলে a এবং c একই চিহ্নযুক্ত, কিন্তু b এর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

(ii) বীজদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে, $\alpha\beta$ ঋণাত্মক হইবে, $\therefore$ c এবং a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

আবার, বৃহত্তর বীজ ঋণাত্মক বলিয়া $\alpha+\beta$ ঋণাত্মক হইবে, $\therefore$ $\frac{b}{a}$ ধনাত্মক হইবে এবং b ও a একই চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

$\therefore$ বীজদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং বৃহত্তরটি ঋণাত্মক হইলে, a, b এক চিহ্ন এবং c এর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

Ex. 2. *Find the condition that the roots of the equation* $ax^2+bx+c=0$ *should be (i) equal in magnitude and opposite in sign, (ii) reciprocals.*

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α, β.

(i) বীজ দুইটি সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে $\alpha+\beta=0$,

$\therefore\ -\frac{b}{a}=0$, বা, $b=0$.

$\therefore$ বীজদ্বয় সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে $b=0$ হইবে।

আবার, বীজদ্বয়ের একটি অপরটির অন্যোন্যক হইলে, উহাদের গুণফল 1 হইবে অর্থাৎ $\alpha\beta=1$ হইবে।

অতএব, $\frac{c}{a}=1$, বা, $c=a$.

$\therefore$ বীজদ্বয় পরস্পর অন্যোন্যক হইলে $a=c$ হইবে।

17·4. দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c র গুণনীয়ক নির্ণয় (To determine the factors of Quadratic expression ax^2+bx+c)।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় যথাক্রমে α ও β.

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\text{এখন } ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

দ্রষ্টব্য। ছাত্রগণকে দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালার মধ্যে পার্থক্যটুকু অনুধাবন করিতে বলা হইতেছে। স্পষ্টতঃই দ্বিঘাত সমীকরণে xএর মাত্র দুইটি মান সম্ভব, কিন্তু দ্বিঘাত রাশিমালায় x এর যে-কোন মান লওয়া সম্ভব।

অনুসিদ্ধান্ত। § 17·2-তে বীজ-নিরূপকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করা হইয়াছে। দ্বিঘাত রাশিমালার গুণনীয়কগুলির প্রকৃতিও সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতির উপর নির্ভর করিবে। যেমন, গুণনীয়ক-গুলি (*a*) মূলদ হইবে যদি b^2-4ac, ধনাত্মক পূর্ণবর্গ হয়, এবং a, b, c মূলদ হয়; (*b*) বাস্তব ও অমূলদ হইবে যদি b^2-4ac ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ না হয়; (*c*) জটিল হইবে যদি b^2-4ac ঋণাত্মক হয়; (*d*) বাস্তব এবং সমান হইবে যদি $b^2-4ac=0$ হয়; অর্থাৎ সেই ক্ষেত্রে ax^2+bx+c রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

17·5. দ্বিঘাত সমীকরণের সহগ সাহায্যে উহার বীজদ্বয়-সম্বলিত প্রতিসম রাশিমালার মান নির্ণয়।

দুই রাশি-সম্বলিত কোন রাশিমালাতে রাশিদ্বয়ের একের পরিবর্তে অপরটি লিখিলে যদি রাশিমালার আকার অপরিবর্তিত থাকে তবে রাশিমালাটিকে ঐ

দুই রাশির প্রতিসম (symmetrical) রাশিমালা বলা হয়। যথা, $\alpha^3+\beta^3$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{1}{a\alpha+b}+\frac{1}{a\beta+b}$ প্রভৃতি রাশিমালা α, β রাশিদ্বয়ের প্রতিসম রাশিমালা।

17·3 অনুচ্ছেদ অনুসারে কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল উক্ত সমীকরণের সহগ সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এখানে বীজদ্বয়-সম্বলিত কয়েকটি প্রতিসম রাশিমালার মান সমীকরণের সহগ সাহায্যে নির্ণয়-পদ্ধতি প্রদর্শিত হইবে।

Ex. 1. *If* α, β *be the roots of* $ax^2+bx+c=0$, *find the value of*

(i) $\alpha^2+\beta^2$, (ii) $\alpha^3+\beta^3$, (iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ *and*

(iv) $\frac{1}{(a\alpha+b)^2}+\frac{1}{(a\beta+b)^2}$.

যেহেতু, α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ,

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

সুতরাং, (i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{b^3}{a^3}-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$

$$=\frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

(iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}{(\alpha\beta)^2}$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}.$$

(iv) $\because\ \alpha$, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ,

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$, বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$,

বা, $a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$.

অনুরূপভাবে, $a\beta + b = -\frac{c}{\beta}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{(a\beta+b)^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{a^2}} + \frac{1}{\frac{c^2}{\beta^2}} = \frac{a^2+\beta^2}{c^2} = \frac{(a+\beta)^2 - 2a\beta}{c^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}.$$

17·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If a, β be the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the equation whose roots are $\frac{a}{\beta}$, $\frac{\beta}{a}$.*

যেহেতু, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় a, β.

$\therefore \quad a+\beta = -p$ এবং $a\beta = q$

এক্ষণে, $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} = \frac{a^2+\beta^2}{a\beta} = \frac{p^2-2q}{q}$ এবং $\frac{a}{\beta}\cdot\frac{\beta}{a} = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি

$$x^2 - \frac{p^2-2q}{q}\cdot x + 1 = 0,$$

বা, $qx^2 - (p^2-2q)x + q = 0$.

Ex. 2. *Find the equation whose roots are $\frac{p+q}{p-q}$ and $-\frac{p-q}{p+q}$.*

নির্ণেয় সমীকরণের বীজ-সমষ্টি $= \frac{p+q}{p-q} - \frac{p-q}{p+q} = \frac{4pq}{p^2-q^2}$,

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= -1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2 - \frac{4pq}{p^2-q^2}x - 1 = 0$,

বা, $(p^2-q^2)x^2 - 4pqx + q^2 - p^2 = 0$.

Ex. 3. *If a, β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find the value of (i) $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{\beta^3}$ and (ii) $(ma-n\beta)(na-m\beta)$.*

যেহেতু, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি α, β.

$\therefore \quad \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$,

সুতরাং, (i) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}$

$$=\frac{-\dfrac{b^3}{a^3}-3\dfrac{c}{a}\left(-\dfrac{b}{a}\right)}{\dfrac{c^3}{a^3}}=\frac{3abc-b^3}{a^3c^3}.$$

এবং (ii) $(m\alpha-n\beta)(n\alpha-m\beta)=mn\alpha^2+mn\beta^2-m^2\alpha\beta-n^2\alpha\beta$

$$=mn(\alpha^2+\beta^2)-(m^2+n^2)\alpha\beta=mn\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)-\left(m^2+n^2\right)\cdot\frac{c}{a}$$

$$=\frac{mn}{a^2}\left(b^2-2ac\right)-\frac{c}{a}\left(m^2+n^2\right)=\frac{mnb^2-ac(m+n)^2}{a^2}.$$

Ex. 4. *The roots of the equation $px^2+qx+r=0$ are in the ratio of $m:n$; prove that $q^2=pr\,(m+n)(m^{-1}+n^{-1})$.*

মনে কর, $px^2+qx+r=0$ সমীকরণটির বীজ α, β এবং $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{m}{n}$.

$\therefore \quad n\alpha=m\beta$, বা, $\alpha=\dfrac{m}{n}\beta$.

এক্ষণে, $\alpha+\beta=-\dfrac{q}{p}$ বা $\dfrac{m}{n}\beta+\beta=-\dfrac{q}{p}$ বা $\beta\dfrac{m+n}{n}=-\dfrac{q}{p}$.

$\therefore \quad \beta=-\dfrac{qn}{p(m+n)}$. ... ... (1)

এবং $\alpha\beta=\dfrac{r}{p}$, বা $\dfrac{m}{n}\beta^2=\dfrac{r}{p}$, বা $\beta^2=\dfrac{rn}{pm}$. ... ... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $\dfrac{q^2n^2}{p^2(m+n)^2}=\dfrac{rn}{pm}$,

বা, $q^2=\dfrac{pr(m+n)^2}{mn}=pr\,(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$

Ex. 5. *Find the value of the expression* $4x^3+12x^2-27x+15$ *when* $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$ *and show that it will remain unaltered if* $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ *be substituted for x.*

প্রথমে যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{2\pm 3\sqrt{-1}}{2}$ তাহা নির্ণয় কর।

বীজ-সমষ্টি $=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}+\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}=2,$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}=\frac{2^2+3^3}{4}=\frac{13}{4}.$

$\therefore$ সমীকরণটি $x^2-2x+\frac{13}{4}=0$, বা, $4x^2-8x+13=0.$

$\therefore$ $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$ অথবা $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ হইলে, $4x^2-8x+13=0.$

এখন, $4x^3+12x^2-27x+15$

$$=x(4x^2-8x+13)+5x(4x^2-8x+13)-50$$

$$=x\times 0+5\times 0-50=-50.$$

$\therefore$ $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$, বা, $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ হইলে উভয় ক্ষেত্রেই প্রদত্ত রাশিমালার সাংখ্যমান -50.

Ex. 6. *Show that no other real values of x and y than 4 can satisfy the equation* $x^2-xy+y^2-4x-4y+16=0.$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে আমরা নিম্নের মত x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখিতে পারি।

$$x^2+x(y+4)+(y^2-4y+16)=0.$$

এই সমীকরণে x বাস্তব হইলে $\{-(y+4)\}^2-4(y^2-4y+16)\geqslant 0,$

বা, $-3(y^2-8y+16)\geqslant 0$, বা, $-3(y-4)^2\geqslant 0.$

কিন্তু $(y-4)^2$ সতত ধনাত্মক, $\therefore$ $-3(y-4)^2=0$ ব্যতীত অন্য কোনও ধনাত্মক সংখ্যা হইতে পারে না। $\therefore$ $y=4.$

অনুরূপভাবে, প্রদত্ত সমীকরণটিকে y-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখিয়া y বাস্তব হইবার শর্ত হইতে পাই $-3(x-4)^2 \geqslant 0$.

অনুরূপভাবে, $x=4$.

Ex. 7. *If one root of the equation $x^2-px+q=0$ be double of the other, show that $2p^2=9q$.*

মনে কর, $x^2-px+q=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α, β এবং $\alpha=2\beta$.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=p, \text{ বা, } 2\beta+\beta=p, \text{ বা, } 3\beta=p, \text{ বা, } \beta=\frac{p}{3} \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } \alpha\beta=q, \text{ বা, } 2\beta^2=q, \text{ বা, } \beta^2=\frac{q}{2}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

$$\therefore \quad (1) \text{ এবং } (2) \text{ হইতে, } \left(\frac{p}{3}\right)^2=\frac{q}{2} \text{ বা } \frac{p^2}{9}=\frac{q}{2}.$$

$$\therefore \quad 2p^2=9q.$$

Ex. 8. *If r be the ratio of the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that $\dfrac{(r+1)^2}{r}=\dfrac{b^2}{ac}$.*

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α, β এবং $\alpha:\beta=r:1$ অর্থাৎ $\alpha=r\beta$.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ বা } r\beta+\beta=-\frac{b}{a} \text{ বা } \beta(r+1)=-\frac{b}{a}.$$

$$\therefore \quad \beta==\frac{b}{a(r+1)} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a} \text{ বা } r\beta^2=\frac{c}{a} \text{ বা } \beta^2=\frac{c}{ar}.$$

$$\therefore \quad \frac{c}{ar}=\beta^2=\frac{b^2}{a^2(r+1)^2}, \text{ বা, } \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}.$$

Ex. 9. *If α, β are the roots of $x^2+px+1=0$ and γ, δ are the roots of $x^2+qx+1=0$, show that*

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

যেহেতু, α, β এবং γ, δ যথাক্রমে $x^2+px+1=0$ এবং $x^2+qx+1=0$ সমীকরণ দুইটির বীজ, $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=1$ এবং $\gamma+\delta=-q$, $\gamma\delta=1$.

এক্ষণে, $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

$$=\{\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2\}\{\alpha\beta+\delta(\alpha+\beta)+\delta^2\}$$

$$=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2) \quad [\because \alpha+\beta=-p]$$

$$=1+p(\gamma-\delta)+(\gamma^2+\delta^2)-p^2\gamma\delta-p\gamma\delta(\gamma-\delta)+\gamma^2\delta^2$$

$$=1+p(\gamma-\delta)+q^2-2-p^2-p(\gamma-\delta)+1 \quad [\because \gamma\delta=1]$$

$$=q^2-p^2.$$

Ex. 10. *If one of the roots of $x^2+px+q=0$ is the square of the other, show that $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.*

মনে কর, β^2, β প্রদত্ত সমীকরণ $x^2+px+q=0$ এর বীজ।

$\therefore \quad \beta^2+\beta=-p \quad \cdots \quad$ (i) এবং $\beta^3=q \quad \cdots \quad$ (ii)

(ii) হইতে, $\beta=q^{\frac{1}{3}}$; β এর এই মান (i) এ বসাইয়া, $q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}}=-p$. উভয় পক্ষের ঘন করিয়া

$$q^2+q+3q^{\frac{2}{3}}.q^{\frac{1}{3}}(q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}})=-p^3.$$

বা, $\quad p^3+q^2-3qp+q=0, \qquad [\therefore\ q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}}=-p]$

বা, $\quad p^3-q(3p-1)+q^2=0.$

Ex. 11. *If α is not equal to β, but $\alpha^2=5\alpha-3$ and $\beta^2=5\beta-3$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$.*

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\alpha^2-5\alpha+3=0, \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\beta^2-5\beta+3=0. \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

যেহেতু $\alpha \neq \beta$, (i) এবং (ii) হইতে স্পষ্টতই, α, β

$$x^2-5x+3=0. \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণটির বীজদ্বয়।

$\therefore \quad \alpha+\beta=-5$
এবং $\quad \alpha\beta=\ \ 3 \quad \cdots \quad$ (iv)

এক্ষণে যদি $\alpha' = \frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\beta' = \frac{\beta}{\alpha}$ হয়,

তবে, $\alpha' + \beta' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{5^2 - 2.3}{3} = \frac{19}{3};$$

এবং $\alpha'\beta' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0,$

বা, $x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0,$ বা, $3x^2 - 19x + 3 = 0$

Ex. 12. *If the two roots of $ax^2 + bx + c = 0$ be in the ratio $p : q$, prove that* $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0.$

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় α, β.

$\therefore \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$, $\alpha + \beta = -\frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

$\therefore \quad \alpha + \beta + \alpha\beta = -\frac{c}{a} + \frac{c}{a} = 0.$

এক্ষণে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\alpha\beta}$

$$= \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = 0.$$

Examples XVIIA

1. Find the nature of the roots of the following equations without solving them :

(i) $x^2 + 2x = 899.$ (ii) $6x^2 = x + 15.$

(iii) $29x^2 = 842x - 29.$ (iv) $(x+3)^2 = 6x + 19.$

(v) $x^2 + 2x + 2 = 0.$ (vi) $99x^2 + 100x = 101.$

2. (i) Prove that the equation

$$(a+b+c)x^2 - 2(b+c)x - (a-b-c) = 0$$

has always rational roots.

(ii) Show that the equation $a^2x^2+3(ax+1)+4b^2=0$ cannot be satisfied by any real value of x.

3. If a, b, c are rational quantities whose sum is zero, prove that the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ will always be rational.

4. (i) Find for what value of k the equation $3x^2-2(1-3k)x+3k^2=0$ will have equal roots.

(ii) Show that the roots of the equation $(b^2+d^2)x^2+2(ab+cd)x+(a^2+c^2)=0$ are equal, if a, b, c, d be in proportion.

(iii) Show that the roots of the equation

$(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$ will be equal roots, if $b=0$, or $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

(iv) For what value of m will the equation

$$\frac{a}{x+a+m}+\frac{b}{x+b+m}=1$$

have two roots equal in magnitude and opposite in sign ?

5. Prove that each of the following two equations has rational roots (i) $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ and (ii) $3(a+b)x^2-(5b+a)x-2(a-b)=0$.

6. Without solving the equation $3x^2-4x-1=0$ find the sum, the difference, and the sum and the difference of the squares of the roots.

7. Are the following

(i) $(x^2-a)(b-a)+(x^2-b)(a-b)=(a-b)^2$.

(ii) $(x-m)^2+(x-n)^2=x(x-m)+x(x-n)$
$+m(m-x)+n(n-x)$

(iii) $(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)$
$+(x+y-2z)(y+z-2x)$
$=3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}.$

(iv) $2x(y+z-x)+(z+x-y)(x+y-z)$
$=2y(z+x-y)+(x+y-z)(y+z-x)$
$=2z(x+y-z)+(y+z-x)(z+x-y)$
$=(y+z-y)(z+x-y)+(z+x-y)(x+y-z)$
$+(x+y-z)(y+z-x).$

identites ?

8. (*a*) If α, β are the roots of $x^2-px-q=0$, find in terms of p, q the values of the following :

(i) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$. (ii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$. (iii) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$.

(iv) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$. (v) $(\alpha+p)^{-4}+(\beta+p)^{-4}$.

(*b*) If α, β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, find in terms of a, b, c, the values of the following :

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$. (ii) $\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\beta^2}$. (iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

(iv) $\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$. (v) $\dfrac{1}{(a\alpha+b)^3}+\dfrac{1}{(b\beta+b)^3}$.

9. If the roots of the equation $x^2-px+q^2=0$ be real, prove that p cannot lie between $-2q$ and $2q$.

10. If the roots of $x^2+2px+pq=0$ be real and unequal, prove that those of $x^2-2(p+q)x+(p^2+q^2+2r^2)=0$ are imaginary and vice versa.

11. Show that the values of x obtained from the equations $ax^2+by^2=1$ and $ax+by=1$ will be equal if $a-b=1$.

12. The sum of the roots of a quadratic equation is 2 and the sum of their cubes is 27 ; find the equation.

13. For what value of m will the roots of the equation $2x^2 - 14x + m = 0$ bear to each other the ratio 3 : 4 ?

14. If α, β are the roots of $x^2 + ax + b = 0$ and α^2, β^2 are the roots of $x^2 + Ax + B = 0$, prove that $A = 2b - a^2$, $B = b^2$.

15. If α, β are the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, find the equation whose roots are

(i) $\alpha + 1, \beta + 1$; (ii) $\alpha - 2, \beta - 2$; (iii) $3\alpha, 3\beta$;

(iv) $\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}$; (v) $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$; (vi) $\frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2}$;

(vii) $\alpha + 2\beta, \beta + 2\alpha$; (viii) $\alpha^2 + \beta, \beta^2 + \alpha$;

(ix) $\frac{\alpha}{2} - 2\beta, \frac{\beta}{2} - 2\alpha$.

16. If α, β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, find the equation whose roots are

(i) $\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha^{-1}$. (ii) $\alpha + \beta^{-1}$ and $\beta + \alpha^{-1}$.

(iii) $\frac{a\alpha + b}{\beta}, \frac{a\beta + b}{\alpha}$. (iv) $\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta$.

17. If α, β are the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, find he condition that

(i) $\alpha = \beta$. (ii) $\alpha = \frac{1}{\beta}$. (iii) $\alpha = 2\beta$.

(iv) $\alpha - \beta = 2$. (v) $\alpha + \beta = 7$. (vi) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2$.

18. If α, β are the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, find the value of $\alpha^2 + \beta^2$ without solving this equation, and form the equation whose roots are α^2 and β^2 expressing the coefficients in terms of p and q.

Hence, or otherwise, show that each root of the equation $x^2 + x + 1 = 0$ is the square of the other root.

19. (*a*) Express the roots of the equation

$$q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$$

in terms of those of $x^2+px+q=0$.

(*b*) Show that the ratio r of one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ to the other is given by the equation

$$acr^2+(2ac-b^2)r+ac=0.$$

20. Form an equation whose roots are the cubes of the roots of the equation $2x(x-a)=a^2$.

21. Prove that the roots of the equation

$$(a+b)x^2-(a+b+c)x+\frac{c}{2}=0$$

are always real.

22. If one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ be the square of the other, prove that $b^3+a^2c+ac^2=3abc$.

23. If α, β are the roots $x^2-100x+2491=0$, and α, γ are the roots of $x^2+50x-4559=0$, find without solving these equations the values of $\beta-\gamma$ and β/γ.

24. If α, β be the roots of the equation $3x^2-6x+4=0$, find the value of

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta.$$

25. If α, β and α', β' be the roots of $x^2-px+q=0$ and $x^2-p'x+q'=0$ respectively, find the value of

$$(\alpha-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2.$$

26. If the roots of $x^2-px+q=0$ are two consecutive odd or even integers, show that $p^2=4(q+1)$.

27. Find the value of p and the roots of the equation $2x^2-33x+p=0$, given that one root is ten times the other.

28. Prove that the roots of the equation $x^2-4x+3+a(3x-1)=0$ are real for all values of 'a' except those lying between $\frac{2}{9}$ and 2.

29. Form the equation whose roots will be the A.M. and G.M. of the roots of $x^2-px+q=0$.

30. If α, β are the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, prove that $(a\alpha+b)(a\beta+b)=-a^2$ and find the equation whose roots are $a\alpha+b$, $a\beta+b$.

31. If $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ be the roots of the equation $x^2+px+q=0$, prove that $\dfrac{1}{\alpha} \pm \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ will be the roots of

$$(p^2-4q)(p^2x^2+4px)=16q.$$

32. If $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ denote the roots of $x^2-px+q=0$, show that the equation whose roots are $\alpha \pm \beta$ is

$$(p^2-4q)^2(4x-p^2)^2=256.$$

33. If α_1, β_1 be roots of $x^2-px+q=0$ and α_2, β_2 those of $x^2-qx+p=0$, form the equation whose roots are

$$\frac{1}{\alpha_1\beta_2}+\frac{1}{\alpha_2\beta_1} \text{ and } \frac{1}{\alpha\alpha_2}+\frac{1}{\beta\beta_2}.$$

34. If the ratio of the roots of $ax^2+bx+c=0$ be equal to that of the roots of $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, prove that

$$a_1^2 : b_1^2 : : ac : a_1c_1.$$

ANSWERS

1. (i) Rational opposite in sign, the greatest being negative

(ii) " " " " " " " positive.

(iii) " and reciprocal, both roots positive.

(iv) Irrational, but equal and opposite.

(v) Imaginary. (vi) Real, irrational and unequal.

4. (i) $k=\frac{1}{6}$; (iv) 0. 6. $\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{7}, \frac{22}{9}, \frac{8}{9}\sqrt{7}$. 7. yes.

8. (*a*), (i) $\frac{p^3-3pq}{q^3}$. (ii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$. (iii) $\frac{p^3-3pq}{p^2-2pq}$.

(iv) $1+p+p^2-q+pq+q^2$. (v) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.

(*b*), (i) $\frac{b^2-2ac}{ac}$. (ii) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. (iii) $\frac{(b^2-ac)(b^2-3ac)}{a^4}$.

(iv) $-\frac{b(b^2-4ac)(b^2-ac)}{a^4c}$ (v) $\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$.

12. $6x^2-12x-19=0$. 13. 24. 15. (i) $x^2-(p+2)x(p+q+1)=0$.
(ii) $x^2-(p-4)x+(q-2p+1)=0$. (iii) $x^2-3px+9q=0$.
(iv) $16x^2-4px+q=0$. (v) $x^2-\sqrt{p+2\sqrt{q}}x+\sqrt{q}=0$.
(vi) $q^2x^2-(p^3-3pq)x+q^2=0$. (vii) $x^2-3px+2p^2+q=0$.
(viii) $x^2-(p^2+p-2q)x+(p^3-3pq+q^2+q)=0$.
(ix) $4x^2+6px-4p^2+25q=0$.

16. (i) $ac(x+1)^2=b^2x$. (ii) $acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$.
(iii) $(x+a)^2=0$. (iv) $a^2x^2+3abx+2b^2+ca=0$.

17. (i) $p^2=4q$ (ii) $q=1$. (iii) $2p^2=9q$. (iv) $p^2=4(q+1)$.
(v) $p=-7$. (vi) $p+2q=0$. 18. p^2-2q; $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$.

19. (*a*) α^{-2}, β^{-2} α, β being the roots of the latter equation.

20. $8x^2-20a^3x-a^6=0$. 23. $150, -\frac{53}{97}$. 24. 8.

25. $2(p^2+p'^2-pp'-2q-2q')$. 27. $p=45, x=1\frac{1}{2}$ or 15.

29. $x^2-(\frac{1}{2}p+\sqrt{q})x+\frac{1}{2}p\sqrt{q}=0$. 30. $x^2-bx-a^2=0$.

33. $x^2-x+\frac{p^3-4pq+q^3}{p^2q^2}$.

17·7. দুইটি সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$, ও $a'x^2+b'x+c'=0$ র একটি সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত নির্ণয় কর। উক্ত শর্ত পূরণ হইলে সমীকরণ-দ্বয়ের অপর বীজদ্বয়ও নির্ণয় করিতে হইবে।

[Find the condition that the two equations $ax^2+bx+c=0$ and $a'x^2+b'x+c'=0$ may have common root. Assuming that this condition is true, find the common root and the second root of each of the equations.]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α.

$$\therefore \quad a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

$$a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0.$$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা, $\dfrac{\alpha^2}{bc' - b'c} = \dfrac{\alpha}{ca' - c'a} = \dfrac{1}{ab' - a'b}$ .... (1)

বা, $\dfrac{\alpha^2}{bc' - b'c} \cdot \dfrac{1}{ab' - a'b} = \dfrac{\alpha^2}{(ca' - c'a)^2}$.

$\therefore \quad \mathbf{(bc' - b'c)(ab' - a'b) = (ca' - c'a)^2},$ ... (2)

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(1) হইতে, $\alpha = \dfrac{bc' - b'c}{ca' - c'a}$, অথবা, $\dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

$\therefore$ প্রথম সমীকরণের সাধারণ বীজ $\alpha = \dfrac{bc' - b'c}{ca' - c'a}$, অথবা, $\dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

[এই দুই বীজ বিভিন্ন নয়, (2) অনুসারে ইহারা পরস্পর সমান] এবং এই সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $\dfrac{c}{a}$.

$\therefore$ প্রথম সমীকরণের অপর বীজ $\dfrac{c(ca' - ca')}{a(bc' - b'c)}$ বা $\dfrac{c(ab' - a'b)}{a(ca' - c'a)}$.

দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $\dfrac{c'}{a'}$.

$\therefore$ দ্বিতীয় সমীকরণের অপর বীজ $\dfrac{c'(ca' - c'a)}{a'(bc' - b'c)}$ বা $\dfrac{c'(ab' - a'b)}{a'(ca' - c'a)}$.

Ex. 1. *Find the condition that the expressions* $ax^2 + 2hxy + by^2$ *and* $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2$ *may have a common linear factor.*

মনে কর, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের সাধারণ গুণনীয়ক $x - ly$ এবং

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv a(x - ly)(x - my). \quad .... \quad (1)$$

$$\text{ও} \quad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 \equiv a'(x - ly)(x - ny). \quad .... \quad (2)$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ে অর্থাৎ (1) এবং (2) এ $x = ly$ বসাইলে,

$$a(ly)^2 + 2h.ly.y + by^2 \equiv a(ly - ly)(x - my) = 0$$

এবং $$a'(ly)^2 + 2h'.ly.y + b'y^2 \equiv a'(ly - ly)(x - ny) = 0.$$

সরল করিয়া আমরা পাই $al^2 + 2hl + b = 0,$ .... (3)

এবং $a'l^2 + 2h'l + b' = 0.$ .... (4)

(3) এবং (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{l^2}{2(b'h - bh')} = \frac{l}{a'b - ab'} = \frac{1}{2(ah' - a'h)}.$$

$$\therefore \frac{l^2}{(a'b - ab')^2} = \frac{l^2}{2(b'h - bh')} \cdot \frac{1}{2(ah' - a'h)}.$$

$\therefore (a'b - ab')^2 = 4(b'h - bh')(ah' - a'h)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

17·8. § 17·4 দেখিয়াছ যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির বীজ দুইটি α, β হইলে $ax^2 + bx + c$ রাশিমালাকে $a(x - \alpha)(x - \beta)$ আকারে লেখা যায়।

সুতরাং, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হইলে অর্থাৎ সমীকরণের নিরূপক $b^2 - 4ac$ একটি পূর্ণবর্গ হইলে $ax^2 + bx + c$ রাশিমালাকে প্রথম ঘাতের দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

(i) মূলদ সহগবিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি অমূলদ হইলে অপরটিও উহার অনুবন্ধী অমূলদ রাশি হইবে অর্থাৎ একটি $p + \sqrt{q}$ হইলে অপরটি ইহার অনুবন্ধী রাশি $p - \sqrt{q}$ হইবে।

মনে কর, অমূলদ রাশি $p + \sqrt{q}$, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ।

তাহা হইলে, $a(p + \sqrt{q})^2 + b(p + \sqrt{q}) + c = 0,$

বা, $ap^2 + aq + bp + c + \sqrt{q}(2ap + c) = 0.$

যেহেতু, কোন রাশিমালা শূন্য হইলে উহার মূলদ এবং অমূলদ অংশের প্রত্যেকটি পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে।

$\therefore ap^2 + aq + bp + c = 0$ এবং $2ap + b = 0.$ ... (i)

এক্ষণে, $a(p - \sqrt{q})^2 + b(p - \sqrt{q}) + c$

$= ap^2 + aq + bp + c - \sqrt{q}(2ap + b) = 0.$ [(i) এর সাহায্যে]

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের $(p - \sqrt{q})$ও একটি বীজ।

(ii) বাস্তব সহগযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ জটিল রাশি হইলে, উভয় বীজই যুগপৎ জটিল রাশি হইবে—একটি বীজ বাস্তব এবং অপরটি কাল্পনিক হইবে না। দেখা যাইবে, $p+iq$ একটি বীজ হইলে অপরটি ইহার অনুবন্ধী রাশি $p-iq$ হইবে।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি জটিল বীজ $p+iq$. (p, q বাস্তব)

$\therefore\ a(p+iq)^2+b(p+iq)+c=0,$

বা, $ap^2-aq^2+bp+c+iq(2ap+b)=0.$

বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশের প্রত্যেকটি পৃথক্‌ভাবে শূন্য না হইলে উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore\ ap^2-aq^2+bp+c=0$ এবং $2ap+b=0.$

এক্ষণে, $a(p-iq)^2+b(p-iq)+c$

$$=ap^2-aq^2+bp+c-iq(2ap+b)=0-iq0=0.$$

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে $(p-iq)$ও একটি বীজ।

17·9. দ্বিঘাত রাশিমালার মানের চিহ্ন নির্ণয়।

x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান 'a'-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় যদি বাস্তব ও ভিন্ন হয় এবং x-র মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্বর্তী যে-কোন মান হয়, তবে ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান 'a'-র বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

[For all real values of x of the expression ax^2+bx+c has the same sign as a, except when the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ are real and unequal, and x lies between them]

I. মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α, β এবং ধর, $\alpha>\beta$.

তাহা হইলে $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

এক্ষণে x, α অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে $(x > \alpha > \beta)$ $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উৎপাদকদ্বয় উভয়েই ধনাত্মক হইবে ; আর, x যদি β অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় $(\alpha > \beta > x)$ $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে। $\therefore$ উভয় ক্ষেত্রেই উহাদের গুণফল অর্থাৎ $(x-\alpha)(x-\alpha)$ ধনাত্মক হইবে। এবং $a(x-\alpha)(x-\beta)$ অর্থাৎ ax^2+bx+c রাশিমালা a এর চিহ্নবিশিষ্ট হইবে। কিন্তু $\alpha > x > \beta$ হইলে x, α ও β মধ্যবর্তী হইবে, সুতরাং $x-\alpha$ ঋণাত্মক এবং $x-\beta$ ধনাত্মক হইবে এবং ইহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং, $a(x-\alpha)(x-\beta)$ অর্থাৎ ax^2+bx+c রাশিমালা a এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

II. যদি $\alpha=\beta$ হয়, তবে $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$.

এক্ষণে, x এর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে $(x-\alpha)^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া সতত ধনাত্মক।

$\therefore$ ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট।

III. মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় জটিল।

এখন, $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\};$$

কিন্তু বীজদ্বয় জটিল বলিয়া, b^2-4ac ঋণাত্মক অর্থাৎ $4ac-b^2$ ধনাত্মক।

$\therefore$ $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ রাশিমালা x এর সকল মানেই ধনাত্মক।

$\therefore$ ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট।

উপরের অনুচ্ছেদ হইতে সহজেই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, b^2-4ac ঋণাত্মক বা শূন্য হইলে x এর যে-কোন বাস্তব মানে ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট হইবে ; এবং এই শর্ত সিদ্ধ হইলে ax^2+bx+c রাশিমালাটি এবং a যুগপৎ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

বিপরীতক্রমে, ax^2+bx+c সতত ধনাত্মক হইতে হইলে, b^2-4ac অবশ্যই ঋণাত্মক অথবা শূন্য হইবে এবং a ধনাত্মক হইবে ; এবং ax^2+bx+c রাশিমালাটি সতত ঋণাত্মক হইতে হইলে b^2-4ac ঋণাত্মক অথবা শূন্য হইবে এবং a অবশ্যই ঋণাত্মক হইবে।

17·10. দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+by+c এর চরম (maximum) এবং অবম (minimum) মান।

প্রদত্ত রাশিমালা ax^2+bx+c নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}. \quad \cdots \quad (1)$$

(i) a ধনাত্মক হইলে x-এর সকল বাস্তব মানে $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ একটি পূর্ণবর্গ বলিয়া, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \nless 0$, কিন্তু ইহা 0 হইতে পারে, তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

$\therefore$ (1) হইতে, ax^2+bx+c এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না, অর্থাৎ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ রাশিই প্রদত্ত রাশিমালার অবম মান এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

(ii) a ঋণাত্মক হইলে, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ধনাত্মক বলিয়া, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ngtr 0$, কিন্তু ইহা শূন্য হইতে পারে, তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

সুতরাং, (1) হইতে, ax^2+bx+c এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, অর্থাৎ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ প্রদত্ত রাশিমালার চরম মান।

দ্রষ্টব্য ঃ a ঋণাত্মক হইলে প্রদত্ত রাশিমালার কোন অবম মান নির্ণয় করা যায় না।

17·11. x ও y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিবার শর্ত নির্ণয়।

[Find the condition that the general expression of second degree in x, y *viz*, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ may be resolved into two linear factors.]

প্রদত্ত রাশিমালাটিকে শূন্য ধরিলে ইহাকে x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করিতে পারা যাইবে। $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$

এই সমীকরণকে x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a};$$

$$\therefore \quad ax+hy+g=\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(gh-af)+g^2-ac}.$$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশিমালার $ly+my+n$ আকারের দুইটি গুণনীয়ক থাকিলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা অবশ্যই একটি পূর্ণবর্গ হইবে। তাহা হইলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালাকে শূন্য ধরিয়া উহাকে y-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করতঃ ইহার নিরূপক শূন্য হইলে এই রাশিমালার পূর্ণবর্গ হইবার শর্ত পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad (gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac),$$

বা, $g^2h^2-2ghaf+a^2f^2=g^2h^2-ach^2-abg^2+a^2bc$

পক্ষান্তর করিয়া a দ্বারা ভাগকরণান্তে

$\mathbf{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0}$, এবং ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

নির্ণীত এই রাশিমালাকে x, y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর নিরূপক বলা হয়।

Ex. *Find the condition that the expressions* $ax^2+2hxy+by^2$ *and* $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ *may be respectively divisible by* $y-mx$ *and* $x+my$.

মনে কর, $ax^2+2hxy+by^2\equiv b(y-mx)(y-nx)$ ... (1)

এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2\equiv a'(x+my)(x-py)$ ... (2)

যেহেতু, প্রথম রাশিমালার একটি গুণনীয়ক $y-mx$, সুতরাং, $y=mx$ ধরিলে (1) এর উভয়পক্ষ শূন্য হইবে

$$\therefore \quad ax^2+2hx.mx+b.m^2x^2=0,$$

বা, $bm^2+2hm+a=0.$ ... ... (3)

অনুরূপভাবে, $a'm^2y^2 + 2h'.(-my).y + b'y^2 = 0$,

বা $$a'm^2 - 2h'm + b' = 0. \quad \dots \quad (4)$$

$\because$ (3) ও (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{m^2}{2(hb' + ah')} = \frac{m}{aa' - bb'} = -\frac{1}{2(bh' - a'h)}.$$

$\therefore$ $(aa' - bb')^2 + 4(hb' + ah')(bh' + a'h) = 0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

17.12 উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If the equations $x^2 + bx + ca = 0$ and $x^2 + cx + ab = 0$ have a common root, prove that their other roots will satisfy the equation $x^2 + ax + bc = 0$.*

মনে কর, $x^2 + bx + ca = 0$ এবং $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α.

$\therefore$ $\alpha^2 + b\alpha + ca = 0$ এবং $\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$.

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা, $\dfrac{\alpha^2}{b.ab - c.ca} = \dfrac{\alpha}{ca - ab} = \dfrac{1}{c - b}$,

বা, $\dfrac{\alpha^2}{a(b^2 - c^2)} = \dfrac{\alpha}{a(c - b)} = \dfrac{1}{c - b}$ বা $\dfrac{\alpha^2}{a(b + c)} = \dfrac{-\alpha}{a} = -1$.

$\therefore$ সাধারণ বীজ $\alpha = a$ অথবা $-(b + c)$.

$\therefore$ $\dfrac{\alpha^2}{a(b + c)} = -1$ বা $\alpha = -(b + c)$ অর্থাৎ $a + b + c = 0$,

প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ca, $\therefore$ ইহার অপর বীজ c,

এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ab, $\therefore$ ইহার অপর বীজ b.

এই বীজদ্বয় b, c পর পর তৃতীয় সমীকরণের বামপার্শ্বে বসাইয়া আমরা পাই

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + ab + ca = b(b + a + c) = 0 \\ \text{এবং } c^2 + ac + bc = c(c + a + b) = 0 \end{array}\right\} \because a + b + c = 0.$$

অর্থাৎ b, c মান দ্বারা তৃতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সাধারণ বীজ $-(b + c)$ ধরিয়াও প্রমাণ করা যায়।

অন্যভাবে, তৃতীয় সমীকরণটির বীজদ্বয় b ও c ; সুতরাং, § 17·3 অনুসারে ইহার সমীকরণ $x^2 - (b + c)x + bc = 0$, কিন্তু যেহেতু $a + b + c = 0$ $\therefore$ $x^2 + ax + bc = 0$.

Ex. 2. *If x is a real quantity, prove that the expression* $\dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-1}$ *can have all numerical values except such as lie between* 2 *and* $-\frac{3}{2}$.

মনে কর, $\dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-1}=y$. $\therefore\ 3x^2+2=yx^2-2xy-y$.

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2(3-y)+2xy+(y+2)=0$.

ইহা x-সম্বলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, x যদি বাস্তব হয়, তবে

$$4y^2-4(3-y)(y+2)>0,\ \text{বা},\ y^2+y^2-y-6>0$$

বা, $2y^2-y-6>0$, বা, $(2y+3)(y-2)>0$,

বা, $2(y+\frac{3}{2})(y-2)>0$.

$\therefore$ এই রাশিমালার উৎপাদকদ্বয় উভয়েই ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে। উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হইলে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালা 2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। এবং উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হইলে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালা $-\frac{3}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা 2 এবং $-\frac{3}{2}$ এর মধ্যবর্তী কোন মান ব্যতীত যে-কোন সাংখ্যমান হইতে পারে।

Ex. 3. *Find the limits between which 'a' must lie so that* $\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$ *may have all values, x being any real quantity.*

মনে কর, $\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y$.

$\therefore\ x^2(a-5y)-7x(1-y)+(5-ay)=0$.

যেহেতু, x একটি বাস্তব রাশি, $49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\geqslant 0$;

অর্থাৎ, $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)\geqslant 0$.

অর্থাৎ § 17·7 অনুসারে, $49-20a>0$ এবং সঙ্গে সঙ্গে,

$$4(2a^2+1)^2-4(49-20a)\leqslant 0,$$

বা, $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2\leqslant 0$,

বা, $2(a^2-10a+25)\times 2(a^2+10a-24)\leqslant 0$,

বা, $4(a-5)^2(a+12)(a-2)\leqslant 0$.

$\therefore$ a, 2 এবং -12 এর মধ্যবর্তী হইলে $(-12 < a < 2)$, এই রাশিমালা < 0 হইবে এবং এই দুই মানের জন্য $49-20a > 0$. যখন $a=5$, -12 অথবা 2, তখন এই রাশিমালা $=0$. কিন্তু $a=5$ এবং $49-20a < 0$ হইলে, 'a' এর মান -12 এবং 2 এর মধ্যবর্তী যে-কোন রাশি হইতে পারে।

Ex. 4. *If the equations* $ax^2+bx+c=0$ *and* $bx^2+cx+a=0$ *have a common root, then either* $a+b+c=0$ *or* $a=b=c$.

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α.

$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$

এবং $b\alpha^2+c\alpha+a=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$

সুতরাং, (1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{ab-c^2}=\frac{\alpha}{bc-a^2}=\frac{1}{ca-b^2}.$$

$\therefore \quad (bc-a^2)^2=(ab-c^2)(ca-b^2),$

বা, $b^2c^2-2a^2bc+a^4=a^2bc-ab^3-ac^3+b^2c^2,$

বা, $a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc=0,$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $a^3+b^3+c^3-3abc=0,$ [উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0.$

$\therefore \quad a+b+c=0,$ অথবা, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$

কিন্তু পূর্ণবর্গরাশির প্রত্যেকটি শূন্য না হইলে, তাহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না। $\therefore \quad a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$;

অর্থাৎ $\quad a=b=c.$

Ex. 5. *If the roots of* $ax^2+2bx+c=0$ *be* α, β *and those of* $Ax^2+2Bx+C=0$ *be* $\alpha+\delta, \beta+\delta$, *show that* $\dfrac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\dfrac{a}{A}\right)^2$.

$ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β.

$\therefore \quad \alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

$Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha+\delta, \beta+\delta$.

$\therefore \quad (\alpha+\delta)+(\beta+\delta)=-\dfrac{2B}{A}$ এবং $(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\dfrac{C}{A}$.

এক্ষণে, $(\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\}^2$,

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\{(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)\}^2-4(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$,

বা, $\dfrac{4b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}=4\dfrac{B^2}{A^2}-\dfrac{4C}{A}$.

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া সরলকরণান্তে

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2},$$

বা, $\dfrac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\dfrac{a}{A}\right)^2$. [একান্তরকরণ-প্রক্রিয়া দ্বারা।]

Ex. 6. *If $p>1$, prove that, for real values of x, the expression $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ lies between $\dfrac{p-1}{p+1}$ and $\dfrac{p+1}{p-1}$.*

মনে কর, $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}=y$,

তাহা হইলে $y(x^2+2x+p^2)=x^2-2x+p^2$.

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2(y-1)+2x(y+1)+p^2(y-1)=0$.

x-সম্বলিত এই দ্বিঘাত সমীকরণে প্রদত্ত শর্তানুসারে x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক $4(y+1)^2-4p^2(y-1)^2$ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $4\{(y+1)^2-p^2(y-1)^2\}\nless 0$, বা, $(y+1)^2-p^2(y-1)^2\nless 0$,

বা, $(y+1+py-p)(y+1-py+p)\nless 0$,

বা, $\{y(1+p)+(1-p)\}\{y(1-p)+(1+p)\}\nless 0$,

বা, $(1+p)\left(y+\dfrac{1-p}{1+p}\right)(1-p)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\nless 0$,

বা, $(1-p^2)\left(y+\dfrac{1-p}{1+p}\right)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\nless 0$,

বা, $\left(y+\dfrac{1-p}{1-p}\right)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\ngtr 0$ [$p>1$ বলিয়া $1=p^2$ ঋণাত্মক]

বা, $\left(y-\dfrac{p-1}{p+1}\right)\left(y-\dfrac{p+1}{p-1}\right)\ngtr 0$.

$\therefore$ এই দুই উৎপাদকের গুণফল অবশ্যই ঋণাত্মক হইতে হইবে।

অতএব, এই দুই উৎপাদক এক্ষেত্রে কখন সমচিহ্নবিশিষ্ট অর্থাৎ উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক হইতে পারে না—একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

যেহেতু, $p > 1$, সুতরাং, $\frac{p+1}{p-1} > \frac{p-1}{p+1}$.

$\therefore$ $y - \frac{p-1}{p+1}$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y > \frac{p-1}{p+1}$.

এবং $y - \frac{p+1}{p-1}$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $y < \frac{p+1}{p-1}$.

$\therefore \quad \frac{p-1}{p+1} < y < \frac{p+1}{p-1}$.

$\therefore$ y অর্থাৎ $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ এর মান $\frac{p+1}{p-1}$ এবং $\frac{p-1}{p+1}$ এর মধ্যবর্তী হইবে।

Ex. 7. *If by eliminating x between the equations $x^2+ax+b=0$ and $xy+l(x+y)+m=0$ a quadratic in y is formed whose roots are the same as those of the original quadratic in x, then either $a=2b$ and $b=m$ or $b+m=al$.*

$$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$xy+l(x+y)+m=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

(2) হইতে আমরা পাই, $x(y+l) = -(ly+m)$. $\therefore \quad x = -\frac{ly+m}{y+l}$.

x এর এই মান (1)-র বসাইয়া, $\left(-\frac{ly+m}{y+l}\right)^2 - \frac{a(ly+m)}{y+l} + b = 0$.

সরলকরণান্তে আমরা নিম্নের y-সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ পাই

$$y^2(l^2-al+b)+y(2lm-al^2-am+2bl)$$
$$+(m^2-alm+bl^2)=0. \qquad \cdots \qquad (3)$$

যেহেতু, সমীকরণ (1) এবং বীজদ্বয় অভিন্ন,

$\therefore\quad \dfrac{m^2-alm+bl^2}{l^2-al+b}=b$ [উভয় পক্ষই অভিন্ন বীজদ্বয়ের গুণফল]

বা, $m^2-alm+bl^2=bl^2-abl+b^2$, বা, $m^2-b^2-al(m-b)=0$,
(পক্ষান্তর করিয়া)

বা, $(m-b)(m+b-al)=0$.

$\therefore\quad m=b$ অথবা $m+b=al$.

আবার বীজদ্বয় অভিন্ন বলিয়া উহাদের সমষ্টিও অভিন্ন।

$\therefore\quad -\dfrac{2lm-al^2-am+2bl}{l^2-al-b}=-a,$

বা, $2lm-al^2-am+2bl=al^2-a^2l+ab$

বা, $2lm-am-2al^2+a^2l+2bl-ab=0,$

বা, $m(2l-a)-al(2l-a)+b(2l-a)=0,$

বা, $(2l-a)(m-al+b)=0$, অর্থাৎ $2l=a$, বা, $m+b=al,$

$\therefore\quad a=2l$ ও $b=m$, অথবা, $m+b=al.$

Ex. 8. *Show that*

$$\frac{a}{y-z}+\frac{b}{z-x}+\frac{c}{x-y}=0$$

can be expressed in terms of two linear factors.

ধর $X=y-z,\ Y=z-x,\ Z=x-y$ .... (1)

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{a}{X}+\frac{b}{Y}+\frac{c}{Z}=0$$

বা, $aYZ+bZX+cXY=0$ .... (2)

(1) হইতে, $X+Y+Z=0$ ... (3)

(2) ও (3) হইতে,

$(aY+bX)(X+Y)-cXY=0$

বা, $bX^2+(a+b-c)XY+aY^2=0$ ... (4)

ডানপক্ষ শূন্য বলিয়া, (4) কে

$$(Y - mX)(Y - nX) = 0$$

লেখা যাইতে পারে, অবশ্য

$$\left.\begin{aligned} m + n &= \frac{a + b - c}{a} \\ mn &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5)$$

(5) হইতে m, ও n নির্ণয় করা সম্ভব এবং সেক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণ

$$[\,(z - x) - m(y - z)\,]\,[\,(z - x) - n(x - y)\,] = 0$$

বা, $[\,x + my - (1 + m)z\,]\,[\,x + ny - (1 + n)z\,] = 0$

নির্ণেয় উৎপাদক দ্বয় ।

Examples XVIIB

1. Show that the equations $(q - r)x^2 + (r - p)x + (p - q) = 0$ and $(r - p)x^2 + (p - q)x + (q - r) = 0$ have a common root.

2. If the roots of $ax^2 + bx + c = 0$ differ from those of $a'x^2 + b'x + c' = 0$ by a constant, show that $\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2} = \dfrac{b'^2 - 4a'c'}{a'^2}$.

3. If one root of the equation $x^2 + ax + b = 0$ be a root of the equation $x^2 + cx + d = 0$, show that its other root is a root of the equation $x^2 + (2a - c)x + (a^2 - ac + d) = 0$.

4. For what values of m will the expression $y^2 + 2xy + 2x + my - 3$ be capable of resolution into two linear factors ?

5. If x and y are two real quantities connected by the equation $9x^2 + 2xy + y^2 - 92x - 20y + 244 = 0$, then will x lie between 3 and 6, and y between 1 and 10 ?

6. If $(ax^2 + bx + c)y + a'x^2 + b'x + c' = 0$, find the condition that x may be a rational function of y.

7. If the equations $x^2+px+q=0$ and $x^2+p'x+q'=0$ have a common root, show that it must be equal to either $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ or $\frac{q-q'}{p'-p}$.

8. Show that in the equation $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$ for every real value of x there is a real value of y and for every real value of y there is a real value of x.

9. Show that the expression $A(x^2-y^2)-xy(B-C)$ always admits of two real linear factors.

10. If the expression $3x^2+2Pxy+2y^2+2ax-4y+1$ can be resolved into two linear factors, prove that P must be one of the roots of the equation $P^2+4aP+2a^2+6=0$.

11. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be the same as that of the roots of the equation $x^2-qx+p=0$, show that $p+q+4=0$, unless $p=q$.

12. If the equation $ax^2+bx+c=0$ be not altered when each of its coefficients is increased by the same quantity, show that $x^3=1$.

13. If x is real, prove that $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ can have no value between 5 and 9.

14. If x is real, prove that $\frac{x}{x^2-5x+9}$ must lie between 1 and $-\frac{1}{11}$.

15. Show that for real values of x, $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ is capable of having all real values.

16. If x be real, prove that $\frac{x^2+8x+80}{2x+8}$ can have all numerical values, except such as lie between 8 and -8.

17. Determine the limits of value between which the following function must lie for real values of x

(i) $\dfrac{x^2+6x+11}{2x}$. (ii) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. (iii) $\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-3x+2}$.

(iv) $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$.

18. Determine the sign of the following functions :

(i) $\dfrac{2x^2+3x+3}{x^2-2x+5}$. (ii) $\dfrac{6x-14-x^2}{x^2-10x+30}$.

19. If α, β be the roots of the equation $x^2+2ax+b=0$, form a quadratic equation with rational coefficients, one of whose roots is $\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$.

20. Find λ so that the values of x given by the equation $\dfrac{\lambda}{2x}=\dfrac{a}{x+c}+\dfrac{b}{x-c}$ may be equal. If λ_1, λ_2 are the two values of λ and x_1, x_2 the corresponding values of x, show that $\lambda_1\lambda_2=(a-b)^2$ and $x_1x_2=c^2$.

21. Show that the expression $\dfrac{(ax-b)(b'x-a')}{(bx-a)(a'x-b')}$ will be capable of all values when x is real, if a^2-b^2 and $a'^2-b'^2$ have the same sign.

22. If $ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, show that x and y are connected by a linear relation if $c^2 \leqslant a^2+b^2$.

23. If the equation $ax^2+2bx+c=0$ has real roots and if m and n are real numbers such that $0<n<m^2$, show that the equation $ax^2+2mbx+nc=0$ has real roots.

24. Show that $\dfrac{ac-b^2}{a}$ is the greatest or least value of the expression $ax^2+2bx+c$ according as a is negative or positive.

25. Find the greatest value of $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$.

26. Find the maximum and minimum values of the function $\dfrac{5x^2-x+5}{x^2+x+1}$ when x is real.

27. Show that the greatest and least values of $\dfrac{6x^2-32x+21}{5x^2-18x+17}$ for all real values of x are $\dfrac{5}{4}$ and 1 corresponding to the value 1 and 2 respectively of x.

28. If $x-a$ is a factor of $a_1x^2+2b_1x+c_1$ and $x+a$ is a factor of $a_2x^2+2b_2x+c_2$, prove that

$$(a_1c_2-c_1a_2)^2+4(a_1b_2+a_2b_1)(b_1c_2+b_2c_1)=0.$$

29. If x is real, prove that the expression $\dfrac{(x-a)(x-c)}{x-b}$ is capable of assuming all real values, provided that a, b, c are in ascending or descending order of magnitude.

30. If each pair of the three equations

$$x^2-p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2-p_3x+q_3=0$$

have a common root (root common to all three) prove that

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_2p_3+p_3p_1+p_1p_2).$$

31. If the equation $ax^2+2bx+c=0$, $a'x^2+2b'x+c'=0$ have a common root, prove that equation

$$(b^2-ac)x^2+(2bb'-ac'-a'c)x+(b'^2-a'c')=0$$

has equal roots.

32. Find the quadratic one of whose roots is

(i) $\dfrac{2ab}{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}$. (ii) $\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)+i\sqrt{2ab}}$.

33. Show that the roots of $bx^2+(b-c)x=c+a-b$ are real, if those of $ax^2+b(2x+1)=0$ are imaginary.

34. Prove that if a, b, c are real quantities, the roots of the equation $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ are real. Prove also that the roots of this equation are equal, if a, b, c are in A.P.

35. If the expressions ax^2+bx+c and bx^2+cx+a have a common linear factor, show that either $a=0$, or $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

36. Show that the two values of x obtained from the equations $y=mx+c$ and

(*a*) $x^2+y^2=a^2$, (*b*) $y^2=4ax$, (*c*) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(*d*) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

will be equal if

(*a*) $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$, (*b*) $c=\dfrac{a}{m}$, (*c*) $c=\pm a\sqrt{a^2m^2+b^2}$,

(*d*) $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ respectively.

ANSWERS

6. $(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$.

17. (i) Any real value except between -4, 10,

(ii) between 3 and $\frac{1}{3}$.

(iii) between -1 and $\frac{4}{7}$ (iv) between 1 and -7

18. (i) positive. (ii) negative. **19.** $x^2+4ax+2b$.

20. $a+b\pm2\sqrt{ab}$. **25.** $\frac{1}{3}$. **26.** 11 and 3.

32. (i) $x^2-2(a+b)x+2ab=0$

(ii) $x^2-2(a-b)x+a^2+b^2=0$.

অষ্টাদশ অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

18·1. বিন্যাস ও সমবায়।

শিক্ষার্থিগণের পক্ষে বিন্যাস এবং সমবায়ের পার্থক্য প্রথম প্রথম প্রণিধান করা একটু দুরূহ। সেইজন্য এ-সম্বন্ধে দুই-একটি বিষয়ের আলোচনা অপ্রাসঙ্গিক হইবে না।

মনে কর, Sri Pravakara, Sri Sen ও Sri Patel-নামীয় তিন ব্যক্তি ভ্রমণে বহির্গত হইয়াছেন। এই তিন ব্যক্তিকে লইয়া একটিমাত্র দল গঠিত হইয়াছে আমরা বলিব। তাঁহাদের নামের ক্রমানুসারে ভিন্ন ভিন্ন দল গঠিত হইয়াছে তাহা আমরা বলি না। Sri Sen, Sri Pravakara ও Sri Patel অথবা Sri Patel, Sri Sen ও Sri Pravakara যে-ক্রমেই আমরা এই নামগুলি উল্লেখ করি না কেন, ঐ তিন ব্যক্তি লইয়া একটি দলই সূচিত হইবে অর্থাৎ একটি সমবায় হইবে। আবার, এই তিন ব্যক্তি যদি তিন আসনযুক্ত একখানি bench-এ উপবেশন করেন, তবে তাঁহাদের বসিবার ক্রমানুসারে অর্থাৎ কোন্‌স্থানে কে বসিল, তাহা বিবেচনা করিলে এই উপবেশনের ব্যাপারে আমরা বলিতে পারি, তাঁহাদের "সাজানো" বা "বিন্যাস" বিভিন্ন।

আবার, a, b, c, d অক্ষর-চতুষ্টয়ের মধ্য হইতে যে-কোন তিনটি অক্ষর নির্বাচন করিতে হইলে আমরা প্রথম তিনটি অক্ষর a, b, c নির্বাচন করিতে পারি। এই নির্বাচনকার্যে প্রথমে b, তারপর c এবং পরে a নির্বাচন করিলে একই অক্ষরত্রয় a, b, c নির্বাচিত হইল। এক্ষেত্রে যে-কোন ক্রমেই এই অক্ষর তিনটি আমরা নির্বাচন করি না কেন, "নির্বাচন" বা "সমবায়" একই হইবে। নির্বাচিত বস্তুগুলির ক্রমের উপর সমবায়ের বিভিন্নতা নির্ভর করে না। যতক্ষণ পর্যন্ত বিভিন্নক্রমে নির্বাচিত বস্তুগুলি, এখানে তিনটি অক্ষর, শেষপর্যন্ত একই থাকে। এখানে নিম্নের লিখিতমতো ক্রমে যদি a, b, c অক্ষরত্রয় নির্বাচিত করা হয়, তবে তাহা একটিমাত্র সমবায় হইবে, ছয়টি নয়, কেননা নির্বাচিত তিনটি অক্ষর সকল ক্ষেত্রেই a, b, c. যেমন abc, acb, bca, bac, cab এবং cba একই সমবায় abc.

a, b, c অক্ষর তিনটি উপরের মতো সাজাইলে এখানে লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক ভাগে অক্ষরগুলির ক্রম পরস্পর হইতে বিভিন্ন। এখানে অক্ষর তিনটি বিভিন্ন রকমে বিন্যস্ত হওয়ায় অক্ষরের ক্রমানুসারে প্রত্যেক ভাগ বিভিন্ন। সুতরাং a, b, c অক্ষরত্রয় তিনটি করিয়া লইয়া ছয়টি বিভিন্ন প্রকারে সাজাইতে পারি।

আবার, a, b, c অক্ষর তিনটির মধ্য হইতে দুইটি করিয়া লইয়া আমরা ক্রম-নিরপেক্ষ তিনটি ভাগ ab, ac এবং ad গঠন করিতে পারি। আমরা (ab), (ba) একই ভাগ বলিয়া ধরিয়া থাকি, কিন্তু অক্ষর দুইটির ক্রম অর্থাৎ প্রথমে কোনটি তাহা ধরিলে ab, ba দুইটি পৃথক্ বিন্যাস হইবে। এখন আমরা বিন্যাস ও সমবায়ের সংজ্ঞা দিব।

বিন্যাস (Permutation)ঃ কতকগুলি বস্তু হইতে নির্দিষ্ট কয়েকটি অথবা সবকয়টি লইয়া যতপ্রকারে সম্ভব, ততপ্রকারে সাজাইলে যে সকল সাজানো (arrangement) পাওয়া যায়, তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক-একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলা হয়।

সমবায় (Combination)ঃ আবার, ঐরূপ কতকগুলি বস্তু হইতে নির্দিষ্ট-সংখ্যক কয়েকটি অথবা সবগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকলপ্রকারে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে এক-একটি ভাগ (group) গঠন বা এক-একটি নির্বাচন (selection) করিলে ঐ প্রত্যেক ভাগ বা নির্বাচনকে এক-একটি **সমবায়** (combination) বলা হয়।

উপরে যাহা বলা হইয়াছে, তাহা হইতে আমরা বলিতে পারি তিনটি অক্ষর a, b, c এর সবগুলি লইয়া abc, acb, bac, bca, cab এবং cba এই ছয়টি বিন্যাস, কিন্তু একটিমাত্র সমবায় গঠন করা যায়। আবার, a, b, c, d অক্ষর চারিটি হইতে তিনটি করিয়া লইয়া abc, abd, acd এবং bcd এই চারিটি বিভিন্ন সমবায় পাওয়া যায়। কিন্তু এই সমবায় চারিটির প্রত্যেকটি হইতে ছয়টি করিয়া মোট চব্বিশটি বিন্যাস পাওয়া যায়।

বিন্যাস ও সমবায় সম্বন্ধে যাহা বলা হইল তাহা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, সমবায় গঠন করিতে হইলে কোন বিশেষ একটি সমবায়ে মনোনীত বস্তুসমূহের সংখ্যা আমাদের প্রধান বিবেচ্য, তাহাদের ক্রম নহে। আবার, বিন্যাস গঠন করিতে হইলে বস্তুসমূহের সংখ্যা ও ক্রম উভয়েই বিবেচ্য।

18·2. এই অধ্যায়ের সাধারণ প্রতিজ্ঞাগুলির আলোচনার পূর্বে একটি অতি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা কয়েকটি উদাহরণ-সাহায্যে আমরা বুঝাইব।

যদি কোন একটি প্রক্রিয়া বা কার্য m-সংখ্যক বিভিন্ন রকমে সাধন করা যায় এবং এইরূপ একরকমে কার্য করার পর যদি অপর একটি কার্য n-সংখ্যক বিভিন্ন রকমে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ দুই কার্য সম্মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন রকমে করা যাইবে। (If one operation can be performed in m ways, and when it has been performed in anyone of these ways, a second operation can be performed in n ways, the number of ways performing the two operations will be $m \times n$.)

মনে কর, প্রথম কার্যটি (operation) m রকমের মধ্যে যে-কোন একরকমে করার পর দ্বিতীয় প্রকার কার্য n-সংখ্যক রকমে করা যায়। সুতরাং প্রথম প্রকার কার্যের পর দ্বিতীয় প্রকার কার্য করিলে প্রথম কার্যের প্রত্যেক রকমের জন্য দ্বিতীয় প্রকার কার্য n রকমে করা যায়। যেহেতু প্রথম কার্য m-রকমে সম্পন্ন করা যায়, সুতরাং এই দুই কার্য একের পর অপর করিলে $m \times n$-সংখ্যক রকমে করা যাইবে।

ধর, কলিকাতা ও দক্ষিণেশ্বরের মধ্যে গঙ্গানদী দিয়া 5 খানি স্টীমার যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কলিকাতা হইতে একখানি স্টীমার যোগে দক্ষিণেশ্বরে যাইয়া তথা হইতে ভিন্ন একখানি স্টীমার যোগে কলিকাতাতে কত রকমে ফিরিতে পারে?

এখন, কলিকাতা ও দক্ষিণেশ্বরের মধ্যে 5 খানি স্টীমার যাতায়াত করে বলিয়া প্রথম যাত্রা অর্থাৎ কলিকাতা হইতে দক্ষিণেশ্বরে যাওয়া 5 রকমে সাধিত হইতে পারে, কেননা ঐ ব্যক্তি 5 খানি স্টীমারের যে-কোন একখানিতে দক্ষিণেশ্বরে যাইতে পারে। যে স্টীমারে সে দক্ষিণেশ্বরে যায়, তাহাতে সে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে না বলিয়া অপর 4 খানি স্টীমারের যে-কোন একখানিতে সে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে। অর্থাৎ সে 4 রকমে ফিরিতে পারে। সুতরাং, যে-কোন একরকমে দক্ষিণেশ্বরে যাইলে তথা হইতে সে 4 রকমে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে। সে 5 রকমে দক্ষিণেশ্বরে যাইতে পারে বলিয়া প্রশ্নের শর্তানুযায়ী (এক স্টীমারে যাইয়া ভিন্ন এক স্টীমারে ফিরিয়া আসা) সে মোট 5×4 বা 20 রকমে কলিকাতা হইতে দক্ষিণেশ্বরে যাতায়াত করিতে পারে।

আবার, মনে কর, কোন স্টেশনে তিনটি হোটেলের প্রত্যেকটিতে অতিরিক্ত মাত্র একজন লোকের স্থান হইতে পারে। এখন, ঐ স্টেশনে 5 ব্যক্তি একসঙ্গে উপস্থিত হইলে কত বিভিন্ন উপায়ে তাহাদের ঐ হোটেল তিনটিতে স্থান দেওয়া যাইতে পারে?

পাঁচ ব্যক্তির মধ্যে যে কেহ প্রথমে একটি হোটেলে স্থান পাইতে পারে।

∴ প্রথম হোটেলের শূন্যস্থান 5 রকম বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। প্রথম হোটেলে এক ব্যক্তি স্থান পাইলে, দ্বিতীয় হোটেলে অবশিষ্ট 4 ব্যক্তির যে কেহ আশ্রয় লইতে পারে।

অতএব, দ্বিতীয় হোটেলের শূন্যস্থান 4 রকমে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

এখন, প্রথম হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 5 রকমের প্রত্যেক রকমের সহিত দ্বিতীয় হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 4 রকমের প্রত্যেক রকম যুক্ত করা যায়। সুতরাং, প্রথম দুই হোটেলের শূন্যস্থান 5×4 রকমে পূর্ণ করা যায়।

প্রথম, দুই হোটেলের শূন্যস্থান 5×4 বিভিন্ন রকমের যে-কোন একরকমে পূর্ণ হইলে, তৃতীয় হোটেলের শূন্যস্থান 3 রকমে পূর্ণ করা যায়, যেহেতু প্রথম দুই হোটেলে দুইজন আশ্রয় লইলে অবশিষ্ট 3 জনের যে কেহ তৃতীয় হোটেলে স্থান লইতে পারে।

এখন, 3 রকমের এই প্রত্যেকটির সহিত প্রথম দুই হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 5×4 রকমের প্রত্যেকটি যুক্ত করা যায় বলিয়া হোটেল 3টির শূন্যস্থান $5 \times 4 \times 3$ বা 60 রকমে পূর্ণ করা যায়।

Sec. A. বিন্যাস

18·3. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে r-সংখ্যক ($r \leqslant n$) বস্তু একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়। [*To find the number of permutations of n dissimilar things taken r ($r \leqslant n$) at a time.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া r-সংখ্যক শূন্যস্থান পূরণ করা এবং প্রার্থিত বিন্যাস-নির্ণয় একই ব্যাপার। ইহা সুস্পষ্ট যে, প্রথম শূন্যস্থান n-রকমে পূরণ করা যায়, কেন না এই স্থানে n-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করা যাইতে পারে। প্রথম শূন্যস্থানটি যে-কোন একরকমে পূরণ করিলে দ্বিতীয় শূন্যস্থানে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করিয়া $(n-1)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে। যেহেতু, যে-কোন একরকমে শূন্যস্থানের পূরণ দ্বিতীয় স্থানের $(n-1)$-সংখ্যক রকমের পূরণের সহিত যুক্ত করা যায়, সুতরাং প্রথম দুই শূন্যস্থান $n(n-1)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে। এখন, প্রথম দুই শূন্যস্থান n-সংখ্যক বস্তু হইতে দুইটি বস্তু লইয়া যে-কোন একরকমে পূরণ করিলে অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি লইয়া তৃতীয় শূন্যস্থান $(n-2)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যায়। পূর্বের অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে বলা যায়, প্রথম তিনটি শূন্যস্থান $n(n-1)(n-2)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে।

অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে লক্ষ্য কর, প্রত্যেক শূন্যস্থান-পূরণের সঙ্গে সঙ্গে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যাতে একটি নূতন উৎপাদক উপস্থিত হইতেছে এবং যে-কোন স্তরে 'পূর্ণ শূন্যস্থানের সংখ্যা' নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যাতে উৎপাদকের সংখ্যার সহিত সমান। এখন, যেহেতু r-তম উৎপাদক $= n-(r-1) = n-r+1$, n-সংখ্যক শূন্যস্থান যতরকমে পূর্ণ করা যায়, তাহার সংখ্যা $= n(n-1)(n-2)\cdots r$-তম উৎপাদক পর্যন্ত $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যস্ত করিলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)$.

ইহা সংক্ষেপে ${}^nP_r$ রূপে লিখিত হয়।

সুতরাং, $\mathbf{{}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}$.

দ্রষ্টব্য। উপরোক্ত আলোচনায় ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান যে, n এবং r উভয়েই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং পূর্বেই অনুমান করিয়া লওয়া হইয়াছে যে, $r \leqq n$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. n-সংখ্যক বস্তুর সকলগুলিকে লইয়া বিন্যস্ত করিলে অর্থাৎ $r=n$ ধরিলে,

$$^nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1,$$

অর্থাৎ প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল।

এই গুণফল সাধারণতঃ $\lfloor n$ বা $n\,!$ এই প্রতীকদ্বয়ের যে-কোন একটির দ্বারা সূচিত হইয়া থাকে এবং ইহা 'factorial n' রূপে পঠিত হয়।

$\therefore \quad {}^nP_n = \lfloor n$ বা $n\,! = 1.2.3.4. \ldots (n-1).n.$

$\therefore \quad \lfloor 6 = 1.2.3.4.5.6 = 720,$

$\lfloor 4 = 1.2.3.4 = 24$, ইত্যাদি।

আবার, $\lfloor n = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1 = n \lfloor n-1.$

অনুসিদ্ধান্ত 2.

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).\lfloor n-r}{\lfloor n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}.$$

দ্রষ্টব্য। এটা সুস্পষ্ট যে, $r=n$ বা $n-1$ হইলে ^nP_r এর মান বৃহত্তম, যেহেতু $^nP_n = {}^nP_{n-1}$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. $\lfloor 0$ এর অর্থ।

অনু. 2 হইতে, $^nP_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$, $\therefore$ $r=n$ হইলে, $^nP_n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor 0}$.

কিন্তু $^nP_n = \lfloor n$. $\quad \therefore \lfloor n = \frac{\lfloor n}{\lfloor 0}$, বা, $\lfloor 0 = \frac{\lfloor n}{\lfloor n} = 1.$

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে r-সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি।

মনে কর, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যা ^nP_r.

অতএব, n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে $(r-1)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া সকল রকমে বিন্যস্ত করা হইলে বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $^nP_{r-1}$.

ইহার প্রত্যেকটি বিন্যাসের সহিত অবশিষ্ট $(n-r+1)$ বস্তুর একটি করিয়া যুক্ত করিলে n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তুর এক-একটি বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^nP_{r-1}\times(n-r-1)$,

$$\text{অর্থাৎ } {}^nP_r = {}^nP_{r-1}\times(n-r+1).$$

এক্ষণে, r এর পরিবর্তে $r-1, r-2, r-3....3, 2, 1$ বসাইয়া আমরা পাই,

$$\begin{aligned} {}^nP_{r-1} &= {}^nP_{r-2}\times(n-r+2)\\ {}^nP_{r-2} &= {}^nP_{r-3}\times(n-r+3)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ {}^nP_3 &= {}^nP_2\times(n-2)\\ {}^nP_2 &= {}^nP_1\times(n-1)\\ {}^nP_1 &= n. \end{aligned}$$

উপরস্থ সমীকরণগুলির বাম পক্ষ ও দক্ষিণ পক্ষের রাশিগুলি পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারিত করিলে

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+2)(n-r+1).$$

18·4. n-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি p-সংখ্যক বস্তু একরকম, q-সংখ্যক বস্তু আর একরকম এবং r-সংখ্যক বস্তু অন্য আর একরকম হয়, এবং অবশিষ্টগুলি বিভিন্ন রকম হয় তবে সেইরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি লইয়া বিন্যস্ত করিয়া বিন্যস্ত-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the total number of permutation of n things taken all at a time, when p of them are alike of one kind, q of them are alike of another kind, r of them are alike of a third kind and the rest are all different.*]

মনে কর, একটি আলমারিতে n-সংখ্যক পুস্তক আছে। সবচেয়ে উপরের তাকে p-সংখ্যক বীজগণিত (একই প্রণেতার), তার নিম্নের তাকে q-সংখ্যক ত্রিকোণমিতি, তাহার নিম্নের তাকে r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি আছে। নীচের তাকগুলিতে অন্যান্য বিভিন্ন (যে-কোনটি অন্যগুলির হইতে পৃথক্) পুস্তক আছে।

মনে কর, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা x। এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে p-সংখ্যক একই পুস্তক বীজগণিত আছে। এই p-সংখ্যক বীজগণিতগুলিতে

যদি p-সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকে রূপান্তরিত করা যায় (বীজগণিতগুলির উপর $1, 2 \ldots\ldots p$ সংখ্যাগুলি লিখিয়া), তবে p-সংখ্যক পরিবর্তিত পুস্তকগুলি ব্যতীত অপর পুস্তকগুলির অবস্থানের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়া এই x-সংখ্যক বিন্যাসের যে-কোন একটির হইতে শুধু পরিবর্তিত পুস্তকগুলির বিন্যাস সাধন করিয়া $\underline{|p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইতে পারে।

সুতরাং, মোট বিন্যাস-সংখ্যা $x \times \underline{|p}$ হইবে। অনুরূপভাবে, এই $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে q-সংখ্যক ত্রিকোণমিতিগুলি পূর্বের ন্যায় বিভিন্ন পুস্তকে পরিবর্তিত করিয়া লইলে, $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসের এক-একটি হইতে $\underline{|q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, এখন বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $x \times \underline{|p} \times \underline{|q}$. আবার, r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিগুলিকে ঐরূপ পরিবর্তিত করিলে, এক-একটি বিন্যাস হইতে $\underline{|r}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে এবং তখন মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে

$$x \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r}.$$

এক্ষণে p-সংখ্যক একই রকম বীজগণিত q-সংখ্যক একই রকম ত্রিকোণমিতি ও r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিকে, বিভিন্ন পুস্তকে পরিবর্তিত করার ফলে ঐ আলমারিতে মোট বিভিন্ন (যে-কোনটি অন্যগুলি হইতে পৃথক্) পুস্তকের সংখ্যা n, এবং এই n-সংখ্যক পুস্তকগুলির সবগুলি লইয়া বিন্যস্ত করিলে বিন্যাস-সংখ্যা $\underline{|n}$ হয়।

$$\therefore \quad x \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r} = \underline{|n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p} \cdot \underline{|q} \cdot \underline{|r}}.$$

দ্রষ্টব্য। যদি ঐ আলমারিতে বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ব্যতীত অন্যান্য পুস্তকগুলির সংখ্যা s হয়, তবে

$$n = p + q + r + s.$$

18·5. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া এমন একটি বিন্যাস রচনা করিতে হইবে, যাহার প্রত্যেকটিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু সবসময় বর্তমান থাকে।

[To find the total number of permutations of n dissimilar things taken r at a time, in which a particular thing always occur.]

মনে কর, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুগুলিকে n অক্ষর যথা, a_1, a_2,....a_n দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। ধর, a_1 নির্দিষ্ট অক্ষরটি সর্বদাই প্রত্যেকটি বিন্যাসের মধ্যে থাকে। a_1 সরাইয়া রাখ। সুতরাং, এখন $(n-1)$-সংখ্যক অক্ষর হইতে $(r-1)$-সংখ্যক অক্ষর লইয়া বিন্যাস করিতে হইবে।

সুতরাং, বিন্যাস-সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$.

এখন যেহেতু a_1 অক্ষরটি প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়...rতম স্থানে অবস্থান করিতে পারে এবং এর প্রত্যেকটির বিন্যাস সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$.

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= r.{}^{n-1}P_{r-1}$.

অনুসিদ্ধান্ত। উপরোক্ত বিন্যাসের যেগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকে না সেগুলির সংখ্যা সহজেই ${}^{n-1}\mathbf{P}_r$.

যেহেতু ${}^nP_r = n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা।

অতএব, $\quad {}^n\mathrm{P}_r = {}^{n-1}\mathrm{P}_r + r.{}^{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$.

আবার, § 18·3 অনু. 2 অনুসারে,

$$ {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} = \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-r-1} + r.\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-r} $$

$$ = \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-r-1}\left[1+\frac{n}{n-r}\right] $$

$$ = \frac{\lfloor n-1 . n}{\lfloor n-r-1 . (n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} = {}^nP_r. $$

18·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Three persons enter a railway carriage in which there are 8 seats ; in how many ways can they seat themselves ?*

প্রথম ব্যক্তি গাড়ীর আটটি আসনের যে-কোন একটিতে উপবেশন করিতে পারে বলিয়া সে 8 প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

প্রথম ব্যক্তি যে-কোন একটি আসনে উপবেশন করিলে দ্বিতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট সাতটি আসনের যে-কোনটিতে উপবেশন করিতে পারে বলিয়া 7 প্রকারে সে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

প্রথম এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি যে-কোন একপ্রকারে আসন গ্রহণ করিলে ছয়টি আসন শূন্য থাকিবে; সুতরাং, তৃতীয় ব্যক্তি 6 প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

এই তিন ব্যক্তির প্রত্যেকের আসন-গ্রহণের বিভিন্ন উপায়গুলির প্রত্যেকটি পরস্পর যুক্ত করা যায় বলিয়া নির্ণেয় উপায়গুলির মোট সংখ্যা

$$=8\times 7\times 6=336.$$

Ex. 2. *If the number of permutations of n things taken 3 at a time in which one particular thing always occurs be equal to the number in which it does not occur, find n.*

নির্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু হইতে তিনটি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে তাহাদের কোনটিতে নির্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে না এবং n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া নির্দিষ্ট বস্তুশূন্য বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে। অতএব, এই বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^{n-1}P_3$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া গঠিত নির্দিষ্ট বস্তু-যুক্ত বিন্যাস-সংখ্যাও $= {}^{n-1}P_3$.

কিন্তু, নির্দিষ্ট বস্তুশূন্য বিন্যাসগুলি এবং নির্দিষ্ট বস্তুযুক্ত বিন্যাসগুলির সমষ্টি n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যার সমান।

$\therefore\quad 2\times {}^{n-1}P_3={}^{n}P_3$ বা $2(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)(n-2)$

বা, $2(n-3)=n$ বা $n=6$.

Ex. 3. *How many different numbers can be formed by using 5 out of the 8 digits* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

এখানে, 1 হইতে 8 পর্যন্ত অঙ্কগুলি পরস্পর বিভিন্ন বলিয়া আমাদের 8টি বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে 5টি লইয়া বিন্যাস রচনা করিতে হইবে।

$\therefore$ 5 অঙ্কের রাশিগুলির নির্ণেয় সংখ্যা $={}^{8}P_5=8.7.6.5.4=6720.$

Ex. 4. *How many different numbers can be formed by using the six digits* 2, 4, 6, 8, 9, 0 ?

ছয়টি বিভিন্ন অঙ্কদ্বারা গঠিত রাশিসংখ্যা স্পষ্টতঃই $\lfloor 6$, কিন্তু অঙ্কগুলির একটি 0 হওয়ায় যে সমস্ত রাশির প্রথমেই 0 থাকিবে, সেগুলি বাদ দিতে হইবে। যে সকল রাশির প্রথমেই 0 থাকিবে, তাহার সংখ্যা অবশিষ্ট পাঁচটি অঙ্ক 2, 4, 6, 8, 9 লইয়া গঠিত রাশিসংখ্যার সমান হইবে এবং 2, 4, 6, 8, 9 এই পাঁচটি অঙ্ক লইয়া গঠিত রাশিসংখ্যা $=\lfloor 5$.

$\therefore$ নির্ণেয় রাশিসংখ্যা $= \underline{|6} - \underline{|5}$

$$= 6.5.4.3.2.1 - 5.4.3.2.1$$

$$= 720 - 120 = 600.$$

Ex. 5. *How many different words can be formed by using all the letters of the word* facetious *? In how many of them will the vowels be always together ?*

এখানে সর্বশুদ্ধ 9টি বিভিন্ন অক্ষর আছে। এই অক্ষরগুলির সবকয়টি লইয়া গঠিত শব্দসংখ্যা স্থির করিতে হইলে 9টি বিভিন্ন বস্তুর সবকয়টি লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ সবকয়টি অক্ষর লইয়া গঠিত নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^9P_9$

$$= 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880.$$

এখানে সর্বসমেত 9টি অক্ষর আছে, তন্মধ্যে 5টি vowel. এই 5টি vowel a, e, i, o, u-কে একটিমাত্র অক্ষর (aeiou) মনে করিয়া যদি বন্ধনীযুক্ত করা হয়, তবে অক্ষরসংখ্যা দাঁড়ায় 5টি, যথা $f, c, t, s,$ (aeiou).

$\therefore$ এই পাঁচটি অক্ষর $\underline{|5}$ রকম উপায়ে সাজানো যায়।

কিন্তু 5টি vowel একত্রে রখিয়া $\underline{|5}$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= \underline{|5} \times \underline{|5} = 5.4.3.2.1 \times 5.4.3.2.1$

$$= 14400.$$

দ্রষ্টব্য। কতগুলি বিন্যাসে vowelগুলি একত্রিত থাকিবে না নির্ণয় করিতে হইলে, লক্ষ্য কর,

সেইরূপ বিন্যাস-সংখ্যা = মোট বিন্যাস-সংখ্যা − যে সকল বিন্যাসগুলিতে 'vowel'গুলি একত্রিত থাকিবে।

$$= 362880 - 14400 = 348480.$$

Ex. 6. *Find the number of ways in which the letters of the word* numerical *can be arranged so that the vowels may occupy only odd positions.*

প্রদত্ত শব্দে বর্ণসংখ্যা 9টি, তন্মধ্যে vowel 4 এবং consonant 5টি। বর্ণের এই 9টি স্থানের মধ্যে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম, সপ্তম ও নবম এই পাঁচটি অযুগ্মস্থানের যে-কোন 4টিতে vowel 4টি বসাইতে হইবে এবং পাঁচটি consonant অবশিষ্ট 5টি স্থানে বসাইতে হইবে।

এখন, vowel 4টিকে অযুগ্ম 5টি স্থানে $^5P_4$ বা 5.4.3.2.1 বা 120টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যায়। 9টি স্থানের মধ্যে 4টি অযুগ্মস্থানে vowel 4টি যে-কোন উপায়ে বসাইলে অবশিষ্ট 5টি স্থানে 5টি consonant কে $^5P_5$ বা $\lfloor 5$ বা 120টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যাইতে পারে।

Vowel গুলিকে 120টি উপায়ে বসানো যায় বলিয়া,

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা} = 120 \times 120 = 14400.$$

Ex. 7. *How many numbers lying between* 2000 *and* 6000 *may be formed with the digits* 1, 2, 3, 5, 7, 9, 0 *using any of them only once ?*

স্পষ্টতঃ, নির্ণেয় রাশিগুলির প্রত্যেকটি 4-অঙ্কবিশিষ্ট হইবে এবং প্রত্যেকটির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইবে।

নির্ণেয় রাশিগুলি গঠন করিতে প্রদত্ত 7টি অঙ্কের 4টি ব্যবহার করিতে হইবে। যেহেতু প্রত্যেক রাশির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইতে হইবে, সুতরাং, এই তিন অঙ্কের একটি ব্যতীত অবশিষ্ট 6টি রাশির মধ্যে 3টি লইয়া বিন্যাস গঠন করতঃ প্রত্যেক বিন্যাসের পূর্বে 2, 3 অথবা 5 যুক্ত করিলে নির্ণের রাশিসংখ্যা পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে $^6P_3 = 6.5.4 = 120.$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রত্যেক রাশির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইলে প্রতি ক্ষেত্রেই গঠিত রাশিসংখ্যা = 120.

$\therefore$ নির্ণেয় মোট রাশিসংখ্যা $= 3 \times 120 = 360.$

Ex. 8. *In how many ways can the letters of the word* Number *be arranged ? How many of these arrangements begin with 'N' ? How many of these arrangments begin with 'N' and end with 'r' ? How many of these arrangements do not begin with 'N' ? How many of these arrangements begin with 'N' but do not end with r ?*

লক্ষ্য কর, '*Number*' কথাটিতে 6টি অক্ষর রহিয়াছে এবং প্রত্যেকটি অক্ষর একটি হইতে অপরটি ভিন্ন। সুতরাং, কথাটির সবগুলি অক্ষর লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা

$$^6P_6 = 6\,! = 720.$$

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইয়াছে বাহির করিতে প্রথমে N-কে সরাইয়া রাখ। এখন বাকী পাঁচটি অক্ষরের ${}^5P_5 = 4\,!$ উপায়ে বিন্যাস রচনা করা যাইবে। ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত N কে সামনে যুক্ত করা যাইবে। সুতরাং এক্ষেত্রে

$$\text{বিন্যাস-সংখ্যা} = 120.$$

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু এবং r দ্বারা শেষ হইয়াছে স্থির করার জন্য N ও r কে নির্দিষ্ট রাখিয়া উহার ভিতরের মোট চারিটি অক্ষরকে লইয়া যতরকমে সম্ভব বিন্যাস সাধন কর। এক্ষেত্রে $4\,! = 24$ উপায়ে তাহা সম্ভব। সুতরাং,

$$\text{বিন্যাস-সংখ্যা} = 24.$$

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইবে না সেগুলির বিন্যাস-সংখ্যা

= মোট বিন্যাস-সংখ্যা − যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইয়াছে

$= 720 - 120 = 600.$

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু কিন্তু r দ্বারা শেষ হইবে না স্থির করার জন্য লক্ষ্য কর, এইরূপ

বিন্যাস-সংখ্যা = মোট বিন্যাস-সংখ্যা, যেগুলি N দ্বারা শুরু হইয়াছে − মোট বিন্যাস-সংখ্যা যেগুলি N দ্বারা শুরু ও r দ্বারা শেষ হইয়াছে

$= 120 - 24 = 96.$

Ex. 9. *Show that the number of ways in which n books may be arranged on a shelf so that two particular books shall not be together is* $(n-2)\,\underline{|n-1}$.

n-সংখ্যক পুস্তকের সকলগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিন্যাস গঠন করিলে কতকগুলি বিন্যাসে নির্দিষ্ট পুস্তকদ্বয়, ধর, A, B একসঙ্গে থাকিবে এবং অবশিষ্ট বিন্যাসগুলিতে ঐ দুইখানি পুস্তক একসঙ্গে থাকিবে না।

এখন, যে-সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে (A, B) থাকিবে, তাহা স্থির করিতে হইলে পুস্তক দুইখানি একত্রে যুক্ত করতঃ (AB) একখানি পুস্তক মনে করিয়া $(n-1)$-সংখ্যক পুস্তকের বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয় এবং এই সংখ্যা $= \underline{|n-1}$.

আবার, পুস্তক দুইখানি B, A ক্রমেও থাকিতে পারে এবং এক্ষেত্রেও বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{|n-1}$.

∴ যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকিবে তাহার সংখ্যা

$$=2\lfloor n-1.$$

কিন্তু, যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকে এবং যে সকল বিন্যাসে একত্রে থাকে না, তাহাদের সমষ্টি $= n$-সংখ্যক পুস্তকের সকলগুলি লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা $= \lfloor n$.

∴ যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকিবে না তাহার সংখ্যা

$$=\lfloor n - 2\lfloor n-1 = n\lfloor n-1 - 2\lfloor n-1 = (n-2)\lfloor n-1.$$

Ex. 10. *In how many ways can 8 articles be arranged in a row so that three particular ones may come together in each arrangement?*

In how many ways can they be arranged so that two particular ones do not come together?

মনে কর, নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি A, B, C. সকল বিন্যাসেই এই বস্তু তিনটি পাশাপাশি থাকিতে হইলে উহাদিগকে বন্ধনীভুক্ত করিয়া একটিমাত্র বস্তু মনে করিলে বস্তু-সংখ্যা 6 হইবে। ইহাদের সকলগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকারে সাজাইলে লব্ধ বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6$. আবার, এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে একটিমাত্র বিবেচিত বন্ধনীভুক্ত তিনটি বস্তু (A, B, C) আছে এবং এই তিনটি বস্তু নিজেদের মধ্যে $\lfloor 3$ বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায়।

∴ নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6 \times \lfloor 3 = \lfloor 6 \times 6 = 4320.$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট বস্তু দুইটি A, B মনে কর। কোন শর্তের অধীন না করিয়া 8টি বস্তু ভিন্ন ভিন্ন রকমে একসারিতে বিন্যস্ত করিলে কতকগুলি বিন্যাসে A, B পাশাপাশি থাকিবে এবং কতকগুলিতে পাশাপাশি থাকিবে না। এই দুই জাতীয় বিন্যাস-সংখ্যার সমষ্টি সাধারণ সূত্রানুসারে $\lfloor 8$-এর সমান হইবে।

∴ এই $\lfloor 8$-সংখ্যক বিন্যাস হইতে যে সমস্ত বিন্যাসে A, B পাশাপাশি থাকিবে তাহার সংখ্যা বাদ দিলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

পূর্বের ন্যায় A, B কে একটি বস্তু মনে করিয়া বন্ধনীভুক্ত করতঃ 7টি বস্তুর বিভিন্ন বিন্যাসে যে সকল ক্ষেত্রে A, B পাশাপাশি থাকিবে উপরোক্ত নিয়মে তাহার সংখ্যা $\lfloor 7 \times \lfloor 2$ পাওয়া যায়।

∴ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \lfloor 8 - \lfloor 7 \times \lfloor 2 = 8\lfloor 7 - 2\lfloor 7 = 6\lfloor 7.$

Ex. 11. *In how many ways can the letter of the words* Punctuation *be arranged ?*

লক্ষ্য কর, *Punctuation* কথাটিতে মোট 11টি অক্ষর আছে তন্মধ্যে 2টি u, 2টি t ও 2টি n আছে। সুতরাং,

$$\text{মোট বিন্যাস-সংখ্যা} = \frac{11\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} \qquad [\S\ 18{\cdot}4 \text{ অনুসারে}]$$

$$= \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{2.2.2}$$

$$= 4989600.$$

Ex. 12. *Show that the letters of the word* Anticipation *can be arranged in three times as many ways as the letters of the words* commencement.

ধর, *Anticipation*-এর বিন্যাস-সংখ্যা $= x$. সুতরাং,

$$x = \frac{12\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!\,3\,!} \qquad [\S\ 18{\cdot}4 \text{ অনুসারে}]$$

সেইভাবে *Commencement*-র বিন্যাস-সংখ্যা যদি y হয়, তবে

$$y = \frac{12\,!}{2\,!\,2\,!\,3\,!\,3!} \qquad [\S\ 18{\cdot}4 \text{ অনুসারে}]$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{3\,!}{2\,!} = 3.$$

$$\therefore \quad x = 3y.$$

সুতরাং, *Anticipation*-এর বিন্যাস-সংখ্যা *Commencement*-এর বিন্যাস-সংখ্যার তিনগুণ।

Examples XVIII(A)

1. Find the values of : ${}^{10}P_4$, ${}^{25}P_2$, ${}^{20}P_r$. $(r < 15)$

2. How many different arrangements can be made by taking (i) four, (ii) all of the letters of the word *consider* ?

3. (i) If ${}^{n}P_4 = {}^{n-1}P_5 = 2 : 3$, find n.

(ii) ${}^{m+n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$, find m and n.

4. Two persons go into a railway carriage with 6 vacant seats. In how many different ways can they sit themselves ?

5. How many different numbers can be formed by taking 4 out of the 7 digits 0, 2, 4, 5, 7, 8, 9 using any of them only once ?

6. How many numbers between 3000 and 4000 can be formed with the digits 9, 3, 4, 6 ?

7. How many numbers between 100 and 1000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

8. How many different numbers can be formed by using the seven digits 2, 3, 4, 3, 3, 1, 2 ? How many with the digits 2, 3, 4, 3, 3, 0, 2 ?

9. In how many of the permutations of 10 things 4 at a time will one particular thing (i) always occur, (ii) never occur ?

10. There are 25 stations on a railway line. How many different kinds of single tickets must be printed so that it may be possible to book from one station to another ?

11. Out of the 26 letters of the English alphabet in how many ways can a word be made consisting of 5 different letters, two of which must be *a* and *e* ?

12. How many even numbers of 5 digits can be formed with the digits 0, 2, 3, 3, 4, 7 ?

13. Prove that

$$^{n}P_{n}=1+1.{}^{1}P_{1}+2.{}^{2}P_{2}+3.{}^{3}P_{3}+\cdots+(n-1).{}^{n-1}P_{n-1}.$$

14. How many words can be formed with 3 consonants and 2 vowels taken from the English alphabet ?

15. A man likes to send his four sons in 6 different professions. In how may different ways can the sons take up the professions, if no two of them enter the same profession ?

16. Five gentlemen and one lady wish to enter a bus with only three vacant seats ; in how many ways can the seats be occupied (i) when one of the places is to be occupied by the lady, (ii) when there is no restriction.

17. Of the words formed with all the letters of the word *Pneumonia* how many will not begin with *PN* ?

18. Find how many words can be formed with the letters of the word *abstemious*, so that the 5 vowels always appear together.

19. Of the words formed with all the letters of the word *Combine*, how many will begin with *C* and end in *e* ?

20. In how many ways can the letters of the word *Article* be arranged, so that the vowels may occupy only odd positions.

21. Find the number of arrangements that can be made of the letters of the word *Youngster* so that the vowels may not all be in consecutive position in anyone of them.

22. In how many ways can 24 P. U. and 17 H. S. candidates be arranged in a line so that no two H. S. candidates may occupy consecutive position ?

23. Find the number of different arrangements that can be made of the bars of seven colours (violet, indigo, blue, green, yellow, orange and red) so that blue and green shall never come together.

24. Find the number of ways in which 10 different books may be arranged on a shelf so that two particular books shall never come together.

25. Find the number of arrangements that can be made with the letters of the word *emulation* all at a time so that the vowels may not all be in consecutive positions in any of them.

26. Find how many different words can be formed with 5 given letters 3 consonants and 2 vowels, no two consonants being juxtaposed in any word.

27. In how many ways can n examination papers be arranged so that best and worst papers never come together ?

28. How many different permutations can be made out of the letters of the following words taken all together :

(i) India (ii) Calcutta

(iii) Procession (iv) Committee

(v) Constantinople (vi) Examination

(vii) Abracadabra (viii) Nomenclature.

29. Of the words formed with all the letters of the word *different* how many will begin with d and end in t ?

30. If X, Y, Z denote the number of different permutations that can be made from the words

Permutation, Combination, Arrangement,

show that $XY = Z$.

31. Show that the letters of the word *Calcutta* can be arranged in twice as many ways as the letters of the word *America.*

32. A library has 5 copies of one book, 4 copies of each of two books, 6 copies of each of three books and single copies of eight books. In how many ways can all the books be arranged ?

33. There are fifteen rowing clubs ; two of the clubs have each three boats on the river, five others have each two and remaining eight have each one ; find an expression for the number of different lists that can be formed of the order of the 24 boats, observing that the second boat of a club must occur after the first and third after the second.

34. In how many ways can the letters of the word *Utilitarianism* be re-arranged without changing the position of any of the vowels ?

35. Find the number of ways in which the letters of the word *arrange* can be arranged, so that two r's do not come together. In how may ways the word can be arranged if neither the two r's nor the two a's are allowed to come together.

36. There are 9 letters of which some are alike and the rest all different ; if 15120 words can be formed with them all together, how many letters are alike ?

ANSWERS

1. (i) 5040 ; (ii) 600; (iii) 20. 19. 18····$(21-r)$.
2. (i) 1680 ; (ii) 40320. **3.** (i) 8 ; (ii) $m=6, n=2$. **4.** 30.
5. 620. **6.** 6. **7.** 120. **8.** 420; 360.
9. 2016; 3024. **10.** 600. **11.** 242880. **12.** 60.
14. 159600. **15.** 360. **16.** 60, 120. **17.** 357840.
18. 86400. **19.** 120. **20.** 576. **21.** 332640.
22. $\frac{25!\,24!}{8!}$. **23.** 3600. **24.** 2903040. **25.** 348480.
26. 12. **27.** $(n-2)\,\underline{|n-1}$ **28.** (i) 60; (ii) 5040; (iii) $\frac{10!}{2!^2}$;
(iv) $\frac{9!}{2!^3}$; (v) $\frac{14!}{2!^2\,3!}$; (vi) 4989600; (vii) 83160;
(viii) $\frac{12!}{2!^3}$. **29.** 1260. **32.** $\frac{39!}{5!\,4!^2\,6!^3}$. **33.** $\frac{24!}{3!^2.\,2!^3}$.
34. 2519. **35.** 900; 660. **36.** 4.

Sec. B. সমবায়

18·7. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা নির্ণয়। ($r \leqslant n$)

[*To find the number of combinations of n dissimilar things taken r at a time* ($r \leqslant n$).]

মনে কর, নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা x. এই x-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক বস্তু আছে এবং এই এক একটি সমবায়ের সকল বস্তু লইয়া যদি সম্ভাব্য বিভিন্ন সকল প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়, তবে একটি সমবায় হইতেই $\lfloor r$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ x-সংখ্যক সমবায় হইতে সর্বসমেত $x \times \lfloor r$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

এখন, x-সংখ্যক সমবায়গুলির প্রত্যেকটির অন্তর্গত r-সংখ্যক বস্তুগুলি সম্ভাব্য সকল প্রকারে বিন্যস্ত করিলে, n-সংখ্যক বস্তুগুলি হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায় তাহার সমান হইবে।

$$\therefore \quad x \times \lfloor r = {}^nP_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} \qquad [\ \S\ 18{\cdot}3\ ]$$

$$\therefore \quad x = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}.$$

এক্ষণে, n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা যদি ${}^nC_r$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা যায় তবে আমরা লিখিতে পারি

$${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r},$$

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_0 = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor 0 \lfloor n-0} = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n} = 1. \qquad (\because \lfloor 0 = 1)$

বিকল্প প্রমাণ: মনে কর, n-সংখ্যক বস্তুগুলি $a, b, c, d, \ldots$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষর এবং ইহাদের মধ্য হইতে একযোগে r-সংখ্যক অক্ষর লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা ${}^nC_r$.

এই সকল সমবায়ের যতগুলিতে 'a' অক্ষরটি আছে, তাহা স্থির করিতে

হইলে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে একযোগে $(r-1)$-সংখ্যক অক্ষর লইয়া সমবায় গঠন করতঃ প্রত্যেকটির সহিত 'a' যুক্ত করিতে হয়।

$\therefore$ যে সকল সমবায়ে 'a' অক্ষরটি আছে তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$.

অনুরূপভাবে, যে সকল সমবায়ে 'b' অক্ষর আছে তাহাদের সংখ্যা ${}^{n-1}C_{r-1}$ এবং n-সংখ্যক অক্ষরগুলির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রেই ইহা প্রযোজ্য।

$\therefore$ n-সংখ্যক অক্ষর হইতে r-সংখ্যক অক্ষর একযোগে লইয়া গঠিত সমবায়গুলি যদি লেখা যায়, তবে n-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি ঐ সমবায়গুলির মধ্যে ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ এই সমবায়গুলিতে লিখিত অক্ষর-সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

কিন্তু ইহা সুস্পষ্ট যে, নির্ণেয় ${}^{n}C_{r}$ সমবায়গুলির প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক অক্ষর থাকায় মোট অক্ষর-সংখ্যা $= r \times {}^{n}C_{r}$.

$$\therefore \quad r \times {}^{n}C_{r} = n \times {}^{n-1}C_{r-1},$$

$$\text{বা,} \quad {}^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

অনুরূপভাবে,
$$ {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}.$$

$$ {}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3}.$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$ {}^{n-r+2}C_{2} = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_{1}$$

$$ {}^{n-r+1}C_{1} = \frac{n-r+1}{1} \times {}^{n-r}C_{0} = \frac{n-r+1}{1}.$$

$$[\because {}^{n-r}C_{0} = 1]$$

এক্ষণে, উভয় পক্ষের রাশিগুলি পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিলে লব্ধ গুণফল দুইটি সমান হইবে এবং উভয় গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারিত করিয়া আমরা পাই

$$ {}^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times \frac{n-1}{r-1} \times \frac{n-2}{r-2} \times \cdots\cdots \times \frac{n-r+2}{2} \times \frac{n-r+1}{1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r.(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1).\,\underline{|n-r}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}.$$

18·8. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত যে সমবায়গুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু (i) সতত বর্তমান এবং (ii) সতত অবর্তমান তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of combinations of n things taken r at a time, in which p particular things always (i) occur and (ii) do not occur.*]

(i) প্রথমেই n-সংখ্যক বস্তু হইতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখ। তারপর অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-p)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় গঠন কর। এই লব্ধ সমবায়গুলির প্রত্যেকটির সহিত পৃথকীকৃত p-সংখ্যক বস্তু যুক্ত করিলে r-সংখ্যক বস্তু-সমন্বিত যে সকল সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত বর্তমান তাহা পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা} = {}^{n-p}C_{r-p}.$$

(ii) আবার, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত যে সকল সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত অবর্তমান, তাহা স্থির করিতে হইলে প্রথমেই n-সংখ্যক বস্তু হইতে ঐ p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সারাইয়া রাখ। তাহা হইলে অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু অবর্তমান। এখন এই $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়গুলির কোনটিতেও p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে না।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা} = {}^{n-p}C_{r}.$$

18·9. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে (n – r)-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা পরস্পর সমান।

[*The number of combinations of n things taken r at a time is equal to the number of combinations of n things taken (n – r) at a time.*]

n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় গঠন করিতে যতবার r-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যায়, ততবার বাকী $(n-r)$-সংখ্যক বস্তুর একটি ভাগ (group) পড়িয়া থাকে, অর্থাৎ n-সংখ্যক বস্তু হইতে

r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা n-সংখ্যক বস্তু হইতে $(n-r)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যার সমান।

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

এই লব্ধ ফল শিক্ষার্থিগণের মনে রাখা প্রয়োজন, যেহেতু ইহার সাহায্যে কোন প্রশ্নের সংখ্যা সংক্রান্ত গণনাকার্য সংক্ষেপে করা যায়।

বিকল্প প্রমাণঃ § 18·7 অনুসারে,

$$ {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r . \lfloor n-r}, $$

আবার, $$ {}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \; \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \; \lfloor r}. $$

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। উপরোক্ত আলোচনা হইতে স্পষ্টই যদি ${}^nC_r = {}^nC_s$ হয়, তবে $r = s$ অথবা $r = n - s$ অর্থাৎ $r + s = n$.

Ex. 1. *Out of 15 players in how many ways can a team of eleven be chosen?*

দলগঠনের নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^{15}C_{11} = {}^{15}C_{15-11} = {}^{15}C_4$

$$= \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} = 1365.$$

${}^{15}C_{11}$-দ্বারা নির্দেশিত সংখ্যা নিরূপণ করিতে হইলে পনরটি উৎপাদক সম্বলিত লব ও হর যুক্ত একটি ভগ্নাংশ সরল করা প্রয়োজন হইত।

Ex. 2. প্রমাণ কর : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.

এক্ষণে, $$ {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \; \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \; \lfloor n-r+1} $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \; \lfloor n-r} . \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1} \right) $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \; \lfloor n-r} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} $$

$$= \frac{\lfloor n \times (n+1)}{\lfloor r-1 \, \lfloor n-r \times r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \, \lfloor n-r+1} = {}^{n+1}C_r.$$

$[\because \lfloor n \times (n+1) = \lfloor n+1, \lfloor r-1 \times r = \lfloor r$

এবং $\lfloor n-r \times (n-r+1) = \lfloor n-r+1.]$

18·10. r-এর মান কত হইলে ${}^nC_r$-এর মান চরম হইবে।

[*To find for what value of r the value of* ${}^nC_r$ *is greatest.*]

আমরা জানি $${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1).r}$$

এবং $${}^nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+3)(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-2)(r-1)};$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}. \quad \therefore \quad \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}.$$

গুণনকারী উৎপাদক $\frac{n-r+1}{r}$ অর্থাৎ $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, r এর মান যখন 1 হইতে n পর্যন্ত (মাত্র অখণ্ড ধন সংখ্যাগুলির মধ্য দিয়া) বর্ধিত হয়, তখন $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$ এর মান হ্রাসপ্রাপ্ত হইতে থাকে। লক্ষ্য কর, কিছুক্ষণ r এর একটি নির্দিষ্ট (n, নির্ভর) মান পর্যন্ত গুণনকারী উৎপাদকটি 1 এর অপেক্ষা বৃহত্তর থাকিবে অর্থাৎ ${}^nC_r > {}^nC_{r-1}$, এবং সেই মানের পর $\left(\frac{n+1}{r} - 1\right)$, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ তখন ${}^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হইবে।

সুতরাং r এর মানবৃদ্ধির সহিত যতক্ষণ $\frac{n-r+1}{r}$ এর মান 1 অপেক্ষা বেশী থাকে ততক্ষণ ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$,.... ${}^nC_n$ শ্রেণীটির পদগুলি ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে এবং তারপর r এর মানবৃদ্ধিহেতু $\frac{n-r+1}{r}$ এর মান যখন 1 অপেক্ষা কম হয়, তখন এই শ্রেণীর পদগুলির মান ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকে।

$\therefore$ যখন $\frac{n-r+1}{r}$ এর মান ঠিক 1 অথবা 1 অপেক্ষা কিঞ্চিৎ বেশী হয় তখন ^nC_r এর মান আর বৃদ্ধি না পাইয়া চরম মানে উপনীত হয়।

অর্থাৎ ^nC_r এর মান চরম হয়, যখন $\frac{n-r+1}{r}$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=1$ হয়,

অর্থাৎ, $n-r+1$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=r$ হয়,

অর্থাৎ, $n+1$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=2r$ হয়,

অর্থাৎ r কিঞ্চিৎ $<$ বা ঠিক $=\frac{n+1}{2}$ হয়।

এখন প্রাপ্ত এই শর্তের সহিত সামঞ্জস্য রাখিয়া r এর বৃহত্তম মান নির্ণয় করিতে হইবে।

(i) এখন, মনে কর n একটি যুগ্ম অখণ্ড রাশি $2m$ এর সমান।

তাহা হইলে $\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 1 হইতে m পর্যন্ত r এর সকল মানের ক্ষেত্রে $\frac{n+1}{2}>r$.

$\therefore$ $r=m=\frac{n}{2}$ ধরিলে আমরা ^nC_r এর চরম মান পাই $^nC_{\frac{n}{2}}$.

(ii) আবার, n একটি অযুগ্ম অখণ্ড রাশি $2m+1$ হইলে $\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}$ $=m+1$, সুতরাং, 1 হইতে m পর্যন্ত r এর সকল মানের ক্ষেত্রে $\frac{n+1}{2}>r$.

কিন্তু, $r=m+1$ হইলে, $\frac{n-r+1}{r}=1$ হয়।

এবং তখন $^nC_{m+1}={}^nC_m$ হয়, অর্থাৎ $^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ হয়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে অর্থাৎ n একটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হইলে, r যখন $\frac{n+1}{2}$ বা $\frac{n-1}{2}$ হইবে তখন ^nC_r এর মান চরম হইবে।

$\therefore$ ^nC_r এর চরম মান $^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n-1}{2}}$.

এখানে লক্ষণীয় যে, $n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2}$ বলিয়া, ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}$,

যেহেতু ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

18·11. উদাহরণাবলী

Ex. 1. *In a certain class there are* 15 *boys. How many different football teams can be made out of them when each team contains* 11 *players ?*

15 জন বালক হইতে 11 জন করিয়া বিভিন্ন দল গঠন করিতে হইবে। অতএব, নির্ণেয় দল-সংখ্যা

$$={}^{15}C_{11}={}^{15}C_4=\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}$$

$$=15\times 13\times 7=1365.$$

Ex. 2. *Prove that* ${}^{2n}C_n=\frac{2^n.1.3.5.7\ldots(2n-1)}{\lfloor n}$

এক্ষণে, $${}^{2n}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}=\frac{1.2.3.4\ldots.(2n-2)(2n-1).2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$$

$$=\frac{2.4.6.8\ldots.(2n-2).2n.1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{\lfloor n\,\lfloor n}$$

$$=\frac{2^n(1.2.3\ldots.n).1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{\lfloor n.\lfloor n}$$

$$=\frac{2^n.1.3.5\ldots.(2n-1)}{\lfloor n}.$$

Ex. 3. *Out of the letters of the word* dangerously *how many words can be formed each containing* 3 *consonants and* 2 *vowels ?*

প্রদত্ত শব্দটিতে consonant-এর সংখ্যা 7 এবং vowel-এর সংখ্যা 4. এখন, 7টি consonant হইতে 3টি এবং 4টি vowel হইতে 2টি অক্ষর নির্বাচনের বিভিন্ন উপায় যথাক্রমে ${}^7C_3$ এবং ${}^4C_2$.

আবার, ${}^7C_3$-সংখ্যক consonant নির্বাচনের প্রত্যেক উপায়ের সহিত ${}^4C_2$-সংখ্যক vowel নির্বাচনের প্রত্যেক উপায় যুক্ত করা যায় বলিয়া vowel এবং consonant নির্বাচনের মোট উপায় $={}^7C_3\times{}^4C_2$.

এইরূপে নির্বাচিত 5টি বিভিন্ন অক্ষরযুক্ত প্রত্যেকটি শব্দ আবার নিজেদের মধ্যে $\lfloor 5$ রকম উপায়ে সাজান যায়।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = {}^7C_3 \times {}^4C_2 \times \lfloor 5 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 4 \lfloor 3} \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \times \lfloor 2} \times \lfloor 5$$

$$= 5 \times \lfloor 7 = 25200.$$

Ex. 4. *Find the number of triangles which can be formed by joining three angular points of a quindecagon and the number of its diagonals.*

এই পঞ্চদশভুজের যে-কোন তিনটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিলে এক-একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং পঞ্চদশভুজের শীর্ষবিন্দু-সংখ্যা 15.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা} = {}^{15}C_3 = \frac{15.14.13}{1.2.3} = 455.$$

আবার, এই পঞ্চদশভুজের দুইটি দুইটি করিয়া শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিয়া প্রাপ্ত সরল রেখার সংখ্যা

$$= {}^{15}C_2 = \frac{15.14}{1.2} = 105.$$

কিন্তু এই সংখ্যার মধ্যে পঞ্চদশভুজের 15টি বাহুও অন্তর্ভুক্ত।

$$\therefore \text{ পঞ্চদশভুজের কর্ণের নির্ণেয় সংখ্যা} = 105 - 15 = 90.$$

Ex. 5. *In how many ways can a committee of 5 persons of whom 2 must be Bengalees, 2 must be Assamese and 1 a Bihari, be chosen from a group of 4 persons of each province?*

এই স্থলে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী কমিটি গঠন করিতে হইলে 4 জন বাঙ্গালীর মধ্য হইতে 2 জন, 4 জন অসমীয়ার মধ্য হইতে 2 জন এবং 4 জন বিহারীর মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিতে হইবে।

4 জন বাঙ্গালীর মধ্য হইতে 2 জনের নির্বাচন ${}^4C_2$ রকমে, 4 জন অসমীয়ার মধ্য হইতে 2 জনের নির্বাচন ${}^4C_2$ রকমে এবং 4 জন বিহারীর মধ্য হইতে 1 জনের নির্বাচন ${}^4C_1$ রকমে করা যায়।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় কমিটি-সংখ্যা} = {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1 = \frac{4.3}{1.2} \times \frac{4.3}{1.2} \times \frac{4}{1}$$

$$= 6 \times 6 \times 4 = 144.$$

Ex. 6. *Find in how many ways a selection of 5 out of 10 things can be made when (i) one particular thing is always included, and (ii) one particular thing is always excluded.*

(i) প্রত্যেক নির্বাচনে একটি নির্দিষ্ট বস্তু লইতে হইলে, 10টি বস্তুর মধ্য হইতে পূর্বেই সেইটিকে লইয়া অবশিষ্ট 9টি বস্তু হইতে 4টি নির্বাচন করিতে হয়।

∴ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^9C_4 = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126.$

(ii) প্রত্যেক নির্বাচনে যদি কোন এক নির্দিষ্ট বস্তু না থাকে, তবে প্রথমেই সেই বস্তুটি সরাইয়া রাখিয়া অবশিষ্ট 9টি বস্তু হইতে 5টি নির্বাচন করিতে হইবে।

∴ এক্ষেত্রে নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^9C_5 = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126.$

Ex. 7. *A cricket team of eleven has got to be selected from 13 players of whom only 4 can bowl ; in how many ways can the team be formed so as to include at least two bowlers ?*

11 জন খেলোয়াড় লইয়া গঠিত দলটিতে অন্ততঃ 2 জন bowler থাকিবে বলিয়া খেলোয়াড়দের যে-কোন এক নির্বাচনে 2, 3 অথবা 4 জন bowler থাকিতে পারে।

∴ Bowler নির্বাচন ${}^4C_2$, ${}^4C_3$ এবং ${}^4C_4$ রকমে করা যায়। এখন, 2 জন bowler নির্বাচিত হইলে, 11 জনের দলগঠনে bowler বাদে অবশিষ্ট 9 জনকে লইতে হইবে এবং এই নির্বাচন ${}^9C_9$ রকমে সম্পন্ন করা যায়।

∴ 2 জন bowler লইয়া দলগঠন ${}^4C_2 \times {}^9C_9$ রকমে করা যায়।

3 জন bowler নির্বাচিত হইলে, bowler বাদে অবশিষ্ট 9 জনের মধ্য হইতে 11 জনের দলগঠনে 8 জন নির্বাচন করিতে হইবে এবং ইহা ${}^9C_8$ রকমে করা যায়।

∴ 3 জন bowler লইয়া খেলোয়াড় দল ${}^4C_3 \times {}^9C_8$ রকমে গঠন করা যায়। আবার, গঠিত দলে 4 জন bowler থাকিলে, দলগুলি ${}^4C_4 \times {}^9C_7$ রকমে গঠন করা যায়।

∴ দলগুলি বিভিন্ন রকমে গঠনের নির্ণেয় নির্বাচন-সংখ্যা

$$= {}^4C_2 \times {}^9C_0 + {}^4C_3 \times {}^9C_1 + {}^4C_4 \times {}^9C_2$$

$$= \frac{4.3}{1.2} \times 1 + 4 \times 9 + 1 \times \frac{9.8}{1.2}$$

$$= 6 + 36 + 36 = 78.$$

Ex. 8. *In how many different ways can 3 prizes, one of Rs. 20, one of Rs. 15, and one of Rs. 10, be allotted to three boys out of a class of 20? If the prizes were of equal value, Rs. 15 each, in how many ways could they be awarded?*

20 জন বালকের মধ্যে পুরস্কারলাভের যোগ্য বালক ${}^{20}C_3$ রকমে নির্বাচন করা যায়। এবং নির্বাচিত 3 জন বালকের এক এক প্রস্থকে বিভিন্ন মূল্যের 3টি পুরস্কার ${}^3P_3$ রকমে দেওয়া যায়।

∴ বালকদের মধ্যে ভিন্ন ভিন্ন রকমে পুরস্কার বিতরণের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$= {}^{20}C_3 \times {}^3P_3 = \frac{20.19.18}{1.2.3} \times \underline{|3} = 6840.$$

কিন্তু পুরস্কারগুলি যদি সমমূল্য হয়, তবে এক প্রস্থ নির্বাচিত বালকদের মাত্র এক প্রকারেই 3টি পুরস্কার দেওয়া যাইবে।

∴ এক্ষেত্রে বিভিন্ন উপায়ে পুরস্কার বিতরণের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$= {}^{20}C_3 = \frac{20.19.18}{1.2.3} = 1140.$$

Ex. 9. *Find the number of ways in which* (i) *a selection,* (ii) *an arrangement of 4 letters can be made from the letters of the word* assassination.

Assassination শব্দটিতে 6 প্রকারের 13টি অক্ষর আছে—4টি *s*, 3টি *a*, 2টি *i*, 2টি *n* এবং *o*, *t* একটি করিয়া।

এই অক্ষরগুলি হইতে 4টি করিয়া লইয়া নির্বাচন করিতে হইলে নিম্নলিখিত প্রকারে নির্বাচন করা যায়

(1) চারিটি অক্ষর একপ্রকার।

(2) তিনটি অক্ষর একপ্রকার এবং একটি ভিন্ন প্রকার।

(3) দুইটি একপ্রকার এবং অপর দুইটি অন্য একপ্রকার।

(4) দুইটি একপ্রকার এবং অপর দুইটি ভিন্ন ভিন্ন প্রকার।

(5) চারিটি অক্ষর বিভিন্ন প্রকার।

(1) এই ক্ষেত্রে চারিটি s লইয়া মাত্র একটি নির্বাচন হইতে পারে।

(2) এই ক্ষেত্রে চারিটি s হইতে তিনটি এবং তিনটি 'a' হইতে দুইপ্রকারে লওয়া যায়। অবশিষ্ট 5 প্রকার বিভিন্ন অক্ষর হইতে একটি লইয়া ঐ দুইপ্রকার নির্বাচনের সহিত যুক্ত করিলে 4 অক্ষরের নির্বাচন পাওয়া যায়।

$\therefore$ এই নির্বাচন-সংখ্যা $= 2 \times 5$ বা 10.

(3) এই ক্ষেত্রে চারিপ্রকার অক্ষর a, s, i, n দুইটি করিয়া আছে। (এখানে যদিও s চারিটি এবং a তিনটি আছে তবুও আমাদের দুইটি করিয়া লইতে হইবে বলিয়া a ও s দুইটি করিয়া বলা হইল)। এখন আমাদের এই 4 জোড়া অক্ষরের 2 জোড়া নির্বাচন করিতে হইবে এবং তাহা ${}^4C_2$ বা 6 রকমে করা যায়।

$\therefore$ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 6$.

(4) এই নির্বাচন 4×10 প্রকারে করা যায় ; প্রথমে 4 জোড়া অক্ষরের মধ্যে একটি ${}^4C_1$ বা 4 প্রকারে নির্বাচন করিয়া আর 2টি অক্ষর অবশিষ্ট 5 প্রকার অক্ষর হইতে ${}^5C_2$ বা 10 প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 4 \times 10 = 40$.

(5) (i) এই প্রকার নির্বাচন ${}^6C_4$ বা 15 প্রকারে করা যায়। কেননা আমাদের 6 প্রকার অক্ষর a, s, i, n, o, t হইতে 4টি বিভিন্ন অক্ষর নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 15$.

$\therefore$ মোট নির্বাচন-সংখ্যা $= 1 + 10 + 6 + 40 + 15 = 72$.

(ii) আবার, মোট বিন্যাস-সংখ্যা স্থির করিতে হইলে উপরের 1 হইতে 5 পর্যন্ত সকল শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 4টি অক্ষর সম্ভাব্য সকল প্রকারে বিন্যস্ত করিতে হইবে।

$\therefore$ (1)-হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 1$, যেহেতু চারিটি অক্ষর একই প্রকার।

(2)-হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 10 \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 40$;

(3)-হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 6 \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 36$;

(4)-হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 40 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 480$;

এবং (5)-হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 15 \times \lfloor 4 = 360$.

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= 1 + 40 + 36 + 480 + 360 = 917$.

Ex. 10. *A railway carriage will accommodate* 5 *passengers on each side ; in how many ways can* 10 *persons take their seats when two of them decline to face the engine, and a third cannot travel with his back towards the engine ?*

মনে কর, গাড়ীর মধ্যে দুইখানি বেঞ্চ P ও Q. P বেঞ্চে উপবিষ্ট যাত্রীরা ইঞ্জিনমুখো হইয়া এবং Q বেঞ্চে উপবিষ্ট যাত্রীরা ইঞ্জিনের দিকে পেছন ফিরিয়া উপবেশন করে। মনে কর, 10 জন যাত্রীর মধ্যে A, B নামক দুইজন যাত্রী ইঞ্জিনমুখো হইয়া গাড়ীতে উপবেশন করিতে অসম্মতি জানায় এবং C নামক অপর এক যাত্রী ইঞ্জিনের দিকে পেছন ফিরিয়া গাড়ীতে ভ্রমণ করিতে পারে না।

$\therefore$ A, B নামক যাত্রিদ্বয় Q বেঞ্চে এবং C নামক যাত্রী P বেঞ্চে আসন গ্রহণ করিবে।

এখন, P বেঞ্চে বসিবার জন্য অবশিষ্ট 7 জন যাত্রীর মধ্যে 4 জন এবং Q বেঞ্চে বসিবার জন্য 3 জন নির্বাচন করিতে হইবে।

P বেঞ্চের জন্য 7 জন যাত্রীর মধ্যে 4 জন যে-কোন একপ্রকারে নির্বাচন করার সঙ্গে সঙ্গে Q বেঞ্চের জন্য অবশিষ্ট 3 জনের নির্বাচন সম্পন্ন হইবে।

$\therefore$ P, Q বেঞ্চ দুইটির জন্য বিভিন্ন প্রকার নির্বাচন-সংখ্যা সমান এবং দুই বেঞ্চের জন্য নির্বাচন যুগপৎ সম্পন্ন হয় বলিয়া যে-কোন এক নির্বাচনে দুই বেঞ্চের নির্বাচন একটিমাত্র ধরা যাইতে পারে। এই নির্বাচন-সংখ্যা স্পষ্টতঃই ${}^7C_4$.

এখন, যে-কোন একপ্রকার এইরূপ নির্বাচনে প্রত্যেক বেঞ্চে উপবিষ্ট 5 জন যাত্রীকে তাহাদের মধ্যে $\lfloor 5$ প্রকারে সাজানো যায়।

যেহেতু, P বেঞ্চে যাত্রীর উপবেশনের প্রত্যেক প্রকারের সহিত Q বেঞ্চে যাত্রীর উপবেশনের প্রত্যেক প্রকার যুক্ত করা যায় বলিয়া দুই বেঞ্চে যাত্রীরা মোট $\lfloor 5 \times \lfloor 5$ প্রকারে বসিতে পারে এবং ইহা একপ্রকার নির্বাচনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

কিন্তু এই নির্বাচনের মোট সংখ্যা $= {}^7C_4$.

∴ দুইটি বেঞ্চে 10 জন যাত্রীর বিভিন্ন প্রকারে উপবেশন করিবার মোট সংখ্যা

$$= {}^7C_4 \times \lfloor 5 \times \lfloor 5 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 4 \lfloor 3} \times \lfloor 5 \times \lfloor 7 = \lfloor 7 \times 5 \times 5.4$$
$$= 504000.$$

Ex. 11. *Eight Indians and six Europeans are candidates for six vacancies in an office of which three must be held by Indians, two by Europeans and the remaining one by either an Indian or a European. In how many ways can they be filled in ?*

অফিসের 6টি শূন্যপদে নিয়োগের জন্য 8 জন ভারতীয়দের মধ্য হইতে 3 জন ${}^8C_3$ প্রকারে এবং 6 জন ইউরোপীয়দের মধ্য হইতে 2 জন ${}^6C_2$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

এখন, প্রত্যেক প্রকার ভারতীয় নির্বাচনের সহিত প্রত্যেক প্রকার ইউরোপীয় নির্বাচন যুক্ত করা যায় বলিয়া 5টি শূন্যপদ পূরণের জন্য এই দুই নির্বাচন অর্থাৎ ভারতীয় নির্বাচন ও ইউরোপীয় নির্বাচন ${}^8C_3 \times {}^6C_2$ প্রকারে করা যায়।

বাকি শূন্যপদটি অবশিষ্ট 5 জন ভারতীয়দের মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিয়া ${}^5C_1$ প্রকারে অথবা অবশিষ্ট 4 জন ইউরোপীয়দের মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিয়া ${}^4C_1$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

∴ এই শেষোক্ত শূন্যপদটি $({}^5C_1 + {}^4C_1)$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

∴ শূন্যপদ ছয়টি পূরণ করিবার মোট উপায়ের সংখ্যা

$$= {}^8C_3 \times {}^6C_2 \times ({}^5C_1 + {}^4C_1)$$
$$= \frac{8.7.6}{1.2.3} \times \frac{6.5}{1.2} \times (5+4)$$
$$= 56 \times 15 \times 9 = 7560.$$

Ex. 12. *Find the number of different straight lines that can be obtained by joining n different points, no three of which are collinear, excepting p points which are collinear. Find also the number of triangles formed by joining them.*

প্রদত্ত n-সংখ্যক সকল বিন্দুই যদি এরূপ হইত যে, তাহাদের মধ্যে কোন তিনটি সমরেখীয় নয়, তাহা হইলে বিন্দুগুলি পরস্পর যুক্ত করিয়া লব্ধ সরলরেখার সংখ্যা হইত ${}^nC_2$.

কিন্তু p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখীয় হওয়ায় তাহাদিগকে পরস্পর যুক্ত করিয়া ${}^pC_2$-সংখ্যক সরলরেখার পরিবর্তে একটিমাত্র সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি পরস্পর যুক্ত করিয়া লব্ধ সরলরেখার সংখ্যা

$$={}^nC_2-{}^pC_2+1=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}+1.$$

আবার, n-সংখ্যক বিন্দুর কোন তিনটিই সমরেখীয় না হইলে তিনটি তিনটি করিয়া বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে লব্ধ মোট ত্রিভুজ-সংখ্যা হইত ${}^nC_3$. কিন্তু p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখীয় হওয়ায় এই বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া ${}^pC_3$-সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না।

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া লব্ধ ত্রিভুজের নির্ণেয় সংখ্যা

$$={}^nC_3-{}^pC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{p(p-1)(p-2)}{6}.$$

Ex. 13. *A candidate is asked to answer 8 questions from two groups each containing 6 questions and is not permitted to attempt more than 5 from anyone group. Find in how many ways he can make his choice of answering the questions fully ?*

প্রশ্নগুলি প্রতিভাগে ছয়টি করিয়া দুইভাগে বিভক্ত। কোন পরীক্ষার্থী প্রথম ভাগ হইতে 5টি এবং দ্বিতীয় ভাগ হইতে 3টি, অথবা প্রত্যেক ভাগ হইতে 4টি করিয়া, অথবা প্রথম ভাগ হইতে 3টি এবং দ্বিতীয় ভাগ হইতে 5টি প্রশ্ন উত্তরের জন্য নির্বাচন করিতে পারে।

∴ প্রশ্ন নির্বাচনের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$={}^6C_5\times{}^6C_3+{}^6C_4\times{}^6C_4+{}^6C_3\times{}^6C_5$$

$$=6\times\frac{6.5.4}{1.2.3}+\frac{6.5}{1.2}\times\frac{6.5}{1.2}+\frac{6.5.4}{1.2.3}\times6$$

$$=6\times20+15\times15+6\times20$$

$$=120+225+120=465.$$

প্রশ্নমালা XVIII (B)

1. Find the value of :

(i) ${}^{10}C_5$; (ii) ${}^{25}C_{23}$; (iii) ${}^{20}C_r$ $(r < 15)$.

2. If ${}^nC_5 : {}^{n-1}C_6 = 3 : 1$, find n.

3. If ${}^{15}C_r = {}^{15}C_{2r-6}$, find ${}^rC_4$. Explain the double answer.

4. If ${}^nP_r = 840$ and ${}^nC_r = 35$, find n and r.

5. If ${}^nP_r = 120.{}^nC_{n-r}$, find r.

6. If the number of permutations of n things 4 at a time is the number of combinations of $2n$ things 3 at a time as 22 : 3, find n.

7. If ${}^nC_r$ denote the number of combinations of n thing r at a time, prove that

$${}^{n+2}C_{r+1} = {}^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + 2.{}^nC_r.$$

8. If $m = {}^nC_2$, prove that ${}^mC_2 = 3.\ {}^{n+1}C_4$.

9. Twenty research-scholarships are vacant in an institution. How many batches of men can be chosen out of twentyfive candidates? How often may any particular candidates be selected ?

10. Find in how many ways can 16 books be selected out of 20 books no two of which are supposed to be the same.

11. How many different selections of five coins can be made from a purse containing a sovereign, a half-sovereign, a crown, a half-crown, a florin, a shilling, a six-pence and a penny ?

12. A father with eight children takes three at a time to the Zoological gardens, as often as he can without taking the same three children more than once. How often will he go, and how often will child go ?

13. In a boarding house a different set of 5 boarders is appointed in the executive committee every week. If the number of boarders be 12, find how many weeks will elapse before the same set of 5 boarders will be in office again.

14. Suppose 25 clerks are to be appointed out of 28 candidates of whom 4 are Behari and the rest are Bengalees. How many different selections can be made so that none of the Behari candidates may be excluded ?

15. In a municipal corporation there are 20 councillors and 8 aldermen. How many committees can be formed consisting of 5 councillors and 3 aldermen ?

16. A certain council consists of a chairman, two vice-chairmen and 12 other members. How many different committees of six can be formed, including always the chairman and only one vice-chairman ?

17. From 8 Indian and 5 Englishmen a committee of 7 is to be formed. In how many ways can this be done, (i) when the committee contains exactly 3 Englishmen, (ii) at least 3 Englishmen ?

18. There are 10 books of which 4 are English, 3 are French and 3 are German. In how many ways could a selection be made so as to include at least one of each language ?

19. Out of 17 consonants and 5 vowels, how many different words can be formed, each consisting of 3 consonants and 2 vowels ?

20. How many different triangles can be formed by joining the angular points of a decagon ? Find also the number of diagonals of the decagon.

21. At an election there are 5 candidates and 3 members are to be elected and a voter is entitled to vote for any number to be elected. In how many ways a voter chooses a vote ?

22. From 6 gentlemen and 4 ladies, a committee of 5 is formed. In how many ways can this be done so as to include at least one lady ?

23. In a group of 15 boys there are 7 boy-scouts. In how many ways can 12 boys be selected so as to include (i) exactly 6 boy-scouts (ii) at least 6 boy-scouts ?

24. A cricket team consisting of 11 players is to be selected from 2 groups consisting of 6 and 8 players respectively. In how many ways can the selection be made on the supposition that the group of six shall contribute *no fewer than* 4 players ?

25. (i) Find the number of ways in which p positive signs and n negative signs may be placed in a row so that no two negative signs shall be together. What is the restriction on p ?

(ii) At the Government Budget meeting there were eleven speakers, six for the Government and five for Opposition. In how many ways could the speeches have been made, if a member of the Government always spoke first and the speeches were alternately for the Government and the Opposition ?

26. Find in how many ways a party of 10 men may seat themselves in a railway carriage compartment which accommodates five men on each side.

27. A man has dozen friends of whom he wishes to invite 3 at a time to dinner on successive evenings as long as he can have different selection each time. For how many evenings it is possible for him to continue these parties, and how often will each of the 12 friends form one of the party ?

28. Show that the number of ways in which $(2n-1)$ white ball and n black ball can be arranged in a row so that no two black balls may be together is

$$\frac{2^n.\,1.\,3.\,5.\,....\,(2n-1)}{\underline{|n}}$$

29. A boat's crew consists of 8 oarsmen, of whom 3 can only row on one side and 2 only on the other. In how many ways can the crew be arranged and also the number of ways they can be selected.

30. How many combinations can be formed of eight counters marked 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 taking them 4 at a time, there being at least one odd and one even counter in each combination ?

31. How many triangles can be formed by joining the angular points of a polygon of n sides and how many diagonals tt has ?

32. Out of 15 teachers and 10 students a committee of 5 is to be formed. In how many ways can this be done so as to include at least one teacher in the committee ?

33. Find the number of combinations of the letters of the following words :

(i) Examination

(ii) Alliteration

34. (*a*) Find for what values of r the following quantities will be greatest

(i) ${}^{10}C_r$; (ii) ${}^{15}C_r$;

(iii) ${}^{2n}C_r$; (iv) ${}^{2n+1}C_r$;

and also the greatest values.

(*b*) Show that the greatest values of (iii) and (iv) bear a ratio 2 : 1.

35. An employer wishes to make up as many different parties as he can out of 16 employees, each party consisting of the same number ; how many should he call at a time ? In how many of these would the same man be found ?

36. How many letters of the word *Subamycin* should be taken to form a group so that the number of different groups may be greatest ? In how may of these will the letter S occur ?

ANSWERS

1. (i) 252; (ii) 300; (iii) $\dfrac{\lfloor 20}{\lfloor r \lfloor 20-r}$. **2.** 10. **3.** 15, 35.

4. $n=7, r=4.$ **5.** 5. **6.** 14. **9.** 53130; 42504. **10.** 4845.
11. 56. **12.** 56, 21. **13.** 792. **14.** 2024. **15.** 868224.
16. 990. **17.** 700, 1008. **18.** 735. **19.** 81600.
20. 120, 35. **21.** 25. **22.** 246. **23.** (i) 196 (ii) 252.
24. 344 **25.** (i) $\frac{(p+1)!}{n!\,(p-n+1)!}$, $p \geqslant n-1$. (ii) 86400.
26. 362880. **27.** 220, 55. **29.** 1728, 3. **30.** 68.
31. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \frac{n(n-3)}{2}$. **32.** 10624. **33.** (i) 136. (ii) 160.
34. (i) 5, 252; (ii) 7, 8, 6435; (iii) $n, \frac{(2n)!}{n!\,n!}$; (iv) $n, n-1, \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$.
35. 8, 12870 **36.** 4, 5, 70.

Sec. C. বিন্যাস ও সমবায় সংক্রান্ত বিবিধ জটিল প্রশ্নাবলীর সমাধান

18·12. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিটি বস্তু একবার, দুইবার, তিনবার, ··· r-সংখ্যকবার পর্যন্ত যতবার ইচ্ছা ততবার লইয়া r-সংখ্যক বস্তু-সম্বলিত বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of n things r at a time when each thing may be repeated once, twice, thrice,........ up to r times.*]

n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যাস-গঠন এবং n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া শূন্যস্থান পূরণ করা একই ব্যাপার। তবে, বর্তমান ক্ষেত্রে যে-কোন একটি বস্তু ইচ্ছামতো একবার, দুইবার, তিনবার,······ r-সংখ্যক বার পর্যন্ত যতবার ইচ্ছা লওয়া যায়।

এখন, প্রথম (শূন্য)-স্থান n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে, কেননা প্রথম স্থানে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করা যায়। প্রথম স্থান যে-কোন একরকমে পূর্ণ হইলে দ্বিতীয় স্থানও n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়, কারণ প্রথম স্থানে স্থাপিত বস্তুটির পুনর্ব্যবহারে কোন প্রতিবন্ধক নাই। সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান $n \times n$ বা n^2-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়। তৃতীয় স্থানও n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায় এবং প্রথম তিনটি স্থান $n \times n \times n$ বা n^3-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে এবং যতগুলি স্থান পূর্ণ হয় n-এর সূচক তাহার সমান লক্ষ্য করিয়া বলা যায় r-সংখ্যক শূন্যস্থান n^r-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= n^r$.

18·13. বৃত্তাকারে স্থাপিত বস্তুসমূহের বিন্যাস-সংখ্যা।

[*Number of permutations of things placed in a circle.*]

বৃত্তাকারে স্থাপিত বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়কালে বস্তুগুলি কোন বৃত্তে পাশাপাশি স্থাপন করিয়া যে-সকল ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায়, তাহাদের মধ্যে যেগুলির আপেক্ষিক অবস্থান একই প্রকার অর্থাৎ সবগুলির অবস্থানক্রম ঘড়ির

কাঁটার সম-দিগ্‌গামী (clockwise) অথবা সবগুলির অবস্থানক্রম ঘড়ির কাঁটার বিপরীত-দিগ্‌গামী (anti-clockwise) সেই বিন্যাসগুলিকে অভিন্ন ধরা হয়।

মনে কর, A, B, C, D, E পাঁচটি অক্ষর দ্বারা সূচিত পাঁচ ব্যক্তি অক্ষরগুলির ক্রমানুসারে পরস্পর হাত ধরাধরি করিয়া পর পর ঘড়ির কাঁটা যেদিকে চলে সেইভাবে দাঁড়াইল। এখন তাহারা যদি হাত ধরাধরি অবস্থায় বৃত্তাকারে clockwise বা anti-clowise যে-কোনদিকে একটু ঘুরিয়া যায়, তবে তাহাদের আপেক্ষিক অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় না বলিয়া তাহাদের বিন্যাসও অভিন্ন থাকে। আবার, এই সকল ব্যক্তি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে যায়, তাহার বিপরীত দিকে A, B, C, D, E এই ক্রমে হাত ধরাধরি করিয়া বৃত্তাকারে দাঁড়ায়, তবে তাহাদের পূর্ব অবস্থানের সহিত তুলনা করিলে দেখা যায় যে, কোন এক ব্যক্তির দুইপার্শ্বে যে দুই ব্যক্তি পূর্বে ছিল এখনও সেই দুই ব্যক্তিই আছে, পার্থক্য এই যে, পূর্বে বামপার্শ্বে অবস্থিত ব্যক্তি এখন দক্ষিণপার্শ্বে আসিয়াছে এবং দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থিত ব্যক্তি বামপার্শ্বে গিয়াছে। সুতরাং, এই দুই বিন্যাস বিভিন্ন ধরা হয়।

যদি কতকগুলি বিভিন্ন রঙের ছোট ছোট বল লইয়া একটি মালা তৈরী করা হয়, তবে বলগুলির স্থান অদলবদল করিলে বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। কোন এক ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে বলগুলি সেইক্রমে সাজানো এবং অপর এক ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে বলগুলি তাহার বিপরীতদিকে একইক্রমে সাজানো, তবে এই দুই-বিন্যাস অভিন্ন হইবে, কেননা মালাটিকে উল্টাইয়া ধরিলে দুই বিন্যাসের মধ্যে কোনও পার্থক্য পরিলক্ষিত হয় না।

সুতরাং, বৃত্তাকারে স্থাপিত বস্তুসমূহের বিন্যাস নির্ণয় করিতে হইলে বস্তুগুলির একটিকে নির্দিষ্ট একস্থানে রাখিয়া অবশিষ্টগুলিকে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে স্থাপন করিয়া বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়।

বৃত্তাকারে স্থাপিত n-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of n things placed in a circle.*]

বৃত্তাকারে স্থাপিত n-সংখ্যক বস্তুর একটিকে স্থির রাখিলে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুকে $\lfloor n-1$-সংখ্যক বিভিন্নপ্রকারে বিন্যস্ত করা যায়

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{\lfloor n-1}$.

দ্রষ্টব্য। এখানে clockwise এবং anti-clockwiseএ একইক্রমে স্থাপিত বস্তুগুলির দুইটি বিন্যাস পৃথক্ ধরা হইয়াছে। কিন্তু n-সংখ্যক বিভিন্ন রঙের বলদ্বারা গ্রথিত হারে (necklace) এই দুই বিন্যাস অভিন্ন বলিয়া এক্ষেত্রে বিন্যাস-সংখ্যা $\frac{1}{2}\lfloor n-1$ হইবে। আবার, কোন কোন স্থলে n-সংখ্যক ব্যক্তি কত প্রকারে একটি গোল টেবিলের চারিদিকে বসিতে পারে, তাহা স্থির করিতে হয়। তখন ব্যক্তিগুলির আপেক্ষিক অবস্থানই শুধু বিবেচ্য নয়, টেবিলের কোন্‌স্থানে তাহাদের অবস্থিতি তাহাও বিবেচ্য। সুতরাং, n-সংখ্যক ব্যক্তি একটি গোল টেবিলের পার্শ্বে গোল হইয়া কত প্রকারে বসিতে পারে প্রশ্ন হইলে উত্তর হইবে $\lfloor n$.

দ্রষ্টব্য। উপরের n-বস্তুগুলি যদি একসারিতে (in a row) থাকিত তবে তাহাদের সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা হইত $\lfloor n$. আবার, বৃত্তাকারে সজ্জিত n-সংখ্যক বস্তুগুলি লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা $\lfloor n-1$. এজন্য অনেক পুস্তকেই এই দুইটি বিন্যাসকে আলাদা করিবার জন্য যথাক্রমে রেখবিন্যাস (linear permutation) ও বৃত্তীয় বিন্যাস (circular permutation) বলা হয়। উদাহরণের জন্য Ex. 3. 4. দেখ।

18·14. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তুসমূহের মোট সমবায়। n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে একটি, দুইটি, তিনটি,...... n-সংখ্যকটি পর্যন্ত লইয়া মোট সমবায়-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যখন বস্তুগুলির মধ্যে p-সংখ্যক একজাতীয় অভিন্ন বস্তু, q-সংখ্যক ভিন্ন একজাতীয় অভিন্ন বস্তু, r-সংখ্যক অপর একজাতীয় অভিন্ন বস্তু ইত্যাদি বর্তমান।

[*To find the total number of combinations of n things taking any number of them from* 1 *to n at a time when p of them are alike of one kind, q of them alike of a second kind, r of them alike of a third kind and so on.*]

মনে কর, বস্তুসংখ্যা n. তন্মধ্যে p-সংখ্যক একজাতীয় বস্তু অভিন্ন, q-সংখ্যক ভিন্ন এক জাতীয় বস্তু অভিন্ন, r-সংখ্যক অপর একজাতীয় বস্তু অভিন্ন ইত্যাদি।

এখন, n-সংখ্যক বস্তু হইতে প্রদত্ত শর্তানুসারে নির্বাচন করিতে হইলে p-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলিকে $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

কারণ, কতকগুলিতে একটি করিয়া, কতকগুলিতে দুইটি করিয়া, কতকগুলিতে তিনটি করিয়া,……কতকগুলিতে p-সংখ্যক বস্তু থাকিতে পারে এবং কতকগুলিতে এইজাতীয় বস্তুর একটিও না থাকিতে পারে।

অনুরূপভাবে, q-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলি $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

এক্ষণে, $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি যুক্ত করা যায় বলিয়া p-সংখ্যক এবং q-সংখ্যক বস্তু $(p+1)(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

এইরূপে, p-সংখ্যক, q-সংখ্যক, r-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলি মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

একজাতীয় আরও অভিন্ন বস্তু থাকিলে অনুরূপ যুক্তিসাহায্যে তাহাদের নির্বাচনের মোট উপায় কত, তাহা স্থির করা যায়। এবং নির্বাচনের বিভিন্ন উপায় নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়, $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$ সংখ্যক। এই $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$সংখ্যা দ্বারা নির্দেশিত বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যে নির্বাচনে n-সংখ্যক বস্তুর একটিও লওয়া হয় নাই অর্থাৎ সকলগুলিই পরিত্যক্ত হইয়াছে, তাহাও অন্তর্ভুক্ত বলিয়া

নির্ণেয় **মোট সমবায়-সংখ্যা** $= \mathbf{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots-1.}$

অনুসিদ্ধান্ত। বস্তুগুলি বিভিন্ন হইলে $p=q=r=\cdots=1$ হইবে। এবং তখন $p+q+r+\cdots=n$ ধরিয়া এই n-সংখ্যক বস্তু হইতে একটি, দুইটি, তিনটি, …n-সংখ্যকটি লইয়া গঠিত মোট সমবায়ের সংখ্যা

$$=(1+1)(1+1)(1+1)\cdots\cdots \ n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত } -1$$
$$=2^n-1.$$

অর্থাৎ, $\mathbf{{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_{n-1}+{}^nC_n=2^n-1.}$

18·15. বিভিন্ন দলে বিভাগ। [Divison into Groups]
m+n-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সমন্বিত দুইটি দলে কত বিভিন্ন রকমে বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the number of ways in which $(m+n)$ things may be divided into groups of m and n things.]

$(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে প্রথম ভাগের m-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করিলে সমবায়-সংখ্যা ${}^{m+n}C_m$ হইবে অর্থাৎ প্রথম ভাগ ${}^{m+n}C_m$ রকমে নির্বাচন করিতে পারা যাইবে, এবং প্রথম ভাগের m-সংখ্যক বস্তু যতবার নির্বাচন করা যায়, ততবার দ্বিতীয় ভাগের n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে এবং এই অবশিষ্ট n-সংখ্যক বস্তু লইয়া একটিমাত্র ভাগই গঠিত হইতে পারে। এখন, প্রথম ভাগের প্রত্যেকটির সহিত দ্বিতীয় ভাগ যুক্ত করা যায় বলিয়া নির্ণেয় ভাগ সংখ্যা

$$= {}^{m+n}C_m \times 1 = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য। যদি $m=n$ হয়, তবে উভয় দলই সম-সংখ্যক বস্তুবিশিষ্ট হইবে। সুতরাং, ঐ দল দুইটি পরস্পরের মধ্যে স্থান বদল করিলেও নতুন কোন সমবায় পাওয়া যাইবে না। সুতরাং, যদি $2m$-সংখ্যক বস্তু দুইটি সমান দলে বিভক্ত করা যায় তবে তাহার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 2m}{\lfloor 2(\lfloor m)^2}$.

দ্রষ্টব্য। উপরোক্ত পদ্ধতির ব্যাপক প্রয়োগ সম্ভব। যদি $m+n+p+q$ বস্তু-সংখ্যা যথাক্রমে m, n, p, q বস্তু বিশিষ্ট চারিটি দলে বিভক্ত করা যায়, তবে তাহার সংখ্যা হইবে,

$$= {}^{m+n+p+q}C_m \times {}^{n+p+q}C_n \times {}^{p+q}C_p \times {}^{q}C_q$$

$$= \frac{\lfloor m+n+p+q}{\lfloor n+p+q \lfloor m} \times \frac{\lfloor n+p+q}{\lfloor p+q \lfloor n} \times \frac{\lfloor p+q}{\lfloor q \times \lfloor p} \times 1 = \frac{\lfloor m+n+p+q}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p \lfloor q}$$

যদি $m=n=p=q$ হয়, তবে দল-সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 4m}{\lfloor 4(\lfloor m)^4}$.

18·16. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *In how many ways can 3 prizes, one for good conduct, one for regular attendance and one for general proficency, be given away to 10 boys.*

এখানে যে-কোন বালক তিনটি পুরস্কারের একটি, দুইটি বা তিনটি পুরস্কারই পাইতে পারে। ভালো আচরণের পুরস্কারটি 10 জন বালককে 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। আবার, নিয়মিত উপস্থিতির পুরস্কারটি 10 জন বালককে 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। যেহেতু যে বালক ভালো আচরণের জন্য

পুরস্কার পাইয়াছে, তাহার নিয়মিত উপস্থিতির জন্য পুরস্কার পাইবার কোন বাধা নাই, সুতরাং, প্রথম পুরস্কারটি দিবার উপায়ের সহিত দ্বিতীয় পুরস্কারটি দিবার উপায়কে সংযুক্ত করা যায়। অতএব, ঐ দুইটি পুরস্কার $10 \times 10 = 10^2$ উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। আবার, সাধারণ পারদর্শিতার পুরস্কারটি 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে, এবং যে-কোন বালক এই পুরস্কারটি পাইতে পারে। সুতরাং, মোট উপায় $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Ex. 2. *How many numbers not more than 4 digits can be formed with 2, 3, 4, 5 ?*

§ 18·12 অনুসারে যেহেতু একই পুনরাবৃত্তিতে আপত্তি নাই বলিয়া

একটি সংখ্যা-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা হইবে $= 4$

দুইটি " " " " " $= 4^2$

তিনটি " " " " " $= 4^3$

চারিটি " " " " " $= 4^4$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = \frac{4}{3}(4^4 - 1) = 340$.

Ex. 3. *In how many ways can 6 persons form a ring ? Also find the ways in which these persons can be seated at a round table ?*

প্রার্থিত বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইলে বৃত্তে এক ব্যক্তির অবস্থান নির্দিষ্ট রাখিয়া অবশিষ্ট 5 ব্যক্তির বিভিন্ন বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{|5} = 120$.

ঐ ছয়জন ব্যক্তি যদি একটি গোল টেবিলের চারিধারে উপবিষ্ট হন, তবে যেহেতু টেবিলের সহিত তাঁহাদের আপেক্ষিক অবস্থান বিবেচনা করিতে হইবে, সেহেতু প্রার্থিত বিন্যাস সংখ্যা $= \underline{|6} = 720$.

Ex. 4. *In how many ways can 6 boys and girls seat themselves at a round table so that no two girls are together ?*

গোল টেবিলে একজন বালকের অবস্থান স্থির রাখিয়া বালকগুলিকে $\underline{|5}$ বা 120 রকমে বসানো যায়।

এখন, পাশাপাশি উপবিষ্ট 2 জন বালকের মধ্যে 1 জন বালিকা বসাইলে 6 জন বালিকাকে ঐরূপ 6টি স্থানে বসানো যাইবে এবং দুইজন বালিকাও

পাশাপাশি বসিবে না। এই 6 জন বালিকাকে 6টি স্থানে $\underline{|6}$ বা 720 রকমে বসানো যায়। বালক বসিবার একরকম উপায় হইতে বালিকাদের 720 রকম উপায় পাওয়া যায়।

$\therefore$ বিভিন্ন উপায়ের মোট সংখ্যা $= \underline{|5} \times \underline{|6} = 120 \times 720 = 86400.$

Ex. 5. *How many different sums of money can be made up of the following coins : a rupee, a half-rupee, a quarter-rupee, a* 10 *nP., a* 5 *nP., a* 2 *nP. and* 1 *nP. ?*

এখানে 7 প্রকারের বিভিন্ন মুদ্রা আছে এবং ইহাদের মধ্য হইতে একপ্রকারের একটি মুদ্রা বা দুইপ্রকারের দুইটি মুদ্রা প্রভৃতি রূপে লওয়া যায়।

$\therefore$ বিভিন্ন প্রকার মুদ্রা-সমন্বয়ে গঠিত ভিন্ন ভিন্ন অর্থ-পরিমাণের নির্ণেয় সংখ্যা

$$= {}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5 + {}^8C_6 + {}^8C_7 = 2^7 - 1 = 127.$$

[§ 18·14 অনুসারে]

Ex. 6. *Find the number of factors of* 12600.

$$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7.$$

প্রদত্ত রাশির উৎপাদকের মধ্যে 3টি 2, 2টি 3, 2টি 5 এবং একটি 7 আছে। এতদ্ব্যতীত এই সকল উৎপাদকের এক বা একাধিক যোগে লব্ধ গুণফলগুলিও ইহার উৎপাদক হইবে। তবে, লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে, একাধিক উৎপাদক লইয়া গুণফল নির্ণয়ে মৌলিক উৎপাদক যতবার করিয়া আছে তাহার অধিক সংখ্যক বার লওয়া চলিবে না।

$\therefore$ § 18·14 অনুসারে, উৎপাদক-সংখ্যা

$$= (3+1)(2+1)(2+1)(1+1) - 1$$
$$= 4.3.3.2 - 1 = 71.$$

কিন্তু, এই সংখ্যার মধ্যে প্রদত্ত রাশি 12600ও অন্তর্ভুক্ত বলিয়া নির্ণেয় উৎপাদক-সংখ্যা $= 71 - 1 = 70.$

Ex. 7. *Find the sum of all the numbers that can be formed with the digits* 3, 4, 5, 6, 7 *all at a time.*

প্রদত্ত 5টি অঙ্ক লইয়া গঠিত রাশিসমূহের সংখ্যা $= \underline{|5} = 120.$ এখন, এই 120টি রাশি একটির নীচে একটি করিয়া লিখিলে 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্ক কয়টির

প্রত্যেকটি অঙ্ক একক, দশক, শতক প্রভৃতি প্রত্যেক স্থানে $\underline{|4}$ বা 24 বার করিয়া থাকিবে। অর্থাৎ গঠিত রাশিগুলির এককের স্থানে 3 অঙ্কটি 24 বার, 4 অঙ্কটি 24 বার, 5 অঙ্কটি 24 বার, 6 অঙ্কটি 24 বার এবং 7 অঙ্কটি 24 বার থাকিবে।

∴ গঠিত রাশিগুলির একক স্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টি

$$= 3 \times 24 + 4 \times 24 + 5 \times 24 + 6 \times 24 + 7 \times 24$$
$$= 24(3 + 4 + 5 + 6 + 7)$$
$$= 24 \times 25 = 600.$$

অনুরূপভাবে, দশক, শতক, সহস্র এবং অযুত স্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টি প্রত্যেক ক্ষেত্রে = 600.

∴ এককস্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টির মান $= 600 \times 1$

দশক- " " " " " $= 600 \times 10$

শতক- " " " " " $= 600 \times 10^2$

সহস্র- " " " " " $= 600 \times 10^3$

এবং অযুত- " " " " " $= 600 \times 10^4$.

এই সকল মানের সমষ্টি 3, 4, 5, 6, 7 দ্বারা গঠিত 5 অঙ্কবিশিষ্ট রাশিগুলির সমষ্টি।

∴ নির্ণেয় সমষ্টি $= 600 \times (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)$

$$= 600 \times (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$$
$$= 600 \times 11111 = 6666600.$$

Ex. 8. *Each of three dice, which are all cubes, has its six faces marked with* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *dots, but the dice themselves are of different colours. If the three are cast simultaneously out of a dice-box, in how many different ways can they fall ?*

In how many ways will two of the dice show the same mark and the third a different one ?

মনে কর, ছকে তিনটি সাদা, কালো এবং লাল রংবিশিষ্ট এবং প্রত্যেকটির ছয়টি তল যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6টি করিয়া বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত। এই ছকগুলি একটি আধার হইতে একসঙ্গে নিক্ষেপ করিলে ছক তিনটি কত বিভিন্ন প্রকারে পড়িতে পারে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

কোন একটি ছক নিক্ষেপ করিলে উহার চিহ্নিত ছয়টি তলের একটি তল উপরে লইয়া পড়িতে পারে বলিয়া প্রতিটি ছক 6 রকমে পড়িতে পারে।

মনে কর, নিক্ষিপ্ত ছক 3টির সাদা ছকটির 1 চিহ্নিত তল উপরিভাগে দৃশ্যমান। এখন, সাদা ছক এই একপ্রকারে পড়িলে কালো ছকটি 6 প্রকারে পড়িতে পারে। এখন সাদা ছকটির একপ্রকারে পড়ার সহিত কালো ছকটির 6 প্রকারে পড়া যুক্ত করিলে এই দুই ছক বিভিন্ন ছয়টি প্রকারে পড়িতে পারে। কিন্তু সাদা ছকও ছয় প্রকারে পড়িতে পারে। অতএব সাদা ছকের প্রত্যেক প্রকারে পড়ার সহিত কালো ছকের প্রত্যেক প্রকারে পড়া যুক্ত করিলে এই দুইটি ছকে মোট 6 × 6 বা 36 প্রকারে পড়িতে পারে। আবার, এই দুই ছকের কোন একপ্রকারে পড়ার সহিত লাল ছকের 6 প্রকারে পড়া যুক্ত করা যায় বলিয়া তিনটি ছক মোট 36 × 6 বা 216 প্রকারে পড়িতে পারে।

দুই ছকের একই চিহ্নযুক্ত তল এবং তৃতীয়টির ভিন্ন চিহ্নযুক্ত তল উপরিভাগে লইয়া ছক তিনটি বিভিন্ন রংয়ের হওয়ায় তিনপ্রকারে পড়িতে পারে, যথা— (1) সাদা কালো এক চিহ্নযুক্ত ও লাল ভিন্ন চিহ্নযুক্ত, (2) সাদা লাল এক চিহ্নযুক্ত ও কালো ভিন্ন চিহ্নযুক্ত এবং (3) লাল কালো একচিহ্ন যুক্ত এবং সাদা ভিন্ন চিহ্নযুক্ত।

ধর, এক ক্ষেত্রে সাদা এবং কালো ছক 1 চিহ্নিত তল উপরিভাগে এবং লাল ছক 2 চিহ্নিত তল উপরিভাগে লইয়া পড়িয়াছে। প্রশ্নের শর্তানুসারে সাদা কালো ছকের 1 চিহ্নিত তলের সহিত তৃতীয় লাল ছকের 1 চিহ্নিত তল ব্যতীত অপর পাঁচটি তল যুক্ত করা যায় বলিয়া সাদা কাল ছকের 1 চিহ্নযুক্ত তল তৃতীয় লাল ছকের তলের সহিত 5 প্রকারে পড়িতে পারে। কিন্তু সাদা কালো ছক দুইটি 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6 এর মধ্যে যে-কোন একই চিহ্নিত তল উপরিভাগে লইয়া 6 রকমে পড়িতে পারে। সুতরাং, সাদা কালো ছকের একই চিহ্নিত তলের 6 রকমে পড়ার সহিত লাল ছকের ভিন্ন চিহ্নিত তলের 5 রকমে পড়া যুক্ত করিলে এই ভাবে (সাদা কালো 'ছক একই' চিহ্নযুক্ত এবং লাল ছক ভিন্ন চিহ্নযুক্ত) ছক তিনটি 6 × 5 বা 30 রকমে পড়িতে পারে।

∴ দুই ছক একই চিহ্নযুক্ত এবং তৃতীয় ছক ভিন্ন চিহ্নযুক্ত হইয়া 3 প্রকারে পড়িতে পারে বলিয়া ছক তিনটি এইভাবে মোট 30 × 3 বা 90 রকমে পড়িতে পারে।

Ex. 9. *In how many of the permutations of n different things r at a time will 3 particular things always occur ?*

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া আমরা প্রথমে যে সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি সতত থাকে তাহার সংখ্যা নির্ণয় করিব।

এই n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-3)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায় সংখ্যা $= {}^{n-3}C_{r-3}$.

এখন, ${}^{n-3}C_{r-3}$-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির সহিত পৃথকীকৃত বস্তু তিনটি যুক্ত করিলে লব্ধ প্রত্যেকটি সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি সতত থাকিবে এবং বস্তু-সংখ্যাও r হইবে।

$\therefore$ যে সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি সতত থাকে তাহার সংখ্যা $= {}^{n-3}C_{r-3} = \dfrac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\,\underline{|n-r}}$ এবং এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে বস্তু-সংখ্যা $= r$.

$\therefore$ ইহার প্রত্যেকটি সমবায় হইতে $\underline{|r}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\,\underline{|n-r}} \times \underline{|r}$

$$= \frac{\underline{|n-3}}{\underline{|n-r}} \times r(r-1)(r-2).$$

Ex. 10. *In how many ways can n men be arranged in a row so that neither of two specified men is at either extremity of the row?*

মনে কর, n-সংখ্যক ব্যক্তির মধ্যে A, B নির্দ্দিষ্ট ব্যক্তিদ্বয়। এই n-সংখ্যক ব্যক্তিতে এক সারিতে অবস্থিত n-সংখ্যক বিন্দুতে এমনভাবে স্থাপন করিতে হইবে যেন নির্দ্দিষ্ট দুই ব্যক্তি A, B ঐ সারির দুই প্রান্তবিন্দুতে অবস্থিত না হয়।

$\therefore$ A, B ব্যক্তিদ্বয়কে দুই প্রান্তবিন্দু ব্যতীত অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুর যে-কোন দুই বিন্দুতে স্থাপন করা যায়।

এখন, A কে $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুতে $(n-2)$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

যে-কোন এক উপায়ে A কে প্রান্তবিন্দুদ্বয় ব্যতীত কোন এক বিন্দুতে স্থাপন করিলে B কে অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বিন্দুতে $(n-3)$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ A, B দুই ব্যক্তিকে মোট $(n-2)(n-3)$-সংখ্যক উপায়ে মধ্যবর্তী $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুতে স্থাপন করা যায়।

আবার, মধ্যবর্তী $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুর যে-কোন দুই বিন্দুতে A, B কে স্থাপন করিলে এই দুই বিন্দু ব্যতীত অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক ব্যক্তিকে $\underline{|n-2}$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ A, B সহ n-সংখ্যক ব্যক্তিকে এক সারিতে অবস্থিত n-বিন্দুতে সর্বসমেত $(n-2)(n-3)\ \underline{|n-2}$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $=(n-2)(n-3)\ \underline{|n-2}.$

Ex. 11. *A person has the following coins in his purse: 4 guineas, 5 sovereigns, 2 crowns and 6 shillings. Find in how many ways he can subscribe to a charitable fund.*

এখানে লোকটির নিকট চার জাতীয় বিভিন্ন মুদ্রা আছে। তন্মধ্যে 4টি গিনি একজাতীয়, 5টি সভ্‌রিন্‌ অপর একজাতীয়, 2টি ক্রাউন্‌ ভিন্ন একজাতীয় এবং 6টি শিলিং চতুর্থ একজাতীয়।

$\therefore$ § 18·12 অনুসারে নির্ণেয় সংখ্যা

$$=(4+1)(5+1)(2+1)(6+1)-1$$
$$=5.6.3.7-1=629.$$

Ex. 12. *In how many ways 52 cards can be divided into 4 equal groups? If these 52 cards are distributed among 4 players equally, find the number of ways.*

§ 18·15 অনুসারে 52 খানি তাস সমান চারভাগে ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগে 13 খানি করিয়া তাস থাকে বলিয়া প্রার্থিত বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|52}}{\underline{|4}.(\underline{|13})^4}.$$

আবার চারিটি খেলোয়াড়ের মধ্যে ভাগ করিয়া দিলে যেহেতু চারিজন খেলোয়াড় বিভিন্ন লোক হইবে ; সুতরাং, এ ক্ষেত্রের মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4}. \qquad [\S\ 18{\cdot}15]$$

Ex. 13. *There are 3n things of which 2n are alike and the rest all different ; find the number of combinations of them 2n at a time.*

$3n$-সংখ্যক বস্তুমধ্যে $2n$-সংখ্যক অভিন্ন এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন। প্রথমেই $2n$-সংখ্যক অভিন্ন বস্তু লইয়া আমরা নির্ণেয় সমবায়গুলির একটি গঠন করিতে পারি। তারপর, আমরা n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে পর পর $1, 2, 3, \ldots n$-সংখ্যকটি বস্তু এবং $2n$ সংখ্যা পূরণ করিতে যতগুলি বাকি থাকে ততগুলি বস্তু $2n$-সংখ্যক অভিন্ন বস্তু হইতে গ্রহণ করিয়া $2n$-সংখ্যক বস্তুযুক্ত এক একটি সমবায় গঠন করিতে পারি। এবং এই নির্বাচন যথাক্রমে ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3, \cdots\cdots {}^nC_n$ রকমে করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$.

[§ 18·14 অনুসিদ্ধান্ত]

Examples XVIII (C)

1. A servant has to post 6 letters and there are 3 letter-boxes in the locality. In how many ways can he post the letters ?

2. A letter lock consists of three rings each marked with fifteen different letters ; find in how many ways it is possible to make an unsuccessful attempt to open the lock.

3. There are 4 candidates for the presidentship, one is to be elected by the votes of 6 men. In how many ways can the votes be given ?

4. If there be two kinds of balls, red and green, and at least 6 of each kind ; in how many different ways can a ball be put in each of 6 different boxes ?

5. Find in how many ways can 10 children sit in a merry-go-round relatively to one another.

6. In how many ways can 8 persons be seated at a round table so that all shall not have the same neighbour in any two arrangements ?

7. Find in how many ways can 9 different stones be set to form a neckleces.

8. Show that the number of different factors of 1062347 is 31.

9. From 3 cocoanuts, 4 apples, and 2 oranges, how many selections of fruit can be made, taking at least one of each kind ?

10. In how many ways 22 people be divided into two cricket teams to play against each other in a friendly game ?

11. If ${}^nP_{r-1} : {}^nP_r : {}^nP_{r+1} :: a : b : c$, prove that

$$c = \frac{b}{a}(b-a).$$

12. If ${}^nC_{r-1}/a = {}^nC_r/b = {}^nC_{r+1}/c$, show that

$$c = \frac{br - an}{ab(r-n)}.$$

Find also the value of n, and r in terms of a, b, c.

13. Show that $\frac{{}^{2n}C_{2r}}{{}^nC_r} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2r+1)}{1.\ 3.\ 5.\ 7\cdots\cdots(2n-1)}$.

14. If P_r denotes the number of permutations of n different things r at a time, show that

$$\frac{P_1}{\lfloor 1} + \frac{P_2}{\lfloor 2} + \frac{P_3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{P_n}{\lfloor n} = 2^n - 1.$$

15. Prove that

$${}^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \{1.\ 3.\ 5\cdots(4n-1)\} : \{1.3.5\cdots(2n-1)\}^2$$

16. If C_r denotes the combinations of n different things r at a time, show that

$$1 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.$$

17. Find the sum of all numbers that can be formed with the digits 2, 3, 5, 7, 9.

18. Numbers are formed by using all the digits 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; how many of them are odd and how many even ?

19. How many even numbers each of 7 digits can be formed with the digits 2, 3, 3, 4, 9, 9, 9 ?

20. How many numbers over million and divisible by 5 can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 ?

21. Find the number of numbers less than 1000 and divisible by 5 which can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 each digit occurring only once in each number.

22. How many numbers can be formed with the digits 9, 8, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 8, 5, 2, 3 taken all together, so that the even digits may always occupy the even places ?

23. How many words can be formed with 4 of the letters of the word *Companies*, so that the letters of each word formed are in alphabetical order ?

24. In how many ways can the letters of the word *Civilization* be re-arranged ?

25. Show that the number of all possible selections of one or more questions from 8 given questions, each having an alternative, is $3^8 - 1$.

26. Six papers are set in an examination, two of them in mathematics ; in how many different orders can the papers be given, so that the two mathematical papers are not successive ?

27. If of $(p+q+r)$ things, p be alike of one kind, q be alike of second kind and the rest all different, prove that the total number of combinations is $(p+1)(q+1)2^r - 1$.

28. Find the number of ways in which n different things all at a time can be arranged in which r particular things occur in a given order.

29. There are n letters and n envelopes addressed to n different persons ; how many different ways are there of sending them each to a wrong person ?

30. In a city there are m streets running north and south parallel to one another and n streets east and west also parallel. Find the number of ways in which a man can travel from the

N. W. corner to S. E. corner, going the shortest possible distance.

31. Show that the total number of permutations (with repetitions) of n different things, not more than p at a time is

$$\frac{n(n^p-1)}{n-1}.$$

32. If m parallel straight lines are intersected by n parallel straight lines, show that the number of parallelograms so formed is

$$\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1).$$

33. There are n straight lines whose lengths are 1, 2, 3 ⋯ n inches respectively ; show that the number of ways in which 4 of them may be chosen which will form a quadrilateral in which a circle may be described is

$$\frac{1}{48}\{2n(n-2)(n-5)-3+3(-1)^n\}.$$

34. If there be m sorts of things and n things of each sort, prove that the number of ways in which a selection can be made from them is $(n+1)^m-1$.

35. Show that the number of permutations 4 at a time which can be made of n groups of things, each group consisting of 3 like things and the rest all different, is

$$n(n-1)(n^2+n+1).$$

36. A boat consists of $2n$ men, p of whom can row only on one side and q only on the other. In how many ways can the crew be arranged ?

37. A person appears in an examination in which there are 4 papers with a maximum of m marks for each paper ; show that the number of ways in which he may get $2m$ marks on the whole is

$$\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

ANSWERS

1. 729. **2.** 3374. **3.** 4096. **4.** 64. **5.** 362880. **6.** 2520.
7. 20160. **9.** 315. **10.** 352716.
12. $b(c-a)/b^2-ca,\ r=a(c-b)/b^2-ca.$ **17.** 6933264.
18. 2160 odd; 2880 even. **19.** 120. **20.** 1320. **21.** 154.
22. 8400. **23.** 126. **24.** 19958399. **26.** 480. **28.** $\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}}$.

29. $\underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{\underline{|n}}\right\}$. **30.** $\frac{\underline{|m+n-2}}{\underline{|m-1}\,\underline{|n-1}}$.

36. $\frac{\underline{|2n-p-q}}{\underline{|n-p}\,\underline{|n-q}}(\underline{|n})^2$.

ঊনবিংশ অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য

19·1. দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাত বীজগণিতীয় যে সূত্রের সাহায্যে একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায় সেই সূত্রটি দ্বিপদ উপপাদ্য নামে অভিহিত। গণিত ও পদার্থবিদ্যাবিদ্ সুবিখ্যাত পণ্ডিত Sir Isaac Newton এই সূত্র আবিষ্কার করিয়াছেন।

এই সূত্র প্রমাণের পূর্বে বিষয়টি সহজবোধ্য করিবার জন্য আমরা এই সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করিব।

চারিটি উৎপাদক $x+a$, $x+b$, $x+c$ এবং $x+d$ এর ক্রমিক গুণফল আমরা সাধারণভাবে গুণ করিয়া পাই

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd)x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

পূর্ণগুণফল কতকগুলি আংশিক গুণফলের সমষ্টি। প্রথমে প্রত্যেক উৎপাদকের এক একটি পদ অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির এক একটি পদ লইয়া গুণ করিয়া অভীষ্ট গুণফল নির্ণয় করিতে হয়। এখানে x পদটি প্রত্যেক উৎপাদকে আছে এবং a, b, c, d পদগুলির এক একটি উৎপাদকে মাত্র একবার করিয়া আছে। এই গুণফল যদি x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজানো যায়, তবে x-এর উচ্চতম ঘাত 4 এবং x^4 পদটি পাইতে হইলে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে x লইয়া গুণ করিতে হইবে। x^3-সম্বলিত পদগুলি পাইতে হইলে চারিটি উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে তিনটি উৎপাদক হইতে তিনটি x এবং অবশিষ্ট চতুর্থ উৎপাদক হইতে a, b, c, d অক্ষরের মধ্য হইতে একটি লইয়া গুণ করিতে হইবে। x^2-সম্বলিত পদ পাইতে হইলে সম্ভাব্য সকল প্রকারে দুইটি উৎপাদকের মধ্য হইতে দুইটি x এবং a, b, c, d অক্ষরচতুষ্টয়ের দুইটি অবশিষ্ট দুইটি উৎপাদক হইতে লইয়া গুণ করিতে হয়। x-সম্বলিত পদসমূহ উৎপাদকগুলির যে-কোন একটি হইতে x এবং a, b, c, d অক্ষরচতুষ্টয়ের যে-কোন তিনটি অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির মধ্য হইতে লইয়া গঠিত। এবং x-যুক্ত পদটি a, b, c, d অক্ষরসমূহের গুণফল।

Ex. 1. $(x+2)(x+5)(x-3)(x-1)$

$$=x^4+(2+5-3-1)x^3+(10-6-2-15-5+3)x^2$$
$$+(-30-10+15+6)x+30$$
$$=x^4+3x^3-15x^2-19x+30.$$

19·2. n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

[*To find the expansion of* $(x+a)^n$ *when* n *is a positive integer.*]

আমরা প্রথমে n-সংখ্যক উৎপাদক-সম্বলিত $(x+a)(x+b)(x+c)$.... ....$(x+m)$ রাশিটি বিবেচনা করিব।

এই রাশির বিস্তৃতি $x+a$, $x+b$, $x+c$,....$(x+m)$ এই n-সংখ্যক উৎপাদকসমূহের ক্রমিক গুণফল এবং ইহার প্রত্যেক পদ n-মাত্রাবিশিষ্ট; কেননা ইহার প্রত্যেক পদ n-সংখ্যক উৎপাদক হইতে একটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল।

এখানে x-এর উচ্চতম ঘাত x^n, n-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটি হইতে x লইয়া গঠিত।

x^{n-1}-সম্বলিত পদগুলি $(n-1)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে গৃহীত x এবং অবশিষ্ট উৎপাদক হইতে x ব্যতীত a, b, c,.... প্রভৃতি অক্ষরগুলির একটির গুণফলসম্ভূত। সুতরাং, x^{n-1} এর সহগ a, b, c প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরের সমষ্টি। ইহা S_1 দ্বারা সূচিত কর। x^{n-2}-সম্বলিত পদগুলি $(n-2)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে গৃহীত x এবং অবশিষ্ট দুইটি উৎপাদক হইতে a, b, c,.... প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরগুলির মধ্য হইতে গৃহীত দুইটির গুণফল হইতে উদ্ভূত।

সুতরাং, x^{n-2} এর সহগ a, b, c,.... প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরসমূহের দুই-দুইটি করিয়া গৃহীত অক্ষরদ্বয়ের সমষ্টি। ইহা S_2 দ্বারা সূচিত কর এবং সাধারণভাবে x^{n-r}-সম্বলিত পদগুলি $(n-r)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে x অক্ষরটি সম্ভাব্য সকল প্রকারে গৃহীত এবং অবশিষ্ট r-সংখ্যক উৎপাদক হইতে a, b, c,.... প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরগুলির মধ্য হইতে গৃহীত r-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল হইতে উদ্ভূত। সুতরাং, x^{n-r} এর সহগ a, b, c,.... প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষর হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে গৃহীত r-সংখ্যক অক্ষরসমূহের গুণফলের সমষ্টি। ইহা S_r দ্বারা সূচিত কর।

স্পষ্টতঃই এই গুণফলের শেষ পদ $abcd....k$. ইহা S_n দ্বারা সূচিত কর।

$$\therefore\ (x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)$$
$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots+S_rx^{n-r}+\cdots+S_{n-1}x+S_n.$$

S_1 দ্বারা নির্দেশিত সমষ্টিতে পদ-সংখ্যা $=r$, S_2 দ্বারা নির্দেশিত সমষ্টিতে পদ-সংখ্যা n-সংখ্যক বস্তু হইতে দুইটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায় সংখ্যার সমান ইহা $={}^nC_2$.

এখন মনে কর, $a=b=c=\cdots=k$, তাহা হইলে,

$$S_1={}^nC_1a,\ S_2={}^nC_2a^2,\ S_3={}^nC_3a^3,\ \text{ইত্যাদি।}$$

$$\therefore\ (x+a)^n=x^n+{}^nC_1ax^{n-1}+{}^nC_2a^2x^{n-2}+\cdots$$
$$+{}^nC_ra^rx^{n-r}+\cdots+{}^nC_{n-1}a^{n-1}x+{}^nC_na^n.$$

এখন, ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3,....{}^nC_r....$ প্রভৃতির মান বসাইয়া আমরা পাই

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^2x^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^3x^{n-3}+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^rx^{n-r}$$
$$+\cdots+na^{n-1}x+a^n.$$

ইহাই **দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)** নামে অভিহিত এবং দক্ষিণ পক্ষের রাশিমালা $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতি।

বিকল্প পদ্ধতি। প্রমাণ করিতে হইবে, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots$$
$$+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n. \quad \cdots \quad (1)$$

প্রকৃত গুণন দ্বারা,

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2=a^2+{}^2C_1a^{2-1}x+x^2 \quad \cdots \quad (2)$$
$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$
$$=a^3+{}^3C_1a^{3-1}x+{}^3C_2a^{3-2}x^2+x^3 \quad \cdots \quad (3)$$

পাওয়া যায়। এখন লক্ষ্য কর, $n=2$ ও 3র জন্য উপরের উপপাদ্যের সত্যতা পরিস্ফুট। এখন ধরা যাক্, $n=m$ র জন্য 3 উপরের উপপাদ্য সত্য, সুতরাং,

$$(a+x)^m=a^m+{}^mC_1a^{m-1}x+{}^mC_2a^{m-2}x^2+\cdots$$
$$+{}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1}+{}^mC_ra^{m-r}x^r+\cdots+x^m.$$

উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(a+x)^{m+1}=(a+x)[a^m+{}^mC_1a^{m-1}x+{}^mC_2a^{m-2}x^2+\cdots+{}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1}+{}^mC_ra^{m-r}x^r+\cdots+x^m]$$
$$=a^{m+1}+({}^mC_1+1)a^m.x+({}^mC_2+{}^mC_1)a^{m-1}x^2+\cdots+({}^mC_{r-1}+{}^mC_r)a^{m-r+1}x^r+\cdots+x^{m+1}.$$

যেহেতু, $\quad {}^mC_{r-1}+{}^mC_r={}^{m+1}C_r$ [§ 18·9, Ex. 2.]

সুতরাং, $\quad {}^mC_1+1={}^{m+1}C_1$

$\quad {}^mC_2+{}^mC_1={}^{m+1}C_2$ ইত্যাদি,

দক্ষিণ পক্ষকে সাজাইলে

$$(a+x)^{m+1}=a^{m+1}+{}^{m+1}C_1a^{m+1-1}x+{}^{m+1}C_2a^{m+1-2}x^2+\cdots+{}^{m+1}C_ra^{m+1-r}.x^r+\cdots\cdots x^{m+2}.$$

দেখা যায় যে, উপরের উপপাদ্যটি m র জন্য সত্য হইলে $(m+1)$ র জন্যও সত্য। যেহেতু উপপাদ্যটি $n=2$, 3 র জন্য সত্য, উহা $n=4$ জন্য সত্য। আবার $n=4$ জন্য সত্য হইবে বলিয়া উপপাদ্যটি $n=5$ র জন্য সত্য। এইভাবে দেখা যায় যে, উপপাদ্যটি n র সকল অখণ্ড ধনসংখ্যার জন্য সত্য হইবে। অতএব, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইবে

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^3+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n. \quad \cdots (4)$$

দ্রষ্টব্য 1. উপরের প্রমাণ পদ্ধতিকে **আরোহ পদ্ধতি** (Method of induction) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. (1) র দক্ষিণ পক্ষকে বিস্তৃতি বলা হয় এবং ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$,.... ${}^nC_r$....${}^nC_n$ কে দ্বিপদ সহগ (Binomial coefficient) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 3. (2) ও (3) হইতে লক্ষ্য কর দ্বিপদ রাশির ঘাতের সূচক-সংখ্যা যাহা, পদসংখ্যা তাহা হইতে 1 বেশী। ঐরূপভাবে ঘাতের সূচক-সংখ্যা n হইলে, পদসংখ্যা $n+1$.

19·3. সাধারণ পদ (General Term)।

$(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদের সহগ ${}^nC_1$, তৃতীয় পদের সহগ ${}^nC_2$, চতুর্থ পদের সহগ ${}^nC_3$ ইত্যাদি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে 'C' এর সহিত যুক্তসংখ্যা বিস্তৃতির পদ-নির্দেশক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম। সুতরাং, বিস্তৃতির $(r+1)$-তম

পদের সহগ ^nC_r হইবে। বিস্তৃতির এই $(r+1)$-তম পদ বিস্তৃতির সাধারণ পদ। n এবং r এর যথাযোগ্য মান দিয়া ইহার সাহায্যে বিস্তৃতির যে-কোন নির্ধারিত পদ নির্ণয় করা যায়। বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ অর্থাৎ সাধারণ পদ $^nC_rx^{n-r}a^r$ বিস্তারিত ভাবে লিখিলে

$$\frac{\mathbf{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}}{\underline{|\mathbf{r}}}\mathbf{x^{n-r}a^r} \text{ হয়।}$$

কোন নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে সাধারণ পদের এই সূত্র প্রয়োগ করিতে হইলে ইহা স্মরণ রাখা প্রয়োজন যে, a এর সূচক C এর সহিত যুক্ত অঙ্কের সমান এবং x ও a এর সূচক-সমষ্টি n.

আবার $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলিকে যদি t_1, $t_2,\ldots t_r$, $t_{r+1}\ldots t_n$ প্রভৃতি দ্বারা সূচিত করা যায় তাহা হইলে, সেক্ষেত্রে সাধারণ পদ t_{r+1}, সুতরাং,

$$t_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}a^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^{n-r}.a^r.$$

19·4. দ্বিপদ উপপাদ্যে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলি সুবিধার্থে $^nC_1$, $^nC_2$, $^nC_3,\ldots{}^nC_r,\ldots{}^nC_n$ প্রতীকসমূহের দ্বারা সূচিত করা হয়, এবং কখনও কখনও n উহ্য রাখিয়া আরও সংক্ষেপে C_1, C_2, $C_3,\ldots$ $C_r,\ldots C_n$ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে। এই সংজ্ঞানুসারে

$$(x+a)^n=x^n+C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}+\cdots$$
$$+C_ra^rx^{n-r}+\cdots+C_nx^n.$$

এখানে a এর পরিবর্তে $-a$ লিখিলে,

$$(x-a)^n=x^n+C_1(-a)x^{n-1}+C_2(-a)^2x^{n-2}+C_3(-a)^3x^{n-3}$$
$$+\cdots+C_r(-a)^rx^{n-r}+\cdots+C_n(-a)^n$$
$$=x^n-C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}-C_3a^3x^{n-3}+\cdots$$
$$+(-1)^rC_ra^rx^{n-r}+\cdots+(-1)^nC_nx^n.$$

$(x+a)^n$ এবং $(x-a)^n$ এর বিস্তৃতিদ্বয় লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, উভয় বিস্তৃতির একই স্থানীয় পদ অভিন্ন, কিন্তু $(x-a)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদগুলি পর্যায়ক্রমে একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক এবং এই বিস্তৃতির সাধারণ পদ ও শেষ পদ ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক তাহা নির্ভর করে r ও n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম, তাহার উপর।

আবার, $(x+a)^n = x^n + C_1 ax^{n-1} + C_2 a^2 x^{n-2} + C_r a^r x^{n-r} + \cdots + C_n a^n$, এতে উভয় পক্ষে $x=1$ এবং $a=x$ লিখিলে আমরা পাই

$$(1+x)^n = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_r x^r + \cdots + C_n x^n$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} x^r + \cdots + x^n.$$

ইহা দ্বিপদ উপপাদ্যের সরল আকার এবং কেহ কেহ ইহাকেও দ্বিপদ উপপাদ্য নামে অভিহিত করেন। আমরা $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়াছি। বিপরীতক্রমে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়।

$$(x+a)^n = \left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$

$$= x^n\left\{1 + n.\frac{a}{x} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.\frac{a^2}{x^2} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\frac{a^r}{x^r} + \cdots\cdots + \frac{a^n}{x^n}\right\}$$

$$= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} a^2 x^{n-2} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} a^r x^{n-r} + \cdots + a^n.$$

19·5. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ পরস্পর সমান।

বিস্তৃতির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ $= {}^nC_r$. এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1$. সুতরাং, এই বিস্তৃতির শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের পূর্বে প্রথম হইতে $\{(n+1)-(r+1)\}$-সংখ্যক বা $(n-r)$-সংখ্যক পদ আছে।

$\therefore$ বিস্তৃতির শেষ হইতে $(r+1)$-তম প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদ।

$\therefore$ ইহার সহগ $= {}^nC_{n-r}$. কিন্তু ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

$\therefore$ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ এবং শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ পরস্পর সমান।

19·6. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যবর্তী পদ।

n এর মান অনুসারে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির একটি বা দুইটি মধ্যবর্তী পদ হইতে পারে।

এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1$. সুতরাং, n অযুগ্ম হইলে পদ-সংখ্যা যুগ্ম হইবে। তখন এই বিস্তৃতির মধ্যবর্তী পদ দুইটি হইবে। এবং n যুগ্ম হইলে, পদ-সংখ্যা অযুগ্ম হইবে এবং তখন একটি মধ্যবর্তী পদ হইবে।

(1) প্রথমে, মনে কর n **অযুগ্ম** এবং ইহার মান $2m+1$.

$\therefore \quad m=\frac{1}{2}(n-1)$. এক্ষেত্রে পদ-সংখ্যা $(2m+2)$, একটি যুগ্ম-সংখ্যা।

$\therefore \quad (m+1)$ তম অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$ তম এবং $(m+2)$-তম অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদদ্বয় মধ্যবর্তী পদ।

$$\therefore \text{ মধ্যবর্তী পদদ্বয় } {}^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{এবং } {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}} . x^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1)\, \lfloor \frac{1}{2}(n+1)}\, a^{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{এবং } \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n+1)\, \lfloor \frac{1}{2}(n-1)}\, a^{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}}.$$

(2) মনে কর, n **যুগ্ম** এবং $=2m$, $\therefore \quad m=\frac{n}{2}$. এক্ষেত্রে পদ-সংখ্যা $=2m+1$, একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\therefore$ মধ্যবর্তী পদ একটি এবং উহা $(m+1)$-তম বা $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।

$$\therefore \text{ মধ্যবর্তী পদ } C_{\frac{n}{2}}\, a^{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{n}{2}} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}n\, \lfloor \frac{1}{2}n}\, a^{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{n}{2}}.$$

19·7. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সহগ।

এই বিস্তৃতির সাধারণ পদের সহগ $= {}^nC_r$. এক্ষেত্রে আমাদের নির্ণয় করিতে হইবে r এর মান কত হইলে ${}^nC_r$ এর মান বৃহত্তম হইবে।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ের § 18·10 অনুচ্ছেদ হইতে জানি n যখন যুগ্ম, তখন ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ বৃহত্তম এবং n যখন অযুগ্ম তখন দুইটি পদের সহগ বৃহত্তম এবং তাহারা পরস্পর সমান। এই সহগদ্বয় ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$.

19·8. $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদ।

আমরা জানি, $(x+a)^n = x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$.

$\therefore$ দক্ষিণ পক্ষের সমস্ত পদগুলিকে x^n দ্বারা গুণ করিতে হয় বলিয়া $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে পারিলেই আমরা $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে পারিব।

মনে কর, $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ দুইটি যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1}.

এখন, $T_r = {}^nC_{r-1}\, a^{r-1}\, x^{n-r+1}$ এবং $T_{r+1} = {}^nC_r a^r x^{n-r}$.

$$\therefore \quad \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} \cdot \frac{a}{x} = \frac{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1}} \cdot \frac{a}{x} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{a}{x}$$

$$\therefore \quad T_{r+1} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{a}{x} \cdot T_r = \left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{a}{x} \cdot T_r.$$

অতএব, $T_{r+1} > =$ অথবা $< T_r$ হইবে, যদি গুণক

$\left(\dfrac{n+1}{r} - 1\right)\dfrac{a}{x} > \; =$ অথবা < 1 হয়। r-এর মানবৃদ্ধির সহিত গুণক

$\left(\dfrac{n+1}{r} - 1\right)\dfrac{a}{x}$ এর মান হ্রাস পাইতে থাকে।

এবং r একটি পূর্ণসংখ্যা বলিয়া r এর মান 1 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া n পর্যন্ত হইলে এই গুণক $\left(\dfrac{n+1}{r} - 1\right) \dfrac{a}{x}$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পাইয়া $\dfrac{na}{x}$ হইতে $\dfrac{a}{nx}$ হয়।

যেহেতু $n > r$, এই বিস্তৃতির $T_1, T_2, T_3, \ldots T_{r+1}$ পদগুলি r এর মান-বৃদ্ধির সহিত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে যতক্ষণ পর্যন্ত r এর মান এরূপ যে $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{x}{a} > 1$ থাকে এবং r এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধিহেতু $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{x}{a}$ এর মান যেইমাত্র < 1, তখন r এর মান বৃদ্ধিহেতু উপরোক্ত $T_1, T_2, T_3, \ldots T_{r+1}$ শ্রেণীর পদসমূহের মান ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকে।

$\therefore$ T_{r+1} এর মান আর বৃদ্ধি পায় না। এবং r এর মান এরূপ যে $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{x}{a}$ এর মান 1 অথবা 1 অপেক্ষা সামান্য বেশী তখন T_{r+1} এর মান সর্বাধিক।

অর্থাৎ T_{r+1} এর মান সর্বাধিক, যখন $\frac{n+1}{r}-1$ সামান্য $>$ বা $= \frac{a}{x}$.

অর্থাৎ, „ $\frac{n+1}{r}$ সামান্য $>$ বা $= \frac{a}{x}+1$.

„ $\dfrac{n+1}{\frac{a}{x}+1}$ সামান্য $>$ বা $= r$

„ r সামান্য $<$ বা $= \dfrac{n+1}{\frac{a}{x}+1}$.

(1) এখন $\dfrac{n+1}{\frac{a}{x}+1}$ যদি একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে, ধর, ইহা $= m$. সুতরাং r একটি অখণ্ড ধনাত্মক রাশি বলিয়া, T_{r+1} এর মান সর্বাধিক হইতে হইলে r অবশ্যই m এর সমান হইবে এবং এই ক্ষেত্রে গুণক $\left(\frac{n+1}{m}-1\right)\frac{x}{a}=1$ হইবে। তখন $T_{r+1}=T_r$ হইবে অর্থাৎ m-তম এবং $(m+1)$-তম সমান পদদ্বয় বৃহত্তম হইবে।

(2) যদি $\dfrac{n+1}{\frac{a}{x}+1}$ একটি অখণ্ড রাশি না হয়, ধর, p ইহার অখণ্ড অংশ।

যেহেতু p একটি পূর্ণ সংখ্যা $\dfrac{n+1}{\frac{a}{x}+1}$ অপেক্ষা সামান্য কম এবং r-ও একটি অখণ্ড

সংখ্যা হইতে হইবে, সুতরাং, $r = p$ হইলে T_{r+1} অর্থাৎ T_{p+1} বৃহত্তম পদ হইবে।

$\therefore$ T_{p+1} অর্থাৎ $(p+1)$-তম পদ বৃহত্তম পদ।

দ্রষ্টব্য। $(x+a)^n$ এবং $(x-a)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলি একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট। কিন্তু উভয় বিস্তৃতির যুগ্মপদগুলি বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, দ্বিতীয় বিস্তৃতির চিহ্ন-নির্বিশেষে বৃহত্তম পদ স্থির করিতে হইলে ঋণচিহ্নযুক্ত পদগুলি লইয়া উপরে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে নির্ণয় করিতে হয়।

দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতির বৃহত্তম পদনির্ণয়ে উপরোক্ত, সূত্র প্রয়োগ না করিয়া উপরে প্রদর্শিত পদ্ধতি প্রয়োগই সমধিক প্রশস্ত।

19·9. দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির সহগের ধর্মাবলী (Properties of Binomial coefficients).

(i) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগ-সমষ্টি $= 2^n$.

The sum of the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ is 2^n.

আমরা জানি $(1+x)^n = 1 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$, একটি অভেদ। এই অভেদের উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইলে আমরা পাই

$$2^n = 1 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n$$

$$= C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \text{সহগসমষ্টি।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগসমষ্টি $= 2^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। $C_1 + C_2 + C_3 \cdots\cdots + C_n = 2^n - 1.$

বা, ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n - 1,$

অর্থাৎ, **n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 1 হইতে n-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়গুলির মোট সংখ্যা $= 2^n - 1$.**

(ii) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির অযুগ্ম পদসমূহের সহগসমষ্টি উহার যুগ্ম পদসমূহের সহগসমষ্টির সমান।

In the expansion of $(1+x)^n$, the sum of the coefficients of the odd terms is equal to the sum of the coefficients of the even terms.

$(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_nx^n$, একটি অভেদ। এই অভেদের উভয় পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া আমরা পাই

$$0=1-C_1+C_2-C_3+\cdots\cdots+(-1)^nC_n.$$

$$\therefore\quad 1+C_2+C_4+\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots$$

$= \frac{1}{2}\times$ বিস্তৃতির সহগসমূহের সমষ্টি

$$=\tfrac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}.$$

19·10. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Expand* (i) $(3x+2y)^7$ *and* (ii) $(\frac{1}{3}x-3y)^6$.

(i) $$(3x+2y)^7=(3x)^7+{}^7C_1.2y.(3x)^6+{}^7C_2(2y)^2.(3x)^5+{}^7C_3(2y)^3.(3x)^4+{}^7C_4.(2y)^4.(3x)^3+{}^7C_5(2y)^5.(3x)^2+{}^7C_6.(2y)^6.3x+{}^7C_7(2y)^7$$

$$=3^7x^7+7.2y.3^6.x^6+\frac{7.6}{1.2}.2^2.y^2.3^5.x^5+\frac{7.6.5}{1.2.3}2^3.y^3.3^4.x^4+\frac{7.6.5}{1.2.3}.2^4.y^4.3^3.x^3+\frac{7.6}{1.2}.2^5.y^5.3^2.x^2+7.2^6.y^6.3x+2^7.y^7$$

$$=2187x^7+10206x^6y+20412x^5y^2+22680x^4y^3+15120x^3y^4+6046x^2y^5+1344xy^6+128y^7.$$

(ii) $$(\tfrac{1}{3}x-3y)^6=\frac{x^6}{3^6}+6.(-3y)\left(\frac{x}{3}\right)^5+\frac{6.5}{1.2}.(-3y)^2.\left(\frac{x}{3}\right)^4+\frac{6.5.4}{1.2.3}.(-3y)^3.\left(\frac{x}{3}\right)^3+\frac{6.5}{1.2}.(-3y)^4.\left(\frac{x}{3}\right)^2+6.(-3y)^5.\frac{x}{3}+(-3y)^6$$

$$=\frac{x^6}{729}-6.3y.\frac{x^5}{243}+15.9y^2.\frac{x^4}{81}-20.27y^3.\frac{x^3}{27}+15.81y^4.\frac{x^2}{9}-6.243y^5.\frac{x}{3}+729y^6$$

$$=\frac{x^6}{729}-\frac{2}{27}x^5y+\frac{5}{3}x^4y^2-20x^3y^3+135x^2y^4-486xy^5+729y^6.$$

Ex. 2. *Find (i) the 10th term in the expansion of*

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{12}.$$

(ii) The 9th term in the expansion of $\left(\frac{a}{3}-3b\right)^{15}$.

(i) $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির নির্ণেয় দশম পদ

$$={}^{12}C_9.\left(\frac{y}{2}\right)^9.(2x)^3=\frac{12.11.10}{1.2.3.}.\frac{y^9}{2^9}.2^3.x^3$$

$$=220.x^3.\frac{y^9}{64}=\frac{55}{16}x^3y^9.$$

(ii) $\left(\frac{a}{3}-3b\right)^{15}$ এর বিস্তৃতির নির্ণেয় নবম পদ

$$={}^{15}C_8.(-3b)^8.\left(\frac{a}{3}\right)^7=\frac{15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.7}.3^8b^8.\frac{a^7}{3^7}$$

$$=6435\times 3a^7b^8=19305a^7b^8.$$

Ex. 3. *Find the coefficient of (i)* x^{10} *in the expansion of* $\left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{ab}{x^2}\right)^{10}$.

(ii) x^{10} *and* x^{-30} *in the expansion of* $\left(x^5-\frac{1}{x^3}\right)^{18}$.

(i) মনে কর, $\left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{ab}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{10} আছে।

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $={}^{10}C_r.\left(\frac{ab}{x^2}\right)^r.\left(\frac{x^3}{a^2}\right)^{10-r}$

$$={}^{10}C_r\frac{a^rb^r}{x^{2r}}.\frac{x^{30-3r}}{a^{20-2r}}={}^{10}C_r a^{3r-20}.b^r x^{30-5r}.$$

এই $(r+1)$-তম পদটিতে x^{10} আছে বলিয়া,

$$x^{10}=x^{30-5r},\text{ বা, } 10=30-5r,\text{ বা, } 5r=20.\ \therefore\ r=4.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $={}^{10}C_4.a^{12-20}b^4=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.a^{-8}.b^4=\frac{210b^4}{a^8}.$

(ii) মনে কর, $\left(x^5-\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{10} আছে।

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{18}C_r \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right)^r \cdot (x^5)^{18-r}$

$$=(-1)^r . {}^{18}C_r \frac{1}{x^{3r}} \cdot x^{90-5r}=(-1)^r . {}^{18}C_r x^{90-8r}.$$

এই পদটিতে x^{10} আছে বলিয়া, $x^{10}=x^{90-8r}$, বা, $10=90-8r$,

বা, $8r=80$. $\therefore$ $r=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^{10} . {}^{18}C_{10}=\frac{18.17.16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6.7.8}$

$=43758.$

আবার, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{-30} থাকিলে, $-30=90-8r$ হইবে অর্থাৎ $8r=120$, বা, $r=15$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির x^{-30} এর সহগ

$$=(-1)^{15} . {}^{18}C_{15}=-\frac{18.17.16}{1.2.3}=-816.$$

Ex. 4. *Find the term independent of x in* $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

মনে কর, $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ x বিবর্জিত অর্থাৎ x এর সূচক 0.

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{20}C_r . \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r \cdot (x^3)^{20-r}$

$$=(-1)^r . {}^{20}C_r . x^{60-5r}.$$

যেহেতু এই $(r+1)$-তম পদ x-বিবর্জিত, $\therefore$ $60-5r=0$, অর্থাৎ $r=12$.

$\therefore$ x-বিবর্জিত এই $(r+1)$-তম পদ

$$=(-1)^{12} . {}^{20}C_{12}=\frac{20.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8}=125970.$$

Ex. 5. *Find the middle term of* (*i*) $(2a^2x-by)^{10}$ *and* (*ii*) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

(i) এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা 11. সুতরাং, ইহার মধ্যবর্তী পদ বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ} = {}^{10}C_5(-by)^5.(2a^2x)^{10-5}$$
$$= -\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}b^5y^5.2^5.a^{10}.x^5$$
$$= -252 \times 32a^{10}x^5b^5y^5$$
$$= -8064a^{10}b^5x^5y^5.$$

(ii) এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $2n+1$, একটি অযুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং ইহার মধ্যবর্তী পদ মাত্র একটি এবং তাহা ইহার $(n+1)$-তম পদ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ} = {}^{2n}C_n\left(-\frac{1}{x}\right)^n \cdot x^{2n-n}$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n} \cdot \frac{1}{x^n} \cdot x^n = (-1)^n \cdot \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}.$$

Ex. 6. *Find the two middle terms of* $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $2n+2$, একটি যুগ্মসংখ্যা। সুতরাং, ইহার মধ্যবর্তী পদ দুইটি $(n+1)$-তম এবং $(n+2)$-তম পদ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় } (n+1)\text{-তম পদ} = {}^{2n+1}C_n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot (x)^{2n+1-n}$$
$$= \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} \cdot \frac{1}{x^n} \cdot x^{n+1} = \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1}x.$$

$$\text{এবং } (n+2)\text{-তম পদ} = {}^{2n+1}C_{n+1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \cdot x^{2n+1-n-1}$$
$$= \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n+1 \lfloor n} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \cdot x^n = \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n+1 \lfloor n} \cdot \frac{1}{x}.$$

Ex. 7. *If* x^{2r} *occurs in the expansion of* $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{4n}$, *prove that its coefficient is* $(-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)}\frac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{2}{3}(4n-r) \lfloor \frac{2}{3}(2n+r)}$.

মনে কর, $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{4n}$ এর বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদে x^{2r} অবস্থিত।

এক্ষণে, এই বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদ $= {}^{4n}C_m \left(-\frac{1}{x}\right)^m \cdot (x^2)^{4n-m}$

$$= (-1)^m \cdot {}^{4n}C_m \cdot \frac{1}{x^m} \cdot x^{8n-2m} = (-1)^m \cdot {}^{4n}C_m \cdot x^{8n-3m}.$$

$\therefore\ 2r = 8n - 3m$, বা, $3m = 8n - 2r$. $\quad \therefore\ m = \frac{2}{3}(4n - r)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)} \cdot {}^{4n}C_{\frac{2}{3}(4n-r)}$

$$= (-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)} \cdot \frac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{2}{3}(4n-r)\ \lfloor 4n - \frac{2}{3}(4n-r)}$$

$$= (-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)} \cdot \frac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{2}{3}(4n-r)\ \lfloor \frac{2}{3}(2n+r)}.$$

Ex. 8. *Show that the middle term in the expansion of* $(1-x)^{2n}$ *is* $(-1)^n \cdot \frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1)}{\lfloor n} \cdot 2^n x^n$.

যেহেতু $(1-x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(2n+1)$-সংখ্যক পদ আছে, সুতরাং, এই বিস্তৃতির $(n+1)$-তম পদ ইহার মধ্যবর্তী পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ $= (1-x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির $(n+1)$-তম পদ

$$= {}^{2n}C_n \cdot (-x)^n$$

$$= (-1)^n \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n} x^n = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.\cdots(2n-1).\ 2n}{\lfloor n\ \lfloor n} \cdot x^n$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1).\ 2.1.2.2.2.3.2.4\cdots 2.n}{\lfloor n\ \lfloor n} \cdot x^n$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1).\ 2^n.1.2.3.4\cdots n.\ x^n}{\lfloor n\ \lfloor n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1.3.5.7.\cdots(2n-1)}{\lfloor n} \cdot 2^n x^n.$$

Ex. 9. *Find the general term in the expansion of* $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{2n+1}$; *hence show that there is no term free from* $\frac{x}{y}$.

দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদই সাধারণ পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ পদ $= {}^{2n+1}C_r\left(\dfrac{y}{x}\right)^r \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n-r+1}$

$$= {}^{2n+1}C_r.\left(\frac{x}{y}\right)^{2(n-r)+1}.$$

নির্ণীত সাধারণ পদে $\dfrac{x}{y}$ অনুপস্থিত হইবে

যদি $2(n-r)+1=0$ হয়,
অর্থাৎ, $2r=2n+1$,
অর্থাৎ, $r=n+\frac{1}{2}$,
অর্থাৎ $r>n$, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

স্থতরাং, উক্ত বিস্তৃতিতে $\dfrac{x}{y}$ বিযুক্ত কোন পদ থাকিবে না।

Ex. 10. *Find the numerically greatest coefficient in the expansion of (i)* $(1+x)^{12}$ *and (ii)* $(5-4x)^9$.

(i) মনে কর, এই বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদ্বয় যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1}.

তাহা হইলে, $T_{r+1} = \dfrac{12-r+1}{r}\, x \times T_r = \dfrac{13-r}{r} \times x \times T_r$.

এক্ষেত্রে আমাদের সহগগুলির সাংখ্যমান বিবেচনা করিতে হইবে বলিয়া xএর মান বিবেচ্য নহে।

$\therefore$ T_{r+1} এর সাংখ্যমান বৃহত্তম যখন গুণক $\dfrac{13-r}{r}$ সামান্য $>$ বা $=1$,

অর্থাৎ $\dfrac{13}{r}-1$ সামান্য $>$ বা $=1$, অর্থাৎ $\dfrac{13}{r}$ সামান্য $>$ বা $=2$, অর্থাৎ, $2r$ সামান্য $<$ বা $=13$ অর্থাৎ r সামান্য $<$ বা $=\frac{13}{2}$ অর্থাৎ $6\frac{1}{2}$. এখন, r একটি অখণ্ড সংখ্যা $6\frac{1}{2}$ অপেক্ষা সামান্য কম বলিয়া $r=6$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির সপ্তম পদের সহগের সাংখ্যমান বৃহত্তম এবং ইহার সাংখ্যমান $= {}^{12}C_6 = \dfrac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6} = 924$.

(ii) $(5-4x)^9 = 5^9\left(1-\dfrac{4x}{5}\right)^9$.

স্থতরাং, এখানে $\left(1-\dfrac{4x}{5}\right)^9$ এর বিস্তৃতির বিবেচনা করিলেই চলিবে।

এখন, এই বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ যথাক্রমে T_r ও T_{r+1} হইলে,

$$T_{r+1} = \frac{9-r+1}{r}\cdot\frac{4x}{5} = \frac{10-r}{r}\cdot\tfrac{4}{5}\times T_r, \text{ সাংখ্যমান হিসাবে।}$$

$\therefore\ T_{r+1} > T_r$ যতক্ষণ $\dfrac{40-4r}{5r}$ সামান্য $>$ বা $=1$.

অর্থাৎ $40-4r$ সামান্য $>$ বা $=5r$, অর্থাৎ $9r$ সামান্য $<$ বা $=40$ অর্থাৎ r সামান্য $<$ বা $=4\frac{4}{9}$.

যেহেতু, r একটি অখণ্ড সংখ্যা $4\frac{4}{9}$ অপেক্ষা সামান্য কম, $\therefore\ r=4$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির পঞ্চম পদের সহগের সাংখ্যমান বৃহত্তম এবং ইহার

$$\text{সাংখ্যমান} = 5^9\times{}^9C_4\times(\tfrac{4}{5})^4 = 5^5\times\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\times4^4 = 5^5\times4^2\times4^3\times126$$
$$=6300000.$$

Ex. 11. *Find the greatest term in the expansion of* $(x+a)^n$ *when* $x=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{3}, n=10$.

T_r ও T_{r+1} যথাক্রমে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ হইলে,

$$T_{r+1} = \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}\cdot T_r = \left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}\cdot T_r$$

$$=\left(\frac{11}{r}-1\right)\cdot\tfrac{2}{3}.\,T_r, \quad [\,x, a, n \text{ এর মান বসাইয়া}\,]$$

$\therefore\ T_{r+1} > T_r$, যতক্ষণ $\left(\dfrac{11}{r}-1\right)\cdot\frac{2}{3}$ সামান্য $>$ বা $=1$.

অর্থাৎ, $\dfrac{11}{r}-1$ সামান্য $>$ বা $=\frac{3}{2}$, অর্থাৎ $\dfrac{11}{r}$ সামান্য $>$ বা $=\frac{5}{2}$.

অর্থাৎ r সামান্য $<$ বা $=4\frac{2}{5}$.

যেহেতু, r, $4\frac{2}{5}$ অপেক্ষা সামান্য কম একটি অখণ্ড সংখ্যা, $\therefore\ r=4$.

$\therefore$ সুতরাং, এই বিস্তৃতির পঞ্চম পদ বৃহত্তম এবং ইহার মান

$$={}^{10}C_4.\,a^4.\,x^6 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{35}{864}.$$

Ex. 12. *The second, third and fourth terms in the expansion of* $(x+y)^n$ *are* 240, 720 *and* 1080 *respectively ; find* x, y, n.

মনে কর, $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ যথাক্রমে T_2, T_3, T_4.

$\therefore \quad T_2 = nx^{n-1}y,\ T_3 = \dfrac{n(n-1)}{\lfloor 2}\, x^{n-2}y^2$

এবং $T_4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\, x^{n-3}y^3$.

$\therefore \quad \dfrac{T_2}{T_3} = \dfrac{2x}{(n-1)y} = \dfrac{240}{720} = \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots \quad (1)$

এবং $\dfrac{T_3}{T_4} = \dfrac{3x}{(n-2)y} = \dfrac{720}{1080} = \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots \quad (2)$

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\dfrac{2(n-2)}{3(n-1)} = \frac{1}{2}$, বা, $4(n-2) = 3(n-1)$.

$\therefore \quad n = 5.$

$\therefore \quad T_2 = 5x^4y = 240,\ T_3 = 10x^3y^2 = 720,\ T_4 = 10x^2y^3 = 1080$

$\therefore \quad x^4y = 48 \ \cdots\ (1),\ x^3y^2 = 72 \ \cdots\ (2),\ x^2y^3 = 108 \ \cdots\ (3).$

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\dfrac{x}{y} = \frac{2}{3}$. $\quad \therefore \quad x = \frac{2}{3}y \quad \cdots\cdots \quad (4)$

x এর এই মান (1) এ বসাইলে $(\frac{2}{3}y)^4 .\ y = 48$ বা $\frac{2^4}{3^4} .\ y^5 = 48$.

$\therefore \quad y = 3.$ $\quad \therefore$ (4) হইতে আমরা পাই $x = 2$.

$\therefore \quad x = 2,\ y = 3$ এবং $n = 5$.

Ex. 13. *If* n *is any positive integer, show that the integral part of* $(9+4\sqrt{5})^n$ *is an odd number.*

মনে কর, $(9+4\sqrt{5})^n$ অখণ্ড অংশ I এবং ভগ্নাংশ x.

$\therefore \quad I + x = 9^n + C_1 9^{n-1}.4\sqrt{5} + C_2.9^{n-2}.(4\sqrt{5})^2$

$\qquad + C_3.9^{n-3}.(4\sqrt{5})^3 + C_4.9^{n-4}.(4\sqrt{5})^4 + \cdots \quad (1)$

এখন, $9 - 4\sqrt{5}$ একটি ধনাত্মক রাশি 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$(\because \quad \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}.)$

$\therefore\ (9-4\sqrt{5})^n$ এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। মনে কর, ইহার মান y.

$$\therefore\ y=9^n-C_1 9^{n-1}.4\sqrt{5}+C_2 9^{n-2}.(4\sqrt{5})^2$$
$$-C_3 9^{n-3}.(4\sqrt{5})^3+C_4 9^{n-4}.(4\sqrt{5})^4-\cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া,

$$I+x+y=2(9^n+C_2 9^{n-2}.80+C_4.9^{n-4}.6400+\cdots)$$
$=$ একটি যুগ্মসংখ্যা।

যেহেতু, x এবং y উভয়েই প্রকৃত ভগ্নাংশ, উহাদের সমষ্টি অর্থাৎ $x+y=1$.

$\therefore\ I=$ একটি যুগ্মসংখ্যা $-1=$ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

Ex. 14. *If n be a positive integer greater than unity, show that $4^{2n}-15n-1$ is always divisible by 225.*

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4^2)^n-15n-1=16^n-15n-1$

$$=(1+15)^n-15n-1$$
$$=1+C_1.15+C_2.15^2+C_3.15^3+\cdots-15n-1$$
$$=1+15n+C_2.15^2+C_3.15^3+\cdots-15n-1$$
$$=C_2.15^2+C_3.15^3+\cdots$$

এখন, দক্ষিণ-পক্ষস্থিত প্রত্যেক পদই 15^2 দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore\ 4^{2n}-15n-1$ সতত 15^2 অর্থাৎ 225 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 15. *If $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ are the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ where n is a positive integer, show that*

(i) $C_0+2C_1+3C_2+\cdots+(n+1)C_n=2^{n-1}(n+2)$.

(ii) $C_0+3C_1+5C_2+\cdots+(2n+1)C_n=2^n(n+1)$.

(i) আমরা জানি, $C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n=2^n$.

[§ 19·9 অনুসারে]

$$\therefore\ C_0+2C_1+3C_2+\cdots+(n+1)C_n$$
$$=(C_0+C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n)$$
$$+(C_1+2C_2+3C_3+\cdots+nC_n)$$

$$=2^n+\left\{n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\cdots+n\right\}$$

$$=2^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}+\cdots+1\right\}$$

$$=2^n+n(1+1)^{n-1}=2^n+n.2^{n-1}=2^{n-1}(n+2).$$

(ii) $C_0+3C_1+5C_2+7C_3+\cdots+(2n+1)\,C_n$

$$=C_0+2C_1+3C_2+4C_3+\cdots+(n+1)\,C_n$$
$$+C_1+2C_2+3C_3+\cdots+n\,C_n$$
$$=2^{n-1}(n+2)+n.2^{n-1}\qquad [\text{পূর্ববর্তী (i) দেখ}]$$
$$=2^{n-1}.2(n+1)=2^n(n+1).$$

Ex. 16. *If* $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ *are the coefficients in the expansion of* $(1+x)^n$, *prove that*

(i) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\cdots(C_{n-1}+C_n)$
$$=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}\cdot C_1C_2C_3\cdots\cdots C_n.$$

(ii) $C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots C_nC_0=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}.$

(iii) $C_1{}^2+2C_2{}^2+3C_3{}^2+\cdots\cdots+n.C_n{}^2=\dfrac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\,\lfloor n-1}.$

(i) $C_{r-1}+C_r=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}+\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\lfloor n\cdot\dfrac{r+n-r+1}{\lfloor r\,\lfloor n-r+1}$

$$=\frac{n+1}{n-r+1}\cdot\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\frac{n+1}{n-r+1}\cdot Cr.$$

এক্ষণে r এর পরিবর্তে 1, 2, 3,.... n বসাইয়া আমরা পাই

$$C_0+C_1=\frac{n+1}{n}\cdot C_1$$

$$C_1+C_2=\frac{n+1}{n-1}\cdot C_2$$

$$C_2+C_3=\frac{n+1}{n-2}\cdot C_3$$

....

$$C_{n-1}+C_n=\frac{n+1}{1}\cdot C_n.$$

উভয়পক্ষ গুণ করিয়া উভয়পক্ষের গুণফল সমিত করিয়া পাই

$$(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\cdots(C_{n-1}+C_n)$$
$$=\frac{(n+1)^n}{n(n-1)(n-2)\cdots 1}\cdot C_1C_2C_3\cdots C_n$$
$$=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}\cdot C_1C_2C_3\cdots C_n.$$

(ii) আমরা জানি $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n.$

এই অভেদে x এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ বসাইয়া আমরা পাই

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\cdots+\frac{C_n}{x^n}.$$

এখন, $C_r=C_{n-r}$. $\therefore$ r এর মান 0, 1, 2, 3,........ বসাইয়া আমরা পাই

$$C_0=C_n,\ C_1=C_{n-1},\ C_2=C_{n-2},\cdots\cdots$$
$$\therefore\ C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots C_n.C_0$$
$$=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2.$$

ইহা উপরের $(1+x)^n$ এবং $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিদ্বয়ের গুণফলে x-মুক্ত পদের সহগ হইবে।

$\therefore$ ইহা $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ অর্থাৎ $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x-মুক্ত পদের সহগ হইবে।

আবার, $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x-মুক্ত পদের সহগ, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n-সম্বলিত পদের সহগ হইবে।

এক্ষণে, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n-সম্বলিত পদের সহগ

$$={}^{2n}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}.$$

$$\therefore\ C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_nC_0=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}.$$

(iii) $C_1+2C_2x+3C_3x^2+\cdots+n.C_n\,x^{n-1}$ .... (1)

$$=n+2.\frac{n(n-1)}{2}\,x+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\,x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=n\left\{1+(n-1)x+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}\,x^2+\cdots+x^{n-1}\right\}$$

$$=n(1+x)^{n-1}.$$

আবার $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n=C_0+\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}+\dfrac{C_3}{x^3}+\cdots+\dfrac{C_n}{x^n}$ .... (2)

এক্ষণে, $C_1{}^2+2C_2{}^2+3C_3{}^2+\cdots+n.C_n{}^2$

$=$(1) ও (2)এ লিখিত রাশিমালার গুণফলে $\dfrac{1}{x}$ এর সহগ

$=n(1+x)^{n-1}.\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n$ এর গুণফলে $\dfrac{1}{x}$ এর সহগ

$=\dfrac{n}{x^n}(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে $\dfrac{1}{x}$ এর সহগ

অর্থাৎ $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^{n-1} এর সহগের n গুণ।

$$=n^{2n-1}.\ C_{n-1}=\frac{n\,\lfloor 2n-1}{\lfloor n\,\lfloor n-1}=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\,\lfloor n-1}.$$

Ex. 17. (i) *If in the expansion of* $(a+x)^n$, *A be the sum of the odd terms and B the sum of the even terms, show that*

$$A^2-B^2=(a^2-x^2)^n.$$

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলি $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\, t_n$ দ্বারা সূচিত কর।

তাহা হইলে, $(a+x)^n=t_0+t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n=A+B$

এবং $(a-x)^n=t_0-t_1+t_2-t_3+\cdots+(-1)^n\,t_n$

$$=(t_0+t_2+t_4+\cdots)-(t_1+t_3+t_5+\cdots)$$

$$=A-B.$$

$\therefore\ (A+B)(A-B)=(a+x)^n(a-x)^n$

অর্থাৎ, $A^2-B^2=(a^2-x^2)^n.$

(ii) *If $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ denote the successive terms in the expansion of $(a+x)^n$, show that*

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2 = (a^2 + x^2)^n.$$

$$(a+x)^n = C_0 a^n + C_1 a^{n-1} x + C_2 a^{n-2} x^2 + C_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 + \cdots + C_n x^n.$$

$$= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_n.$$

এখন উভয়পক্ষে x এর স্থলে ix বসাইলে

$$(a+ix)^n = a^n + C_1 a^{n-1} ix + C_2 a^{n-2} i^2 x^2 + C_3 a^{n-3} i^3 x^3 + C_4 a^{n-4} i^4 x^4 + C_5 a^{n-5} i^5 x^5 + \cdots$$

$$= a^n + iC_1 a^{n-1} x - C_2 a^{n-2} x^2 - iC_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 + C_5 a^{n-5} i x^5 + \cdots$$

$$= t_0 + it_1 - t_2 - it_3 + t_4 + it_5 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)$$

$= A + iB.$ [যখন $A = t_0 - t_2 + t_4 - \cdots$

এবং $B = t_1 - t_3 + t_5 - \cdots$] .... (1)

আবার, $(a-ix)^n = a^n - C_1 a^{n-1} ix + C_2 a^{n-2} i^2 x^2 - C_3 a^{n-3} i^3 x^3 + C_4 a^{n-4} i^4 x^4 - C_5 a^{n-5} i^5 x^5 + \cdots$

$$= a^n - i.C_1 a^{n-1} x - C_2 a^{n-2} x^2 + iC_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 - iC_5 a^{n-5} x^5 - \cdots$$

$$= t_0 - it_1 - t_2 + it_3 + t_4 - it_5 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)$$

$= A - iB.$ .... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) গুণ করিয়া আমরা পাই

$$(a+ix)^n \times (a-ix)^n = (A+iB)(A-iB),$$

অর্থাৎ $\{(a+ix)(a-ix)\}^n = A^2 + B^2,$

অর্থাৎ $(a^2 + x^2)^n = (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2.$

Ex. 18. *If* $(10+3\sqrt{11})^n = p+\beta$, *where n and p are positive integers and* β *a proper fraction, show that* $(p+\beta)(1-\beta)=1$.

$$(10+3\sqrt{11})^n = 10^n + C_1.10^{n-1}.3\sqrt{11} + C_2.10^{n-2}.(3\sqrt{11})^2 + C_3.10^{n-3}.(3\sqrt{11})^3 + \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$= p+\beta =$ একটি অখণ্ড রাশি + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

আবার, $(10-3\sqrt{11})$ একটি ধনাত্মক রাশি 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$(\because \ \sqrt{11} = 3{\cdot}316\cdots)$

$\therefore$ $(10-3\sqrt{11})^n =$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

এক্ষণে, $(10-3\sqrt{11})^n = 10^n - C_1.10^{n-1}.3\sqrt{11} + C_2.10^{n-2}\cdot(3\sqrt{11})^2 - C_3.10^{n-3}.(3\sqrt{11})^3 + \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) যোগ করিলে অমূলদ পদগুলি অপসারিত হয় এবং আমরা পাই

$$(10+3\sqrt{11})^n + (10-3\sqrt{11})^n = 2(10^n + C_2.10^{n-2}.99 + C_4.10^{n-4}.99^2 + \cdots)$$

= একটি যুগ্মরাশি। যেহেতু বন্ধনীর অন্তর্গত প্রত্যেক পদই একটি অখণ্ড-সংখ্যা।

অর্থাৎ, $p+\beta+(10-3\sqrt{11})^n =$ একটি যুগ্ম-সংখ্যা।

কিন্তু, β এবং $(10-3\sqrt{11})^n$ উভয়েই প্রকৃত ভগ্নাংশ বলিয়া উহাদের সমষ্টি $=1$.

$\therefore$ $\beta+(10-3\sqrt{11})^n = 1$, বা, $(10-3\sqrt{11})^n = 1-\beta$.

$$\therefore \ (p+\beta)(1-\beta) = (10+3\sqrt{11})^n(10-3\sqrt{11})^n$$
$$= \{(10+3\sqrt{11})(10-3\sqrt{11})\}^n$$
$$= \{10^2-(3\sqrt{11})^2\}^n = (100-99)^n = 1.$$

Ex. 19. *Prove that the expansion of* $(1-x^3)^n$ *may be put into the form* $(1-x)^{3n} + 3nx(1-x)^{3n-2}$

$$+\frac{3n(3n-3)}{1.2}x^2(1-x)^{3n-4}+\cdots.$$

আমরা জানি $1-x^3 = (1-x)^3 + 3x(1-x)$.

$$\therefore\ (1-x^3)^n=\{(1-x)^3+3x(1-x)\}^n$$
$$=\{(1-x)^3\}^n+n\{(1-x)^3\}^{n-1}.3x(1-x)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.\{(1-x)^3\}^{n-2}.\{3x(1-x)\}^2+\cdots$$
$$=(1-x)^{3n}+n.(1-x)^{3n-3}.3x(1-x)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.(1-x)^{3n-6}.3x^2(1-x)^2+\cdots$$
$$=(1-x)^{3n}+3nx(1-x)^{3n-2}$$
$$+\frac{3n(3n-3)}{1.2}.x^2(1-x^2)^{3n-4}+\cdots.$$

Ex. 20. *If a_1, a_2, a_3, a_4 be any consecutive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, show that*

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

মনে কর, চারিটি পদ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r-1)$-তম, r-তম, $(r+1)$-তম এবং $(r+2)$-তম পদ।

$$\therefore\ a_1={}^nC_{r-2},\ a_2={}^nC_{r-1},\ a_3={}^nC_r,\ a_4={}^nC_{r+1}.$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-2}+{}^nC_{r-1}}+\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r+{}^nC_{r+1}}$$

$$=\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-2}+{}^nC_{r-2}.\frac{n-r+2}{r-1}}+\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r+{}^nC_r.\frac{n-r}{r+1}}$$

$$=\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-2}\left(1+\frac{n-r+2}{r-1}\right)}+\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{n-r+2}{r-1}}+\frac{1}{1+\frac{n-r}{r+1}}$$

$$=\frac{r-1}{n+1}+\frac{r+1}{n+1}=\frac{2r}{n+1}.$$

আবার, $\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}=\dfrac{2.{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r-1}+{}^nC_r}=\dfrac{2.{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-1}.\dfrac{n-r+1}{r}}$

$$=\frac{2.{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r-1}\left(1+\dfrac{n-r+1}{r}\right)}=\frac{2}{\dfrac{n+1}{r}}=\frac{2r}{n+1}.$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

Ex. 21. *If n_r represents the coefficient of the $(r+1)$ th term in the expansion of $(1+x)^n$, prove that*

$$(m+n)_r=m_r+m_{r-1}.n_1+m_{r-2}.n_2 + m_{r-3}.n_3+\cdots+m_1.n_{r-1}+n_r.$$

যেহেতু, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ n_r, সুতরাং, $(1+x)^m$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ m_r.

$$\therefore \quad (1+x)^m=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_{r-1}x^{r-1} + m_r.x^r+\cdots$$

$$(1+x)^n=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots+n_{r-1}x^{r-1} + n_rx^r+\cdots$$

এবং $(1+x)^{m+n}=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots + (m+n)_r.x^r+\cdots$

কিন্তু $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m\times(1+x)^n$.

$$\therefore \quad 1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots + (m+n)_rx^r+\cdots$$

$$=(1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_{r-1}x^{r-1}+m_rx^r+\cdots) \times(1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots+n_{r-1}x^{r-1}+n_rx^r+\cdots).$$

যেহেতু ইহা একটি অভেদ, উভয় পক্ষের x^r এর সহগ সমিত করিয়া আমরা পাই

$$(m+n)_r=m_r+m_{r-1}.n_1+m_{r-2}.n_2+m_{r-3}n_3+\cdots + m_1n_{r-1}+n_r.$$

Examples XIX

1. Expand the following binomials :—

(i) $(x+2y)^5$. (ii) $(2x+3)^5$. (iii) $(a+x)^7$.

(iv) $(a-x)^6$. (v) $(1-2y)^5$. (vi) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^5$.

(vii) $\left(2-\frac{a}{2}\right)^7$. (viii) $\left(ax+\frac{y}{a}\right)^9$.

2. Give an independent proof of the expansion of $(1+x)^n$ following the alternative method of § 19·2.

3. Find (i) the 5th term in the expansion of $(1+2x)^{10}$.

(ii) the 9th term of $(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b)^{12}$.

(iii) the 6th term of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

(iv) the middle term of $\left(\frac{2a}{3}-\frac{3}{2a}\right)^{10}$.

(v) the 6th term of $\left(3x+\frac{a}{3}\right)^9$.

4. Find the 8th term of $(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}})^{10}$.

5. Write the coeff. of x^{-20} in $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{x^3}\right)^{25}$.

6. Find the $(n+1)$th term in the expansion of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3n}$.

7. Expand $(1+\sqrt{1-x^2})^5+(1-\sqrt{1-x^2})^5$.

8. Find the value of $(x+\sqrt{2})^6+(x-\sqrt{2})^6$.

9. Find the coeff. of x in $\left(x^2-\frac{2a}{x}\right)^{14}$.

10. Find the coeff. of x^{16} in the expansion of $(2x^2-x)^{10}$.

11. Expand $(1-2x+2x^2)^{10}$ up to 3rd term.

12. Find first four terms of the expansion of $(1-x+x^2)^n$ in ascending powers of x.

13. Find the coeff. of x^4 in $(1+x+x^2+x^3)^n$.

14. Find the coeff. of x^{10} in $(1+x+x^2)(1-x)^{15}$.

15. Find the coeff. of $x^{-(2m+1)}$ in the expansion of

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}.$$

16. Find the two middle terms of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

17. Expand $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{2n+1}$ giving in particular the general term and the two middle terms.

18. Find the term independent of x in the expansions of

(i) $\left(ax^5-\frac{b}{x^2}\right)^{35}$, (ii) $\left(6x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$, (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$,

(iv) $(x^2+2x^{-1})^{12}$.

19. If there is a term independent of x in $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$, show that it is $\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{3}n \lfloor \frac{2}{3}n}$.

20. If x^p occurs in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, show that its coeff. is $\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-p) \lfloor \frac{1}{2}(n+p)}$.

21. If the rth term in the expansion of $(1+x)^{30}$ has its coefficients equal to that of the $(r+4)$th term, find r.

22. Show that the coefficients of the middle term of $(1+x)^{2n}$ is equal to the sum of the coefficients of the two middle terms of $(1+x)^{2n-1}$.

23. If in the expansion of $(1+x)^{50}$ the coefficient of the $(3r+1)$th term be equal to the coefficient of the $(4r+2)$th term, find r.

24. In the expansion of $(1+x)^{m+n}$, where m and n are positive integers, prove that the coefficients of x^m and x^n are equal.

25. If in the expansion $(1+x)^{2n+1}$ the coefficients of x^r and x^{r+1} are equal, find r.

26. If $C_0, C_1, C_2 \cdots C_n$ denote the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, prove that

(i) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - 4C_4 + \cdots + (-1)^{n-1} n.C_n = 0.$

(ii) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + \cdots + nC_n = n.2^{n-1}.$

27. If the coefficients of the second; third and fourth terms in the expansion of $(1+x)^n$ be in A.P, find n.

28. If a, b, c be three consecutive coefficients in the expansion of power of $(1+x)$, prove that index of the power is $\frac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ and the number of the term of which a is the coefficient, is $\frac{a(b+c)}{b^2-ac}$.

29. Show that the sum of the coefficients of odd terms in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is 2^{2n-1}.

30. The third, fourth and fifth terms in the expansion of $(x+a)^n$ are 84, 280 and 560 respectively; find x, a, n.

31. If P_n denotes the product of all the coeff. in the expansion of $(1+x)^n$ where n is a positive integer, show that

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$

32. If a, b, c, d be 3rd, 4th, 5th and 6th terms in the expansion of $(x+a)^n$, where n is a positive integer, show that

$$\frac{b^2-ac}{c^2-bd} = \frac{5a}{3c}.$$

33. In the expansion of $(1+x)^{44}$, the coefficient of the $(4r+3)$th term is equal to that of the $(2r-5)$th term, find r.

34. In the following examples find which is the greatest term :

(i) $(7x+2y)^{30}$, when $x=8$, $y=14$.

(ii) $\left(1+\dfrac{2x}{27}\right)^{16}$, when $x=3$.

(iii) $(2x-3y)^{28}$, when $x=9$, $y=4$.

35. Show that the greatest term in the expansion of $(1+x)^{2n+1}$ has also the greatest coefficient if x lies between $\dfrac{n}{n+2}$ and $\dfrac{n+2}{n}$.

36. If two successive coefficients of an expanded binomial be equal, prove that the two coefficients immediately preceding and succeeding them are equal.

37. Prove that the difference between the coefficients of x^{r+1} and x^r in the expansion of $(1+x)^{n+1}$ is equal to the difference between the coefficients of x^{r+1} and x^{r-1} in the expansion of $(1+x)^n$.

38. Find rth term from the beginning and the rth term from the end in the expansion of $(1+2x)^n$.

39. If C_0, C_1, C_2........C_n denote the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, prove that

(i) $C_0+\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

(ii) $\dfrac{C_0}{1}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_4}{5}+\dfrac{C_6}{7}+\cdots\cdots=\dfrac{2^n}{n+1}$.

(iii) $C_0-\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}-\dfrac{C_3}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$.

(iv) $C_1-2C_2+3C_3-\cdots\cdots+(-1)^n nC_n=0$.

(v) $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$.

(vi) $C_0{}^2 - C_1{}^2 + C_2{}^2 - C_3{}^2 + \cdots\cdots + (-1)^n C_n{}^2 = 0$,

or, $(-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{\lfloor n}{\left(\lfloor \frac{1}{2}n\right)^2}$ according as n is odd or even.

(vii) $(C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n)^2 = {}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_2 + \cdots + {}^{2n}C_n$.

(viii) $2C_0 + \dfrac{2^2 C_1}{2} + \dfrac{2^3 C_2}{3} + \dfrac{2^4 C_3}{4} + \cdots\cdots + \dfrac{2^{n+1} C_n}{n+1} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{n+1}$.

(ix) $\dfrac{C_1}{C_0} + \dfrac{2C_2}{C_1} + \dfrac{3C_3}{C_2} + \cdots\cdots + \dfrac{nC_n}{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(x) $C_0 + \frac{1}{2}C_1{}^2 + \frac{1}{3}C_2{}^2 + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n+1} C_n{}^2 = \dfrac{\lfloor 2n+1}{(\lfloor n+1)^2}$.

40. Show that

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = C_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + C_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + C_2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \cdots\cdots,$$ and give the last term.

41. Show that

$$\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)^n = C_0 + C_1 \frac{3x}{1-2x} + C_2\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^2 + \cdots + C_r\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^r + \cdots + C_n\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^n.$$

42. If n is a positive integer, prove that

$$1 - C_1 \frac{1+x}{1+nx} + C_2 \cdot \frac{1+2x}{(1+nx)^2} - C_3 \frac{1+3x}{(1+nx)^3} + \cdots = 0.$$

43. Prove that

$$(1+2x)^{2n} - 2nx(1+x)^{2n-1} + \frac{2n(2n-2)}{2\,!} x^2(1+x)^{2n-2} - \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3\,!} x^3(1+x)^{2n-3} + \cdots + \text{to } (n+1) \text{ terms} = (1-x^2)^n.$$

44. If $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, show that

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{2n} = 3^n$.

(ii) $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots\cdots + a_{2n} = 1$.

45. Apply Binomial theorem to find the value of

(i) $(98)^4$. (ii) $(\cdot999)^4$ correct to 3 places of decimals.

46. Prove that $2^{5n} - 31n - 1$ is divisible by 961 for all positive integral values of n greater than 1.

ANSWERS

1. (i) $x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$.

(ii) $32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$.

(iii) $a^7+7a^6x+21a^5x^2+35a^4x^3+35a^3x^4+21a^2x^5+7ax^6+x^7$.

(iv) $a^6-6a^5x+15a^4x^2-20a^3.x^3+15a^2x^4-6ax^5+x^6$.

(v) $1-10y+40y^2-80y^3+80y^4-32y^5$.

(vi) $243x^5+135x^4y+30x^3y^2+\frac{10}{3}x^2y^3+\frac{10}{27}xy^4+\frac{y^5}{243}$.

(vii) $128-224a+168a^2-70a^3+\frac{35}{2}a^4-\frac{21}{8}a^5+\frac{7}{32}a^6-\frac{a^7}{128}$.

(viii) $a^9x^9+9a^7x^8y+36a^5x^7y^2+84a^3x^6y^3+126ax^5y^4$

$$+126\frac{x^4y^5}{a}+84\frac{x^3y^6}{a^3}+36\frac{x^2y^7}{a^5}+9\frac{xy^8}{a^7}+\frac{y^9}{a^9}.$$

3. (i) $3360x^4$. (ii) $\frac{55}{2304}a^4b^8$. (iii) $42a^5x^4$. (iv) 252.

(v) -252. **4.** $-120a^8b^{12}$. **5.** ${}^{25}C_{10}.2^{10}.3^{-15}$.

6. $(-1)^n\frac{\lfloor 3n}{\lfloor n\,\lfloor 2n}x^n$. **7.** $2(5x^4-20x^2+16)$. **8.** $2(x^6+30x^4+60x^2+8)$.

9. $-1025024a^9$. **10.** 215040. **11.** $1-20x+200x^2$.

12. $1-nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2-\frac{n(n-1)(n+4)}{6}x^3$.

13. $\frac{n(n-1)(n^2+7n+18)}{24}$. **14.** 4433. **15.** $-\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor 2(n-m)\,\lfloor 2m+1}$.

16. $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} x$ and $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} \cdot \dfrac{1}{x}$. 17. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n+1} + (2n+1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n-1}$

$$+\frac{(2n+1).2n}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{y}\right)^{2n-3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(2n+1)2.n.(2n-1)\cdots(2n-r+2)}{\lfloor r}\left(\frac{x}{y}\right)^{2n-2r+1}+\cdots+\left(\frac{y}{x}\right)^{2n+1}.$$

the two middle terms are $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} \cdot \dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} \cdot \dfrac{y}{x}$.

18. (i) ${}^{35}C_{18}x^{15}.a^{17}.b^{18}$; $-{}^{35}C_{17}b^{17}.a^{18}.x^{20}$.

(ii) $12096x^{-3}$, $672x^{-6}$. (iii) $\dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^n}$. (iv) $59136x^6$.

21. 4. 23. 7. 25. n. 27. 2. 30. $x=1$, $a=2$, $n=7$. 33. 8.

34. (i) 11th term. (ii) 4th term. (iii) 6th term.

38. $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1} 2^{r-1} x^{r-1}$;

$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1} 2^{n-r+1} x^{n-r+1}$.

45. (i) 92236816. (ii) ·996.

বিংশ অধ্যায়

অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য

(Infinite Geometric Series and Binomial Theorem with negative or fractional index)

20·1. অসীম গুণোত্তর শ্রেণী (Infinite Geometric Series). যে শ্রেণীর পদসংখ্যা সীমায়িত নয়, বস্তুতপক্ষে সংখ্যাতীত, তাহাই **অসীম শ্রেণী** নামে অভিহিত। অসীম শ্রেণী গণিতশাস্ত্রে একটি বিশিষ্ট স্থান অধিকার করিয়া আছে বলিয়া ইহার সহিত কিছু পরিচয় বাঞ্ছনীয়। অনেক অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি অসীম। আরও বহুপ্রকার শ্রেণী আছে, যেগুলির পদসংখ্যা অসীম এবং তাহাদের সমষ্টিও অসীম। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর এবং আরও অনেক প্রকার অসীম শ্রেণীর সমষ্টি সসীম। এই অধ্যায়ে আমরা অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং দ্বিপদরাশির বিস্তৃতি কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে সসীম সমষ্টিবিশিষ্ট অসীম শ্রেণীতে পরিণত হয়, তৎসম্বন্ধে আলোচনা করিব।

প্রথমে আমরা $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots\cdots$ এই গুণোত্তর শ্রেণীটি লইয়া আলোচনা আরম্ভ করিব।

$$\text{এই শ্রেণীর } n\text{-সংখ্যক পদের সমষ্টি} = \frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

ইহা হইতে প্রতীয়মান হয় যে, n যতই বৃহৎ হউক না কেন অর্থাৎ পদসংখ্যা যত বেশী হউক না কেন এই শ্রেণীর সমষ্টি সতত 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ সসীম। n ক্রমাগত বর্ধিত করিলে $\frac{1}{2^{n-1}}$ এই ভগ্নাংশের মান ক্রমাগত হ্রাস পাইতে থাকে এবং এই মান ইচ্ছামত আমরা হ্রাস করিতে পারি। মনে কর, n যখন 10, তখন $\frac{1}{2^{n-1}}$ এর মান $\frac{1}{2^9}$ এবং n যখন 11, তখন $\frac{1}{2^{n-1}}$ এর মান $\frac{1}{2^{10}}$ অর্থাৎ $\frac{1}{2^9}$ এর $\frac{1}{2}$. সুতরাং, $\frac{1}{2^{10}}$ এর মান $\frac{1}{2^9}$ এর মানের অর্ধেক বলিয়া নিশ্চয়ই $\frac{1}{2^9}$

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এই শ্রেণীর যথেষ্ট সংখ্যক পদ লইয়া আমরা 2 এবং এই শ্রেণীর সমষ্টির পার্থক্য $\frac{1}{2^{n-1}}$ কে যে-কোন (প্রদত্ত) ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করিতে পারি।

অতএব, এই অসীম শ্রেণীর সমষ্টি 2 করা যাইতে পারে এবং তাহাতে যে ভুল হয়, তাহা নিতান্তই নগণ্য।

অসীম শ্রেণীসমূহের প্রকৃতি-অনুসারে তাহারা সাধারণতঃ তিন ভাগে বিভক্ত, (1) **অভিসারী** (convergent), (2) **অপসারী** (divergent) এবং (3) **দোলায়মান** (oscillatory বা periodic convergent)।

(1) কোন শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, n অসীম হইলেও, যদি কোন নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা অতিরিক্ত না হয়, তবে সেই শ্রেণীকে **অভিসারী অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

(2) n-এর মান ইচ্ছামত বর্ধিত করিয়া কোন শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যে-কোন নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা যদি বৃহত্তর করা যায়, তবে সেই শ্রেণীকে **অপসারী অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $1+2+3+4+5+6+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

(3) আবার, কোন শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি n এর মান অনুযায়ী দুইটি রাশির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে, তখন শ্রেণীটিকে **দোলায়মান অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $a, -a, a, -a, a, -a, \cdots\infty$ পর্যন্ত। এই শ্রেণীটির বৈশিষ্ট্য ইহার যুগ্মসংখ্যক পদের সমষ্টি 0 এবং অযুগ্মসংখ্যক পদের সমষ্টি a.

আবার, এমন বহু প্রকার শ্রেণী আছে, যাহাদের প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের কোন পদ্ধতি আমাদের জানা নাই। সেই সকল শ্রেণী অভিসারী কি অপসারী তাহা নির্ণয়ের পদ্ধতি উচ্চ মাধ্যমিক পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া তাহা আর এখানে আলোচিত হইল না। তবে, কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী কি অপসারী, তাহা নির্ণয় করিবার একটি নিয়ম এখানে উল্লেখমাত্র করা হইল।

যদি কোন অসীম শ্রেণীর পদগুলি পর পর একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক (alternately positive and negative) হয় এবং সাংখ্যমান হিসাবে প্রত্যেক পদ পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে শ্রেণীটি অভিসারী হইবে।

আমরা এখন সাধারণ গুণোত্তর শ্রেণী $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \cdots$ এর সমষ্টির বিষয় আলোচনা করিব। এই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S ধরিলে r যদি < 1 হয়, তবে

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

$r < 1$ হইলে, n যত বৃহৎ হইবে, r^n এবং সঙ্গে সঙ্গে $\frac{ar^n}{1-r}$ তত ক্ষুদ্র হইবে এবং n যথেষ্ট পরিমাণে বর্ধিত করিয়া এই শ্রেণীর n পদের সমষ্টির সহিত $\frac{a}{1-r}$ এর পার্থক্য ইচ্ছামত কম করিতে পারি। অর্থাৎ $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$ গুণোত্তর শ্রেণীটি অসীম হইলে r যদি < 1 হয়, তবে ইহার সমষ্টি আমরা $\frac{a}{1-r}$ এর সমান ধরিয়া লইতে পারি।

$$\therefore \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{1-r}}. \qquad \cdots \qquad \text{(A)}$$

আবৃত্ত দশমিক অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রকৃষ্ট উদাহরণ। একটি দৃষ্টান্ত হইতে বিষয়টি পরিষ্কার বুঝা যাইবে।

$$\begin{aligned}
\cdot 5\dot{3}\dot{4} &= \cdot 534343434\cdots\cdots \\
&= \ \cdot 5 \\
&\quad + \cdot 034 \\
&\quad + \cdot 00034 \\
&\quad + \cdot 0000034 \\
&\quad + \cdot 000000034 \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{5}{10} + \frac{34}{1000} + \frac{34}{100000} + \frac{34}{10000000} + \frac{34}{1000000000} + \cdots \\
&= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \frac{34}{10^9} + \cdots \\
&= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) \\
&= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} \times \frac{100}{99} = \frac{5}{10} + \frac{34}{990}. \\
&= \frac{495 + 34}{990} = \frac{529}{990}.
\end{aligned}$$

এই ভগ্নাংশ পাটীগণিতের সাধারণ নিয়মানুসারে লব্ধ ভগ্নাংশের সহিত অভিন্ন।

যে সকল অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, কেবলমাত্র সেই সকল অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়যোগ্য একটি সসীম রাশি। কিন্তু সাধারণ অনুপাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঐ অসীম শ্রেণীগুলির সমষ্টিও অসীম হইবে।

20·2. ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাংশ সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for negative or fractional index).

x এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং n একটি ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}x^4$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|5}}x^5 + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত।} \qquad (1)$$

দ্বিপদ উপপাদ্যে, সূচক n ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হইলে ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না। n ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি এবং n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে আপাত কোন পার্থক্য পরিলক্ষিত না হইলেও দুই একটা বড় রকমের পার্থক্য আছে তাহা শিক্ষার্থীদের স্মরণ রাখা বিশেষ প্রয়োজন।

n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলি আমরা ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$,....${}^nC_r$ প্রভৃতি প্রতীকদ্বারা সূচিত করিতে পারি। কিন্তু, n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলি এই সকল প্রতীকদ্বারা আমরা কখনই প্রকাশ করিতে পারি না। সুতরাং, n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ বা $(r+1)$-তম পদ ${}^nC_rx^r$ দ্বারা সূচিত করা যাইবে না। এই ক্ষেত্রে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ বা সাধারণ পদ লিখিতে উহা t_{r+1} দ্বারা সূচিত করিয়া সহগটি সম্পূর্ণরূপে লিখিতে হয়।

∴ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ বা t_{r+1}

$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}} r^r$, যখন n ঋণাত্মক বা একটি ভগ্নাংশ।

এই সাধারণ পদের লবের অন্তর্গত পদ-সংখ্যা-নির্দেশক r সতত একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা। অতএব, n ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হইলে $n-r+1$ কখনও শূন্য হইতে পারে না। সুতরাং, এই ক্ষেত্রে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা অসীম অর্থাৎ এই বিস্তৃতি একটি অসীম শ্রেণী। কিন্তু n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ সসীম হইবে।

আবার, n যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তবে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x এর মান যাহাই হউক না কেন (সসীম), পদসংখ্যা সমান বলিয়া ডান পক্ষ বাম পক্ষ হয়। কিন্তু n যদি ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হয়, তবে পদ-সংখ্যা অসীম বলিয়া x-এর মান যেমন ইচ্ছা লওয়া চলিবে না। x-এর মান এমনভাবে লইতে হইবে যে, বাম পক্ষ যেন একটি অভিসারী অসীম শ্রেণী হয়। দেখা গিয়াছে, (প্রমাণ পাঠ্য বহির্ভূত বলিয়া দেওয়া হইল না, যে কোন উচ্চতর বীজগণিত দ্রষ্টব্য) x-এর মান যদি -1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর $(-1<x<1)$ হয়, তবে বিস্তৃতির ডান পক্ষ সমান বাম পক্ষ থাকে। একটি উদাহরণ যোগে বিষয়টি বিশদ করা হইল। উপরে (1) এ $n=-1$ ও $x=-x$ বসাইলে,

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\infty$ পর্যন্ত [See § 20·3 (5)]

এখন যদি $x=\frac{1}{2}$ হয়, (B)

ডান পক্ষ $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ [See § 20·1 (A)]

বাম পক্ষ $=(1-\frac{1}{2})^{-1}=2$

কিন্তু $x=2$ বসাইলে,

ডান পক্ষ $=1+2+2^2+2^3+\cdots\infty$ পর্যন্ত

>1

বামপক্ষ $=(1-2)^{-1}=-1<1,$

আবার, $x=1$ (B) তে বসাইলে,

$\frac{1}{0}=1+1+1+1+\cdots\infty$ পর্যন্ত,

$x=-1$ বসাইলে,

$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\cdots$

বলাবাহুল্য ডান পক্ষ একটি দোলায়মান (0 ও 2 এর মধ্যে) অসীম শ্রেণী এবং কোন ক্ষেত্রেই উহার মান $\frac{1}{2}$ নয়। সেজন্য n যখন ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হয়

তখন x-এর মান 1 এবং -1র মধ্যে না থাকিলে ডান পক্ষের অসীম শ্রেণী বাম পক্ষের দ্বিপদের সহিত মিলিবে না। সুতরাং, এ-বিষয়ে ছাত্রগণকে যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন করিতে হইবে।

20·3. কতকগুলি প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি : ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা কতকগুলি প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি পাই। নিম্নে সেগুলি দেওয়া হইল। অনেক প্রশ্নের সমাধানে এগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। সেইজন্য এগুলির সহিত শিক্ষার্থীদের পরিচয় বাঞ্ছনীয়।

1. $$(1-x)^n = 1 + n(-x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot(-x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r + \cdots\cdots \infty$$ পর্যন্ত।

$$= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + (-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ পর্যন্ত।

2. $$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ পর্যন্ত।

$$= 1 - nx + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + (-1)^r\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ পর্যন্ত।

3. $(1-x)^{-n}=1+(-n)(-x)+\frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2$

$$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}\cdot(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\cdots\ \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$+(1)^{2r}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\ \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$=\mathbf{1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3}$$

$$\mathbf{+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots\ \infty} \textbf{ পর্যন্ত।}$$

4. $(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{-1(-1-1)}{\lfloor 2}\cdot x^2$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$

$$\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$\mathbf{=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^r x^r+\cdots\cdots\ \infty} \textbf{ পর্যন্ত।}$$

5. $(1-x)^{-1}=1+(-1)(-x)+\frac{-1(-1-1)}{\lfloor 2}(-x)^2$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\cdots\ \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$\mathbf{=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\ \infty} \textbf{ পর্যন্ত।}$$

দ্রষ্টব্য। (4) এবং (5)এ বিস্তৃতিদ্বয় দুইটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং ইহাদের সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $-x$ এবং $+x$.

6. $(1+x)^{-2}=1+(-2)x+\dfrac{-2(-2-1)}{\lfloor 2}x^2$

$+\dfrac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$

$+\dfrac{-2(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

$=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r.(r+1)x^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

7. $(1-x)^{-2}=1+(-2)(-x)+\dfrac{-2(-2-1)}{\lfloor 2}(-x)^2$

$+\dfrac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$

$+\dfrac{-2(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত

$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

$+(r+1)x^r+\cdots\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

8. $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$

$+\dfrac{(r+1)(r+2)}{2}x^r+\cdots\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

9. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\frac{1}{2})x+\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2$

$+\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$

$+\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

$=1-\frac{1}{2}x+\dfrac{1.3}{2.4}x^2-\dfrac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$

$+(-1)^r\dfrac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2r}.\ x^r\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

10. $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\frac{1}{2})(-x)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}.(-x)^2$

$$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}.(-x)^r+\cdots\ \infty$$ পর্যন্ত।

$$=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2^2\lfloor 2}x^2+\frac{1.3.5}{2^3\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{2r}\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2^r\lfloor r}x^r+\cdots\ \infty$$ পর্যন্ত।

$$=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{13.5\cdots(2r-1)}{2.4.6.\cdots 2r}x^r+\cdots\ \infty$$ **পর্যন্ত।**

20·4. n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাংশ হইলে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ।

Ex. 1. *Find the first three terms in the expansion of*

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

প্রদত্ত দ্বিপদদ্বয়ের x^2-সম্বলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়া আমরা পাই
প্রদত্ত রাশিমালা $=(1+x-\frac{1}{2}x^2+\cdots)(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots)$

$$=1+x(1+\tfrac{1}{2})+x^2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{2})+\cdots\cdots$$

$$=1+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{8}x^2.$$

উপরের উদাহরণে $x=\cdot002$ হইলে $x^2=\cdot000004$ এবং বিস্তৃতির তৃতীয় পদ দশমিক বিন্দুর পর পাঁচটি শূন্য দিয়া আরম্ভ বলিয়া প্রথম অথবা দ্বিতীয় পদের তুলনায় অতীব ক্ষুদ্র।

সুতরাং, $x=\cdot002$ হইলে আমাদের যদি এই বিস্তৃতির সাংখ্যমান আসন্ন পঞ্চম দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিতে হয়, তবে এই বিস্তৃতির x^2-সম্বলিত পদ বর্জন করিয়া $1+\frac{3}{2}x$ এ x এর মান $\cdot002$ বসাইলেই চলে।

Ex. 2. *Find the cube root of 126 to 5 places of decimals.*

নির্ণেয় ঘনমূল $= 126^{\frac{1}{3}} = (5^3+1)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= 5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\right)$$

$$= 5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots\cdots$$

$$= 5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots\cdots$$

$$= 5+\frac{\cdot 04}{3}-\frac{\cdot 00032}{9}+\frac{\cdot 0000128}{81}-\cdots\cdots$$

$$= 5+\cdot 013333-\cdot 000035\cdots+\cdot 0000001\cdots-\cdots\cdots$$

$= 5\cdot 01329$ পাঁচ দশমিক পর্যন্ত।

20·5. বৃহত্তম পদ। দ্বিপদ উপপাদ্যে সূচক n একটি ধনাত্মক অখণ্ডরাশি হইলে যে পদ্ধতিতে ইহার বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ স্থির করা হইয়াছে, সূচক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে সেই একই পদ্ধতিতে বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ স্থির করা হইয়া থাকে। সেইজন্য পুনরায় আর তাহা প্রদর্শিত হইল না। কোন বিশেষ ক্ষেত্রে কিরূপে ঐ পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় তাহা নিম্নে দেখানো হইল।

Ex. 1. *Which is the numerically greatest term in the expansion of* $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$ *when* $x=\frac{1}{8}$?

এখানে, আমাদের চিহ্ন-বিবর্জিত পরম সাংখ্যমান স্থির করিতে হইবে। মনে কর, $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$ এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ যথাক্রমে t_r, t_{r+1}.

$$\therefore\quad \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{-\frac{11}{4}-r+1}{r}\cdot\left(-7x\right)=\frac{(4r+7)}{4r}\cdot\frac{7}{8}=\frac{28r+49}{32r}.$$

$\therefore\ t_{r+1} >$ = অথবা $< t_r$, হইবে,

যতক্ষণ $28r+49 >$ = অথবা $< 32r$

অর্থাৎ, $t_{r+1} >$ = অথবা $< t_r$ হইবে,

যতক্ষণ $32r <$ = অথবা $> 28r+49$

অর্থাৎ, $t_{r+1} >$ = অথবা $< t_r$ হইবে, যতক্ষণ $4r <$ = অথবা > 49

অর্থাৎ $r <$ = অথবা $> 12\frac{1}{4}$.

r পদ-সংখ্যা-নির্দেশক বলিয়া ইহার মান সতত একটি অখণ্ড রাশি, $12\frac{1}{4}$ হইতে পারে না।

সুতরাং, r-এর 12 পর্যন্ত সকল মানের জন্য $t_{r+1} > t_r$ এবং r যখন 12 অপেক্ষা বৃহত্তর এক অখণ্ড রাশি তখন $t_{r+1} < t_r$.

$\therefore$ r-এর মান যখন 12, t_{r+1} অর্থাৎ ত্রয়োদশ পদ t_{13} এই বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ।

20·6 উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *In an infinite G. P. whose common ratio is less than 1, show that each term bears a constant ratio to the sum of all the terms that follow it.*

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অন্তর $r < 1$.

$\therefore$ শ্রেণীটি $= a, ar, ar^2, \cdots$ এবং ইহার n-তম পদ $= ar^{n-1}$

এই অসীম শ্রেণীর n-তম পদের পরবর্তী পদগুলির সমষ্টি

$$= ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$= ar^n(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত})$$

$$= \frac{ar^n}{1-r}.$$

$$\therefore \frac{\text{এই শ্রেণীর } n\text{-তম পদ}}{\text{এই শ্রেণীর } n\text{-তম পদের পরবর্তী পদগুলির সমষ্টি}} = \frac{ar^{n-1}}{\frac{ar^n}{1-r}} = \frac{1-r}{r}.$$

= একটি ধ্রুব-সংখ্যা, যেহেতু পদসংখ্যা n যতই হউক না কেন $\frac{1-r}{r}$ সতত একই থাকে।

Ex. 2. *Sum the series* $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots\cdots$ to ∞.

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীটির নির্ণেয় যোগফল $= S$,

তাহা হইলে, $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত। ... (1)

$\therefore$ $Sx = x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত। ... ... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$S(1-x)=1+2x+2x^2+2x^3+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

$$=1+\frac{2x}{1-x}=\frac{1+x}{1-x}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত।

$=(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত $)$

$\quad +(2x+4x^2+6x^3+8x^4+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত $)$।

$=(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত $)$

$\quad +2x(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত $)$

$=(1-x)^{-1}+2x(1-x)^{-2}$

[§ 20·3 এর (5) এবং (7) এর সাহায্যে]

$$=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Ex. 3. *Find the first three terms in the expansion of*

$$\frac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}.$$

$$\frac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}=\left\{\left(1+x\right)^{\frac{3}{4}}+\left(1+5x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}(1-x)^{-2}$$

$=(1+\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2+1+\frac{5}{2}x-\frac{25}{8}x^2)(1+2x+3x^2)$

[বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদের প্রয়োজন বলিয়া অপর পদগুলি বর্জন করা হইল]

$=(2+\frac{13}{4}x-\frac{103}{32}x^2)(1+2x+3x^2)$

$=2+4x+6x^2+\frac{13}{4}x+\frac{13}{2}x^2-\frac{103}{32}x^2$

$=2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2.$

Ex. 4. *Find the $(r+1)$th term in the expansion of*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় $(r+1)$-তম পদ

$$=\frac{-\frac{2}{3}(-\frac{2}{3}-1)(-\frac{2}{3}-2)\cdots(-\frac{2}{3}-r+1)}{\lfloor r}.(-3r)^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}.\quad\cdots\quad\frac{3r-1}{3}}{\lfloor r}$$

$$=\frac{2.5.8.\cdots(3r-1)}{3^r.\lfloor r}.3^r x^r$$

$$=\frac{2.5.8.\cdots(3r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

Ex. 5. *Prove that* $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ *to* $\cdots\infty=a^2$.

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}\cdots\infty$ পর্যন্ত $=a^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}\sqrt[8]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}}=a^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=a.$

$\therefore\ a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\cdots\infty$ পর্যন্ত $=a.a=a^2.$

Ex. 6. *Find the coefficient of* x^r *in the expansion of* $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$.

x^r বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে অবস্থিত এবং

$$t_{r+1}=\frac{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)\left(-\frac{1}{n}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}-r+1\right)}{\lfloor r}(-nx)^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n}\cdots\frac{(r-1)n+1}{n}}{\lfloor r}n^r x^r$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}$.

Ex. 7. *Which is the first negative term in the expansion of* $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$?

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

$\therefore$ যতক্ষণ পর্যন্ত $n+1>r$ থাকে, ততক্ষণ পদগুলি ধনাত্মক।

$(1+2x)^{\frac{7}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে যতক্ষণ $\frac{7}{2}+1>r$ অর্থাৎ $r<4\frac{1}{2}$ থাকে ততক্ষণ পদগুলি ধনাত্মক।

$\therefore$ $r>4\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $r=5$ হইলে বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে।

$\therefore$ $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ ষষ্ঠপদ।

Ex. 8. *Prove that the coefficient of x^r in the expansion of* $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ *is* $\frac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

প্রদত্ত দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^r অবস্থিত।

∴ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ t_{r+1}

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}.(-4x)^r$$

$$= -1)^{2r}\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\cdots(2r-1)}{\lfloor r}.2^{2r}.x^r.$$

$$= \frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2^r\lfloor r}.2^{2r}.x^r$$

$$= \frac{\lfloor r\{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)\}.2^r}{(\lfloor r)^2}\,x^r$$

$$= \frac{2.4.6\cdots\cdots 2r.1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{(\lfloor r)^2}.x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4.5.6\cdots\cdots(2r-1)(2r)}{(\lfloor r)^2}\,x^r$$

$$= \frac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}\,x^r.$$

∴ নির্ণেয় সহগ $= \dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

Ex. 9. *Prove that* $(1+x)^n$

$$= 2^n\left\{1 - n\cdot\frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3} \times \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$$(1+x)^n = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n} = \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)\right\}^{-n}$$

$$= \frac{1}{2^{-n}}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^{-n}$$

$$= 2^n\left\{1 + (-n)\frac{1-x}{1+x} + \frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}.\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= 2^n\left\{1 - n\cdot\frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2}.\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}.\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}.$$

Ex. 10. *If* $y=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$ *to* ∞, *express* x *in a series of ascending powers of* y.

$$y=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত ।}$$

$$\therefore\quad 1+y=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}=(1-x)^{-2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\therefore\quad (1-x)^2=\frac{1}{1+y}=(1+y)^{-1}.$$

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া

$$1-x=(1+y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+(-\tfrac{1}{2})y+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}y^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\underline{|3}}.y^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1-\tfrac{1}{2}y+\frac{1.3}{2.4}y^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত ।}$$

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{2}y-\frac{1.3}{2.4}y^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3-\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত ।}$$

Ex. 11. *Prove that* $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ *to* $\infty=\sqrt{8}$.

দক্ষিণ পক্ষ $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত

$$=1+\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2}.\left(\frac{1}{2^2}\right)+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{1.2.3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1+(-\tfrac{3}{2})(-\tfrac{1}{2})+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{1.2}\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

$$+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{1.2.3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(2)^{-\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}.$$

Ex. 12. *Prove that*

$$7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n+1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\dots\dots \text{ to } \infty\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\dots\dots \text{ to } \infty\right\}$$

বাম পক্ষ $=7^n\left\{1+n\cdot\frac{1}{7}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{7^2}\right.$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7^3}+\dots\dots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=7^n\left(1+\frac{1}{7}\right)^n=7^n\times\frac{8^n}{7^n}=8^n;$$

আবার দক্ষিণ পক্ষ

$$=4^n\left\{1+n\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots\dots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=4^n(1-\tfrac{1}{2})^{-n}=4^n(\tfrac{1}{2})^{-n}=4^n\times 2^n=8^n.$$

$$\therefore\quad 7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\dots\dots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\dots\dots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}.$$

Ex. 13. *Prove that the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{1}{1+x+x^2}$ is 1, 0 or -1 according as n is of the form $3m$, $3m-1$ or $3m+1$.*

প্রদত্ত রাশি $\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)(1-x^3)^{-1}$

$=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\dots+x^{3(n-1)}+x^{3n}+\dots \infty$ পর্যন্ত)

$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+\dots \infty$ পর্যন্ত

$=1+x^3+x^6+x^9+\dots\infty$ পর্যন্ত $-(x+x^4+x^7+x^{10}+\dots\infty$ পর্যন্ত)

এই শ্রেণী $x^2, x^5, x^8, x^{11},\dots$ সম্বলিত পদগুলি বিবর্জিত।

$\therefore$ n-এর আকার যখন $3m$ অর্থাৎ n যখন 3-এর গুণিতক তখন x^n-এর সহগ $=1$.

আবার n-এর আকার যখন $3m-1$ অর্থাৎ n যখন 2, 5, 8, 10,.... প্রভৃতি হয়, তখন এই শ্রেণী x^2, x^5, x^8,.... প্রভৃতি পদ-বিবর্জিত বলিয়া x^n-এর সহগ $=0$.

এবং n-এর আকার যখন $3m+1$ অর্থাৎ n যখন 1, 4, 7, 10,.... প্রভৃতি হয় তখন x^n-এর সহগ $=-1$.

Ex. 14. *Find the coefficient of x^r in the product $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$ to infinity, x being <1.*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}$$
$$=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{1-x}$$
$$=\frac{1-x^{2n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{2n}}{1-x}.$$

n অসীম এবং $x<1$ হইলে, x^{2n} খুবই সামান্য এবং প্রথম পদের তুলনায় দ্বিতীয় পদের পরিমাপ শূন্য ধরা যাইতে পারে।

$$\therefore\ (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$
$$=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত।}$$

$\therefore$ x^r এর নির্ণেয় সহগ $=1$.

Ex. 15. *Find the value of the series*

$$2+\frac{5}{\lfloor 2.3}+\frac{5.7}{\lfloor 3.3^2}+\frac{5.7.9}{\lfloor 4.3^3}+\cdots \text{ to } \infty.$$

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী}=2+\frac{3.5}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{3.5.7}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{3.5.7.9}{\lfloor 4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$
$$=2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{2^2}{3^2}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{\lfloor 4}\cdot\frac{2^4}{3^4}+\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$=(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}=(3)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}.$$

Ex. 16. *If p be very nearly equal to q, but greater than q, show that* $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}=\dfrac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ *approximately.*

যেহেতু p এবং q প্রায় সমান মানবিশিষ্ট, p এবং q-এর তুলনায় $p-q$ অতিক্ষুদ্র। $\therefore$ $(p-q)$-এর সহিত তুলনায় $(p-q)^2$, $(p-q)^3$ প্রভৃতির মান এত নগণ্য যে, সেগুলি বর্জন করা যায়।

এক্ষণে, $$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\left\{\frac{(p+q)+(p-q)}{(p+q)-(p-q)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{(p+q)^{\frac{1}{n}}\left\{1+\dfrac{p-q}{p+q}\right\}^{\frac{1}{n}}}{(p-q)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\dfrac{p-q}{p+q}\right\}^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{p-q}{n(p+q)}}{1-\dfrac{p-q}{n(p+q)}}=\frac{n(p+q)+(p-q)}{n(p+q)-(p-q)}$$

$$=\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}.$$

Ex. 17. *If c be a quantity so small that c^3 may be neglected in comparison with l^3, show that* $\sqrt{\dfrac{l}{l+c}}+\sqrt{\dfrac{l}{l-c}}$ *is very nearly equal to* $2+\dfrac{3c^2}{4l^2}$.

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{c}{l}}}+\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{c}{l}}}$$

$$=\left(1+\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{c}{l}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}\frac{c^2}{l^2}+\cdots$$

$$+1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{c}{l}\right)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{c^2}{l^2}+\cdots$$

[l^3-এর সহিত তুলনায় c^3 বর্জন করা যাইতে পারে বলিয়া $\dfrac{c^2}{l^2}$-এর অতিরিক্ত ঘাতসমূহ বর্জন করা হইল]

$$=1-\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}+1+\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}=2+\frac{3c^2}{4l^2}.$$

Ex. 18. *Show that*

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\right\}$$

দক্ষিণ পক্ষ

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+1)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left(1-\frac{2}{10^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\left(\frac{98}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\left(\frac{50}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$$

$$=\frac{7}{5}\times\frac{5\sqrt{2}}{7}=\sqrt{2}.$$

Ex. 19. *Find the sum of the first* $(r+1)$ *coefficients in the expansion of* $(1-x)^{\frac{1}{2}}$.

মনে কর, $(1-x)^{\frac{1}{2}}=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots+p_rx^r+\cdots$ (1)

আবার, $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots$ (2)

সুতরাং, (1) এবং (2)-এ লিখিত শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r-এর সহগ $(1-x)^{\frac{1}{2}}\times(1-x)^{-1}$-এর গুণফলে অর্থাৎ $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগের সমান হইবে।

কিন্তু (1) এবং (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r-এর সহগ

$$=p_0+p_1+p_2+p_3+\cdots+p_r,$$

এবং ইহা স্পষ্টতঃই $(1-x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$-সংখ্যক পদের সহগ সমষ্টি।

এবং $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ

$$=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)}{\lfloor r}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{\lfloor r}=\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r\lfloor r}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ সমষ্টি $=\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r\lfloor r}.$

Ex. 20. *Find the coefficient of x^r in the expansion of $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots to\ infinity)^{\frac{2}{3}}$, when $x<1$.*

$1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$$=1+(-3).x+\frac{(-3).(-4)}{1.2}x^2+\frac{(-3).(-4).(-5)}{1.2.3}x^3+\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$

$$=(1+x)^{-3}.$$

$\therefore$ $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$ অসীম পর্যন্ত $)^{\frac{2}{3}}=\{(1+x)^{-3}\}^{\frac{2}{3}}$

$$=(1+x)^{-2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ

$$=\frac{-2.-3.-4\cdots\{-(r+1)\}}{\lfloor r}=(-1)^r.(r+1).$$

Ex. 21. *Find the sum of n terms of the series* $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$ *with the help of the Binomial Theorem.*

প্রদত্ত শ্রেণীর $(r+1)$-তম পদ

$$=(r+1)(r+2)(r+3)=6\times\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}$$

$=6\times(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$=6\times(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির প্রথম n-সংখ্যক সহগের সমষ্টি,

$=6\times(1-x)^{-5}$-এর বিস্তৃতির x^{n-1}-এর সহগ,

$$=6\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Examples XX

1. Find the sum of the following series :

(i) $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{27}+\cdots\cdots$ to ∞.

(ii) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots$ to ∞.

(iii) $18-12+8-\cdots\cdots$ to ∞.

(iv) $\frac{7}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ to ∞.

(v) $(\sqrt{3}+1)+2+2(\sqrt{3}-1)+\cdots$ to ∞.

(vi) $(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+\cdots\cdots$ to ∞.

(vii) $(\sqrt{5}+2)+1+(\sqrt{5}-2)+\cdots\cdots$ to ∞.

(viii) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots\cdots$ to ∞.

(ix) $30-3+\cdot3-0\cdot3+\cdot003-\cdots\cdots$ to ∞.

(x) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{3}{2^6}+\cdots\cdots$ to ∞.

(xi) $\frac{2}{3}-\frac{5}{3^2}+\frac{2}{3^3}-\frac{5}{3^4}+\frac{2}{3^5}-\frac{5}{3^6}+\cdots\cdots$ to ∞.

(xii) $\cdot9, \cdot03, \cdot001, \cdots\cdots\cdots$ to ∞.

2. Find the G. P. whose sum to infinity is 2 and whose second term is $\frac{4}{9}$.

3. The first two terms of an infinite G. P. are together equal to 1, and every term is twice the sum of all the terms that follow it ; find the series.

4. Find the common ratio of a G. P., continued to infininty in which each term is ten times the sum of all the terms which follow it.

5. Find the sum of the infinite series $1+(1+a)r+(1+a+a^2)r^2+(1+a+a^2+a^3)r^3+\cdots\cdots\cdots$, where a and r are proper fractions .

6. If $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots n$ terms, find the value of n so that error in taking the value of s is equal to 2 is $\frac{1}{1048576}$.

7. Find the equivalent vulgar fraction of the following recurring decimals by exhibiting each of them as a series in G. P.

(i) $\cdot\dot{0}3\dot{7}$. (ii) $\cdot 5\dot{4}\dot{8}$. (iii) $\cdot 02\dot{1}\dot{8}$.

8. Sum the following series when $x < 1$,

(*a*) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots$ to infinitv.

(*b*) $1.2x+2.4x^2+3.8x^3+\cdots\cdots$ to infinity.

(*c*) $2.3x+5.9x^2+8.27x^3+\cdots\cdots$ to infinity.

(*d*) $1-3x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots$ to infinity.

9. Find the expansion of :

(i) $(1-x)^{-3}$. (ii) $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. (iii) $\sqrt[3]{1-x^2}$.

10. Expand $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ in ascending powers of x as far as the sixth term.

11. Show that the coefficient of x^{2r} in the expansion of $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ is 2.

12. (i) If x be small that its cube and higher powers may be neglected, show that

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=2+x+\tfrac{5}{4}x^2.$$

(ii) If x is so large that $\dfrac{1}{x^5}$ is negligible, show that

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x} \text{ approximately.}$$

13. If x be small compared to unity, find the value of

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}}$$

when $x=\cdot 0036$. Correct up to second place of decimals.

14. Show that $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots$ to infinity $=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$ to infinity when $x<1$.

15. If $y=3x+6x^2+10x^3+15x^4+\cdots\cdots$ to ∞ when $x<1$, show that $x=\frac{1}{3}y-\frac{1.4}{3.6}y^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}y^3-\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}y^4+\cdots\cdots$ to ∞.

16. Show that $(1+x)^3$

$$=1+\frac{3x}{1+x}+\frac{3.4}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots \text{ to } \infty$$

17. When $x>1$, show that

$$x^n=1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

18. Show that the first negative term in the expansion of $(1+x)^{\frac{5}{2}}$ is $-\frac{5x^4}{128}$.

19. Find the general term in the expansion of $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

20. Let m_r denote the middle term of $(1-x)^{2r}$. Find m_r and show that, r taking all positive integral values

$$1+m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}.$$

21. Find the greatest term in each of the following expansions :

(i) $(1+x)^{\frac{19}{2}}$, when $x=\frac{2}{5}$. (ii) $(7-4x)^{-5}$, when $x=\frac{3}{4}$.

(iii) $(4+13x)^{\frac{2}{3}}$, when $x=-\frac{8}{15}$.

(iv) $(1-x)^{-\frac{14}{9}}$, when $x=\frac{29}{30}$.

22. Find the general term (t_{r+1}) in the expansion of the following :

(i) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$. (ii) $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. (iii) $(1+x)^{\frac{5}{3}}$.

23. Show that the general term in the expansion of $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ is

$$\frac{p(p+q)(p+2q)\cdots\{p+(r-1)q\}}{\lfloor r}.\ x^r.$$

24. Find the coefficient of x^n in the expansion of

(i) $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots \text{ to } \infty)^{\frac{2}{3}}$

(ii) $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\cdots \text{to } \infty)^{\frac{1}{6}}$.

25. Find the sum of the following series :

(i) $1+2.\ \frac{1}{3}+3.\ \frac{1}{3^2}+4.\ \frac{1}{3^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(ii) $1+\ \frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(iii) $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots \text{to } \infty$.

(iv) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{6^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(v) $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\frac{5.8.11.14}{8.12.16.20}+\cdots\cdots \text{to } \infty$.

(vi) $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\frac{4.5.6.7}{6.9.12.15}+\cdots\cdots \text{to } \infty$.

(vii) $1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3.5}{2.4}.\frac{1}{4^2}+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{1}{4^3}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{1}{4^4}+\cdots \text{ to } \infty$.

(viii) $1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.5}{4.8}.\frac{1}{3^2}+\frac{1.5.9}{4.8.12}.\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

26. Identifying as binomial expansions, show that

$$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots=0{\cdot}4 \text{ nearly.}$$

27. Find the sum of the first $(r+1)$ coefficients in the expansions of $(1-x)^{\frac{1}{2}}$.

28. If $p_r = \dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots 2r}$, prove that

$$p_1 p_{2n} + p_2 p_{2n-1} + \cdots\cdots + p_{n-1}p_{n+2} + p_n p_{n+1} = \frac{1}{2} - p_{2n+1}.$$

29. Find the cube of

$$1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

30. Show that $(1-x)^{-1}$ can be expanded in an infinite series both as

$$1 + x + x^2 + \cdots\cdots, \text{ and } -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \cdots$$

If $x > 1$, which of these expansions, if any, cannot be a valid expansion of $(1-x)^{-1}$ and why ?

31. Show that

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1.3}{2^2\lfloor 2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \cdots\cdots$$

32. Show that

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots\cdots$$

33. If n be a positive integer, prove that

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2} + \cdots = 0.$$

34. Where the series extends up to $(n+1)$ terms, show that

$$1 - \frac{nx}{1+x} + \frac{(n+2x)(n-1)}{\lfloor 2\,(1+x)^2} - \frac{(n+3x)(n-1)(n-2)}{\lfloor 3.(1+x)^3} + \cdots = 0.$$

35. Find, with the help of the Binomial Theorem, the sum of n terms of the series $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots\cdots$.

36. Find the sum of n terms of the series

$$1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

37. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$ is $(-1)^n(n^2+2n+2)$.

38. Prove that the coefficient of x^n in the expansion of $(1-9x+20x^2)^{-1}$ is $5^{n+1}-4^{n+1}$.

39. If x be small fraction, show that

$$\frac{(1-x)^{-\frac{2}{3}}-(1+x)^{\frac{2}{3}}}{(1-x)^{-1}-(1+x)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}x \text{ very nearly.}$$

If $x = \cdot 1$, do you expect to get the value of the above expression correct to two decimal places? Give reasons for your answer.

40. If b^2 is much larger compared to ac, find the approximate roots of $ax^2+bx+c=0$.

ANSWERS

1. (i) 1; (ii) 3; (iii) $10\frac{4}{5}$; (iv) $\frac{49}{64}$; (v) $5+3\sqrt{3}$; (vi) $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$; (vii) $\frac{1}{4}(11+5\sqrt{5})$; (viii) $2\sqrt{2}$; (ix) $27\frac{3}{11}$; (x) $1\frac{2}{3}$; (xi) $1\frac{3}{8}$; (xii) $\frac{27}{25}$.

2. $\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \cdots\cdots$ or $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}\cdots\cdots$. **3.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\cdots\cdots$. **4.** $\frac{1}{11}$.

5. $\dfrac{1}{(1-r)(1-ar)}$. **6.** 21; **7.** (i) $\dfrac{1}{27}$; (ii) $\dfrac{181}{330}$; (iii) $\dfrac{6}{275}$.

8. (*a*) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. (*b*) $\dfrac{2x}{(1-2x)^2}$. (*c*) $\dfrac{3x(x+2)}{(1-3x)^2}$. (*d*) $\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.

9. (i) $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$. (ii) $1+x+\dfrac{1.3}{1.2}x^2+\dfrac{1.3.5}{1.2.3}x^3+\cdots$.

(iii) $1-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1.2}{3.6}x^4-\dfrac{1.2.5}{3.6.9}x^6-\dfrac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^8-\cdots$.

10. $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{8}x^5$. **13.** $\cdot 97$. **19.** $\dfrac{1.4.7.10\cdots\cdots(3r-2)}{\lfloor r}x^r$.

20. $\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}x^r$. **21.** (i) 3rd and 4th term. (ii) 3rd and 4th term. (iii) 9th term. (iv) 17th term.

22. (i) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor\!\underline{r}}x^r$.

(ii) $\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{\lfloor\!\underline{r}}x^r$. (iii) $(-1)^r.10.\dfrac{1.4.7\cdots\cdots(3r-8)}{\lfloor\!\underline{r}}\left(\dfrac{x}{3}\right)^r$.

24. (i) $\dfrac{2.5.8\cdots\cdots(3n-1)}{\lfloor\!\underline{n}}.\dfrac{1}{3^n}$. (ii) $(-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-3)}{\lfloor\!\underline{n}}.\dfrac{1}{2^n}$.

25. (i) $2\frac{1}{4}$. (ii) $2^{\frac{2}{3}}$. (iii) $\sqrt{3}-1$. (iv) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(v) $4\sqrt[3]{2}-2$. (vi) $2\frac{7}{8}$. (vii) $\frac{8}{9}\sqrt{3}$. (viii) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

27. $\dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{\lfloor\!\underline{r}}.\dfrac{1}{2^r}$. **29.** $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$

30. Second expansion, since $\dfrac{1}{x}<1$. **35.** $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

36. $\dfrac{\lfloor\!\underline{2n-1}}{\lfloor\!\underline{n}\,\lfloor\!\underline{n-1}}$. **39.** Yes, terms neglected are $\dfrac{x^2}{27}$ and smaller terms.

40. $-\dfrac{c}{b}-\dfrac{ac^2}{b^3}$ and $-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{ac^2}{b^3}$.

একবিংশ অধ্যায়

Sec. A. সূচকশ্রেণী

21·1. ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণ লগারিদ্‌মের অর্থাৎ যে লগারিদ্‌মের নিধান 10, তাহার প্রয়োগ খুব ব্যাপক। সাধারণ লগারিদ্‌ম্ সরাসরি নির্ণয় করা যায় না। প্রথমে অন্য নিধানে সংখ্যাসমূহের লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করিয়া পরে ঐগুলি সাধারণ লগারিদ্‌মে পরিণত করিতে § 12·4 অনুসারে 10 নিধানে পরিবর্তন করা হয়। নেপিয়ার কর্তৃক আবিষ্কৃত লগারিদ্‌ম্ নেপিরীয় লগারিদ্‌ম্ (Napierian logarithm) বা প্রকৃত লগারিদ্‌ম্ (Natural logarithm) নামে পরিচিত। এই লগারিদ্‌মের নিধান 'e'. ইহাকে নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীর দ্বারা নির্দেশ করা হইয়া থাকে।

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

এক অসীম শ্রেণীর দ্বারা e সূচিত হইলেও ইহার মান সসীম এবং 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী।

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

দক্ষিণ পক্ষস্থ সকল পদই ধনাত্মক বলিয়া e এর মান স্পষ্টতঃই 2 অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার $\lfloor 3$ অর্থাৎ $3.2.1 > 2.2.1$ অর্থাৎ 2^2. $\therefore \ \frac{1}{\lfloor 3} < \frac{1}{2^2}$.

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{\lfloor 4} < \frac{1}{2^3}, \frac{1}{\lfloor 5} < \frac{1}{2^4}, \cdots$ ইত্যাদি।

$$\therefore \ \frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$$

$$+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

[∵ প্রথম পদ ব্যতীত দক্ষিণ পক্ষস্থ শ্রেণীর প্রত্যেক পদ বাম পক্ষস্থ শ্রেণীর অনুরূপ পদ অপেক্ষা বৃহত্তর।]

অর্থাৎ $< \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ [দক্ষিণ পক্ষস্থ অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি]

অর্থাৎ $< 1.$

$\therefore \ 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots \infty$ পর্যন্ত $< 2+1$ অর্থাৎ $< 3.$

$\therefore \ 2 < e < 3$ অর্থাৎ e এর মান 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী।

উপরোক্ত শ্রেণীর যথেষ্ট-সংখ্যক পদ লইয়া যে-কোন দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার মান নির্ণয় করা যায়। দশ দশমিক স্থান পর্যন্ত e এর মান নিম্নে দেওয়া গেল।

$$e = 2{\cdot}7182818284.$$

Prof. J. C. Adams 'e' এর মান সার্ধদ্বিশতাধিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিয়াছেন।

21·2. 'e' একটি অমেয় সংখ্যা (Incommensurable number)।

'e' যদি অমেয় না হয়, তবে অবশ্যই ইহা প্রমেয় হইবে। মনে কর, 'e' দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m এবং n এর অনুপাতের সমান অর্থাৎ $e=\frac{m}{n}$.

$\therefore \ \frac{m}{n}=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots \infty$ পর্যন্ত।

উভয় পক্ষকে $\lfloor n$ দ্বারা গুণ করিলে,

$m\,\lfloor n-1 =$ একটি পূর্ণসংখ্যা (কতকগুলি পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি) $+\frac{1}{n+1}$

$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

এখন, $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots \infty$ পর্যন্ত

$$< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

অর্থাৎ $< \frac{1}{n+1} \div \left(1-\frac{1}{n+1}\right).$

অর্থাৎ $< \frac{1}{n}$, একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, যেহেতু n একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore \quad m\,\underline{|n-1}$ পূর্ণসংখ্যাটি = একটি পূর্ণসংখ্যা + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ 'e' কখনও $\frac{m}{n}$ আকারের হইতে পারে না।

$\therefore$ e একটি অমেয় সংখ্যা।

21·3. $\frac{1}{\underline{|-n}}$ এর অর্থ নির্ণয়।

উদাহরণাবলী 21·5 এ দেখা যাইবে যে, কোন কোন সময়ে আমাদের $\frac{1}{\underline{|-2}}$, $\frac{1}{\underline{|-3}}$, $\frac{1}{\underline{|-4}}$ প্রভৃতি রাশিগুলির মান নির্ণয়ের প্রয়োজন হইবে। কিন্তু, $\underline{|n} = n(n-1)\cdots 3.2.1.$ এই সংজ্ঞায় 'n' এর কোন ঋণাত্মক মান স্বীকার করা হয় না। উভয়ের মধ্যে সমন্বয় সাধনের জন্য লক্ষ্য কর,

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|(n-r)}} = n.(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1 \qquad [\ \S\ 18{\cdot}3 \text{ অনু. } 2\ ]$$

এখানে n এবং r উভয়েই ধনাত্মক সংখ্যা। উভয় পক্ষে $n=0$ বসাইলে,

$$\frac{\underline{|0}}{\underline{|-r}} = 0, \text{ কিন্তু } \underline{|0} = 1. \qquad [\ \S\ 18{\cdot}3 \text{ অনু. } 3\ ]$$

সুতরাং, $\frac{1}{\underline{|-r}} = 0$ r এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য।

সুতরাং, $n \geqq 0$ জন্য

$$\frac{1}{\underline{|-n}} = 0.$$

21·4. সূচক শ্রেণী।

(a) x এর সকল মানের জন্য

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(b) x সকল মানের জন্য এবং a > 0

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{x^r}{r!}(\log_e a)^r + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(a) এবং (b) কে **সূচক উপপাদ্য** (Exponential theorem) বলে। উচ্চতর গণিতে দেখা যাইবে যে, দক্ষিণ পার্শ্বস্থ শ্রেণীদ্বয় x-এর সকল মানের জন্যই অভিসারী। উপরোক্ত সূচক উপপাদ্যের প্রমাণ পাঠ্য-বহির্ভূত বলিয়া উহা দেওয়া হইল না। অবশ্য (a) কে স্বীকার করিয়া লইলে (b) কে নির্ণয় করা সম্ভব। যথা, (a) র উভয় পক্ষে x এর স্থলে cx বসাইলে,

$$e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(cx)^r}{r!} + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত} \quad (1)$$

এখন, $c = \log_e a$ বসাইলে,

বাম পক্ষ $= e^{x \log_e a} = e^{\log_e a^x} = a^x$. $\quad [\because N = e^{\log_e N}]$

সুতরাং, $a^x = 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \cdots + \frac{x^r}{r!}(\log_e a)^r$.

$+ \cdots \infty$ পর্যন্ত $\cdots$ (2)

অনুসিদ্ধান্ত। $c = -1$ বসাইলে (1) হইতে,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^r . x^r}{r!} + \cdots \quad \cdots (3)$$

(3) তে $x = 1$ বসাইলে,

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^r}{r!} + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত} \quad \cdots (4)$$

অতএব, $e + e^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots\right)$ $\quad \cdots$ (5)

$$e - e^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\cdots\right). \quad \cdots (6)$$

21·5. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the sum of the infinite series* $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots$ *in terms of e.*

আমরা জানি, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$ (1)

এবং $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ (2)

এখন, (2) এ x এর পরিবর্তে -1 বসাইয়া আমরা পাই

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots \qquad (3)$$

(1) হইতে (3) বিয়োগ করিলে,

$$e-e^{-1}=\frac{2}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{2}{7!}+\cdots\cdots$$

$$=2\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots=\tfrac{1}{2}(e-e^{-1}).$$

Ex. 2. *Find the value of e correct to 7 places of decimals.*

আমরা জানি, $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

এখন,

$$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2} \qquad = \cdot 5$$

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}=\frac{\cdot 5}{3} \qquad = \cdot 1666666\ 66$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}=\frac{\cdot 166666666}{4} \qquad = \cdot 0416666\ 66$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}=\frac{\cdot 041666666}{5} \qquad = \cdot 0083333\ 33$$

$$\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}=\frac{\cdot 008333333}{6} \qquad = \cdot 0013888\ 88$$

$$\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}=\frac{\cdot 001388888}{7} \qquad = \cdot 0001984\ 12$$

$$\frac{1}{8!}=\frac{1}{40320}=\frac{\cdot 000198412}{8} \qquad = \cdot 0000248\ 01$$

$$\frac{1}{9!}=\frac{1}{362880}=\frac{\cdot 000024801}{9} \qquad = \cdot 0000027\ 55$$

$$\frac{1}{10!}=\frac{1}{3628800}=\frac{\cdot 000002755}{10} = \cdot 0000002\ 75$$

$$\cdot 7182817\ 96$$

$$\therefore\ e=2\cdot 7182818.$$

Ex. 3. *Find the co-effieient of x^r in the expansion of*

$$\frac{1+ax-x^2}{e^x}.$$

এখন, $\dfrac{1+ax-x^2}{e^x}=(1+ax-x^2)e^{-x}$

$$=(1+ax-x^2)(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^r x^r}{r!}+\cdots$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{(-1)^r}{r!}+\dfrac{(-1)^{r-1}.a}{(r-1)!}-\dfrac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!}$

$$=\frac{(-1)^r}{r!}+\frac{(-1)^r.ar}{(-1).r!}-\frac{(-1)^r.r(r-1)}{r!}$$

$$=\frac{(-1)^r}{r!}\{1-ar-r(r-1)\}.$$

Ex. 4. *Show that* $1+\dfrac{3}{1!}+\dfrac{5}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\dfrac{9}{4!}+\cdots\cdots=3e.$

প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $=\dfrac{2n-1}{(n-1)!}=\dfrac{2(n-1)+1}{(n-1)!}=\dfrac{2}{(n-2)!}+\dfrac{1}{(n-1)!}.$

এখন n এর পরিবর্তে 1, 2, 3,.... প্রভৃতি বসাইয়া,

প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম পদ $=\dfrac{2}{-1!}+\dfrac{1}{0!}=0+1$

" " দ্বিতীয় পদ $=\dfrac{2}{0!}+\dfrac{1}{1!}=2+1$

" " তৃতীয় পদ $=\dfrac{2}{1!}+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{2}{1!}+\dfrac{1}{2!}$

" " চতুর্থ পদ $=\dfrac{2}{2!}+\dfrac{1}{3!}$

" " পঞ্চম পদ $=\dfrac{2}{3!}+\dfrac{1}{4!}.$

ইত্যাদি।

যোগ করিয়া আমরা পাই,

প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি

$$=2+\frac{2}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}+\cdots+1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$=2\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)+e$$

$$=2e+e=3e.$$

Ex. 5. *Prove that*

$$\left(\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\cdots\right)\left(\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\cdots\right)=1.$$

$$\left(\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\cdots\right)\left(\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1+1}{1!}+\frac{3+1}{3!}+\frac{5+1}{5!}+\frac{7+1}{7!}+\cdots\right)$$

$$\times\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{7-1}{7!}+\frac{9-1}{9!}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\cdots\right)$$

$$=e\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\cdots\right)$$

$$=e\times e^{-1}=e\times\frac{1}{e}=1.$$

Ex. 6. *Find the sum of the series*

$$\frac{1}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{13}{3!}+\frac{22}{4!}+\frac{33}{5!}+\frac{46}{6!}+\cdots \textit{ to } \infty \textit{ in terms of } e.$$

§ 11·7 এর Ex. 6 এ প্রদত্ত নিয়মানুযায়ী 1, 6, 13, 22, 33,........ শ্রেণীটির n-তম পদ $= n^2+2n-2.$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $=\dfrac{n^2+2n-2}{n!}=\dfrac{n(n+2)}{n!}-\dfrac{2}{n!}$

$$=\frac{n+2}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}.$$

এখন, n এর পরিবর্তে 1, 2, 3,.... প্রভৃতি বসাইয়া আমরা পাই,

প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম পদ $=\frac{1}{-1\,!}+\frac{3}{0\,!}-\frac{2}{1\,!}=0+3-\frac{2}{1\,!}$

" " দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{0\,!}+\frac{3}{1\,!}-\frac{2}{2\,!}=1+\frac{3}{1\,!}-\frac{2}{2\,!}$

" " তৃতীয় পদ $=\frac{1}{1\,!}+\frac{3}{2\,!}-\frac{2}{3\,!}$

" " চতুর্থ পদ $=\frac{1}{2\,!}+\frac{3}{3\,!}-\frac{2}{4\,!}$

" " পঞ্চম পদ $=\frac{1}{3\,!}+\frac{3}{4\,!}-\frac{2}{5\,!}$

.....................,

$\therefore$ যোগ করিয়া নির্ণেয় যোগফল

$$=\left(0+1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots\right)+3\left(1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}+\cdots\right)$$
$$-2\left(\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{4\,!}+\cdots\right)$$
$$=e+3e-2(e-1)=2(e+1).$$

Ex. 7. *Find the value of*

$$1+\frac{1+x}{2\,!}+\frac{1+x+x^2}{3\,!}+\frac{1+x+x^2+x^3}{4\,!}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$$

যেহেতু $t_n=n$-তম পদ

$$=\frac{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}}{n\,!}=\frac{1}{n\,!}\cdot\frac{1-x^n}{1-x}.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{1}{1-x}\left[\frac{1-x}{1\,!}+\frac{1-x^2}{2\,!}+\frac{1-x^3}{3\,!}+\cdots+\frac{1-x^r}{r!}+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[\left\{\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots\right\}-\left\{\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\cdots\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[(e-1)-(e^x-1)\right]=\frac{e-e^x}{1-x}.$$

Ex. 8. *Show that*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\frac{3+5}{1!}+\frac{3^2+5^2}{2!}+\cdots}{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots}=1+\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{\left(1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\cdots\right)+\left(1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\cdots\right)}{\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)+\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{e^5+e^3}{e+e^{-1}}=\frac{e^4(e+e^{-1})}{e+e^{-1}}=e^4$$

$$=1+\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots=\text{ডান পক্ষ ।}$$

Ex. 9. *Find the sum of the series*

$$S=t_0+t_1+t_2+\cdots \textit{ to } \infty$$

where $t_r=\left\{\frac{1^r}{1!}+\frac{2^r}{2!}+\frac{3^r}{3!}+\cdots \text{ to } \infty\right\}\frac{x^r}{r!}$

t_r, $r=0, 1, 2, 3, \cdots$ বসাইয়া S তে বসাইলে,

$$S=\left\{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots\right\}\frac{x}{1!}$$

$$+\left\{\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots\right\}\frac{x^2}{2!}+\left\{\frac{1}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{x^3}{3!}$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{3!}+\cdots\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\frac{e^{3x}}{3!}+\cdots$$

$$=1+\frac{e^x}{1!}+\frac{(e^x)^2}{2!}+\frac{(e^x)^3}{3!}+\cdots$$

$$=e^{e^x}.$$

Ex. 10. *Express in terms of e*

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.7}+\cdots$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots$

$$=\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{7-1}{7!}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)$$

$$=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$\left[\because\ 1-\frac{1}{1!}=0\right]$$

$$=e^{-1}.$$

Ex. 11. *Show that*

$$2\left\{1+\frac{(\log_e n)^2}{2!}+\frac{(\log_e n)^4}{4!}+\cdots\right\}=n+\frac{1}{n}\cdot$$

প্রদত্ত রাশি $=\left\{1+\frac{(\log_e n)}{1!}+\frac{(\log_e n)^2}{2!}+\cdots\right\}$

$$+\left\{1-\frac{(\log_e n)}{1!}+\frac{(\log_e n)^2}{2!}+\cdots\right\}$$

$$=e^{\log_e n}+e^{-\log_e n}=n+\frac{1}{n}\cdot$$

Examples XXI(A)

1. Show that

(i) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots=1.$

(ii) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\cdots$ to $\infty=e.$

(iii) $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\cdots$ to $\infty = e^{-1}$.

(iv) $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\frac{1+2+3+4}{4!}+\cdots$ to $\infty = \frac{3}{2}e$.

(v) $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\cdots$ to $\infty = \frac{1}{2}e$.

(vi) $1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\cdots$ to $\infty = 5e$.

(vii) $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\cdots = \frac{1}{2}e\,(e^2-1)$.

2. Prove the following :

(i) $\dfrac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots \text{ to } \infty}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots \text{ to } \infty} = \dfrac{e^2+1}{e^2-1}$.

(ii) $\dfrac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots \text{ to } \infty}{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots \text{ to } \infty} = \dfrac{e-1}{e+1}$.

(iii) $\dfrac{1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots \text{ to } \infty}{\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\cdots \text{ to } \infty} = 6$.

(iv) $\dfrac{1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\frac{1+2+3+4}{4!}+\cdots \text{ to } \infty}{1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots \text{ to } \infty} = \dfrac{1}{2}$.

3. Show that

$$1+\frac{2^3}{1!}\,x+\frac{3^3}{2!}x^2+\frac{4^3x^3}{3!}+\cdots \text{ to } \infty$$

$$=(x^3+16x^2+7x+1)\,e^x.$$

4. Sum to infinity the following series :

(i) $\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\frac{4}{9!}+\cdots\cdots$

(ii) $\frac{1.2}{1!}+\frac{2.3}{2!}+\frac{3.4}{3!}+\cdots\cdots$

(iii) $2+\frac{4}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{8}{3!}+\frac{10}{4!}+\cdots\cdots$

(iv) $\frac{4}{1!}+\frac{10}{2!}+\frac{18}{3!}+\frac{28}{4!}+\cdots\cdots$

(v) $\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots\cdots$

(vi) $\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots\cdots$

(vii) $\frac{1^2.2^2}{1!}+\frac{2^2.3^2}{2!}+\frac{3^2.4^2}{3!}+\cdots\cdots$

(viii) $(1+2)\log_e 2+\frac{1+2^2}{2!}(\log_e 2)^2+\frac{1+2^3}{3!}(\log_e 2)^3+\cdots.$

5. Sum to infinity the series whose nth term is $\frac{n^3}{n!}$

6. Show that $x=1+\log_e x+\frac{(\log_e x)^2}{2!}+\frac{(\log_e x)^3}{3!}+\cdots$

7. Express in terms of e

(i) $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots\right).$

(ii) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1.3}{4!}+\frac{1.3.5}{6!}+\cdots$

8. Find the coefficient of x^n in the expansion of

$$(1+x+x^2)\,e^{-x}.$$

9. Show that the coefficient of x^r in the infinite series

$$1+\frac{(a+bx)}{1!}+\frac{(a+bx)^2}{2!}+\frac{(a+bx)^3}{3!}+\cdots=e^a.\frac{b^r}{r!}.$$

10. Find the value of

$$(x^2 - y^2) + \frac{1}{2!}(x^4 - y^4) + \frac{1}{3!}(x^6 - y^6) + \cdots \text{ to } \infty.$$

11. Expand $\dfrac{e^{7x} + e^{3x}}{e^{5x}}$ in a series of ascending powers of x.

12. Expand each of the following in ascending powers of x

(i) $\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^2$. (ii) $\left(2 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2$.

13. Show that $1 + \dfrac{1}{2^2.2!} + \dfrac{1}{2^4.4!} + \dfrac{1}{2^6.6!} + \cdots = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1+e}{\sqrt{e}}$.

14. Assume the validity of expansion of e^x when x is complex in the form :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(*a*) Show that $e^{ix} = C + iS$, $i = \sqrt{-1}$

where, $C = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$, $S = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$

What is the value of $C - iS$? Hence, find the sum of the series on the right-hand sides of C and S.

(*b*) If

(i) $a = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$ (ii) $b = x + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

(iii) $c = \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^8}{8!}$,

show that $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$.

15. Expanding $(e^x - 1)^n$ show that

$$n^n - \frac{n(n-1)^n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-3)^n + \cdots = n!$$

16. Expand $\dfrac{x}{e^x - 1}$ in ascending powers of x as far as x^4.

17. If u_n is the coefficient of x^n in the expansion of $\dfrac{e^x}{1-x}$ in ascending powers of x, show that

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n\,!}.$$

Hence, find the value of u_n.

ANSWERS

4. (i) $\frac{1}{2e}$. (ii) $3e$. (iii) $4e$. (iv) $5e$. (v) $2e$. (vi) $10e$. (vii) $27e$. (viii) 4. **5.** $5e$. **7.** (i) $e+e^{-1}-2$. (ii) $\sqrt{e}$. **8.** $(-1)^n(n-1)^2/n!$. **10.** $e^{x^2}-e^{y^2}$.

11. $1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^r}{r!}+\cdots$. **12.** (i) $\frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots\right]$.

(ii) $4+\frac{2+2}{1!}x+\frac{2^2+2}{2!}x^2+\frac{2^3+2}{3!}x^3+\cdots+\frac{2^n+2}{n!}x^n+\cdots$

14. e^{-ix}, $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$. **16.** $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\cdots$.

17. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{\;}{n!}$.

Sec. B. লগারিদ্‌ম শ্রেণী

21·6. x-এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\log_e (1+x)$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

x-এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\log_e (1+x)$এর বিস্তৃতি লগারিদ্‌ম শ্রেণী নামে অভিহিত। ইহার প্রমাণ উচ্চ-মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিতের পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত। তথাপি শিক্ষার্থীদের কেবলমাত্র অবগতির জন্য ইহার প্রমাণ দেওয়া গেল। বিস্তৃতিটি শিক্ষার্থীদের মনে রাখিলেই চলিবে।

§ 21·4 অনুচ্ছেদ হইতে আমরা পাই

$$a^y = 1 + y \log_e a + \frac{y^2(\log_e a)^2}{2!} + \frac{y^3(\log_e a)^3}{3!} + \cdots$$

এখন, $a = 1 + x$ ধরিলে ;

$$(1+x)^y = 1 + y \log_e(1+x) + \frac{y^2\{\log_e(1+x)\}^2}{2!} + \frac{y^3\{\log_e(1+x)\}^3}{3!} + \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, x-এর সাংখ্যমান < 1 হইলে, y-এর **যে-কোন** মানের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্য অনুসারে,

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2)এ লিখিত উভয়শ্রেণী $(1+x)^y$ এর বিস্তৃতি বলিয়া,

$$1 + y \log_e(1+x) + \frac{y^2\{\log_e(1+x)\}^2}{2!} + \frac{y^3\{\log_e(1+x)\}^3}{3!} + \cdots\cdot$$

$$= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!} x^3 + \cdots\cdot,$$

একটি অভেদ।

সুতরাং, ইহার উভয় পক্ষের y-এর সমান ঘাতের সহগগুলি পরস্পর সমান হইবে।

বাম পক্ষে y-এর সহগ $=\log_e(1+x)$ এবং দক্ষিণ পক্ষে y-এর সহগ

$$= x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)}{3!}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{4!}\cdot x^4+\cdots$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$\therefore$ $\mathbf{\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\infty}$ **পর্যন্ত।**

এখানে xএর স্থলে $-x$ লিখিয়া আমরা পাই,

$\mathbf{\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\infty}$ **পর্যন্ত।**

x এর সাংখ্যমান $<1, (-1<x<1)$.

সুতরাং, স্মরণ রাখিতে হইবে যে, $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতিতে $-1<x<1$.

দ্রষ্টব্য। $x<1$ হইলে লগারিদ্‌ম শ্রেণী অভিসারী। কিন্তু $x=1$ হইলেও লগারিদ্‌ম শ্রেণী অভিসারী।

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$$

এই বিস্তৃতিতে $x=1$ লিখিয়া আমরা পাই,

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\cdots \qquad (1)$$

$$=1-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7})-\cdots \qquad (2)$$

আমরা (1) হইতে পাই যে, এই শ্রেণীর যে-কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি ধনাত্মক এবং (2) হইতে পাই যে, এই শ্রেণীর যে-কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ এই শ্রেণীটি অভিসারী।

অতএব, আমরা লিখিতে পারি $\mathbf{-1<x\leqslant 1}$ হইলে,

$$\mathbf{\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots}$$

এখন, এই বিস্তৃতিতে x এর স্থলে $-x$ লিখিলে মানের সীমা পরিবর্তিত হইয়া $-1\leqslant x<1$ হইবে এবং $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$

21·7. x-এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হইলে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাংখ্যমান-নির্ণয়ে লগারিদ্‌ম শ্রেণী বিশেষ কোন উপকারে আসে না। কিন্তু ইহার সাহায্যে আমরা অন্যান্য শ্রেণী নির্ণয় করিতে পারি যেগুলির সাহায্যে লগারিদ্‌ম তালিকা প্রণয়ন করা যাইতে পারে।

আমরা জানি $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

এখানে x এর পরিবর্তে $\frac{1}{n}$ লিখিয়া আমরা পাই $1+x = \frac{n+1}{n}$.

$$\therefore \quad \log_e(n+1) - \log_e n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং x এর পরিবর্তে $-\frac{1}{n}$ লিখিয়া আমরা অনুরূপভাবে পাই

$$\log_e(n-1) - \log_e n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\log_e(n+1) - \log_e(n-1) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots\right) \cdot \quad \cdots \quad (3)$$

আবার, $\log_e(1+x)$ হইতে $\log_e(1-x)$ বিয়োগ করিয়া আমরা পাই

$$\log_e(1+x) - \log_e(1-x)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right);$$

অর্থাৎ $\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \quad \cdots \quad (4)$

এখন, যদি $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$ ধরা যায়, তবে $x = \frac{m-n}{m+n}$.

$$\therefore \quad \log_e \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots\right\}.$$

এখানে $n=1$ ধরিলে,

$$\log_e m = 2\left\{\frac{m-1}{m+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5 + \cdots\right\},$$

আবার, $m=n+1$ ধরিলে, $\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2n+1}$.

$$\therefore \quad \log_e \frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$$

অর্থাৎ $\log_e (n+1)-\log_e n$

$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}. \quad \cdots \quad (5)$$

21·8. সংখ্যাসমূহের সাধারণ লগারিদ্‌ম নির্ণয়।

§ 12·4 অনুচ্ছেদ হইতে আমরা জানি কোন নির্দিষ্ট নিধানযুক্ত একটি সংখ্যার লগারিদ্‌ম দেওয়া থাকিলে আমরা সেই সংখ্যার অপর যে-কোন নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম স্থির করিতে পারি। উপরে লব্ধ লগারিদ্‌ম শ্রেণীর সাহায্যে আমরা একটি সংখ্যার e নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম নির্ণয় করিতে পারি। এই লগারিদ্‌মকে $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিয়া সাধারণ লগারিদ্‌মে অর্থাৎ 10 নিধানযুক্ত লগারিদ্‌মে পরিণত করা যায়। এই গুণক $\frac{1}{\log_e 10}$ কে সাধারণ লগারিদ্‌মের modulus বা মাপাঙ্ক বলা হয়। এই modulus সাধারণতঃ গ্রীক্ অক্ষর μ দ্বারা সূচিত করা হয় অর্থাৎ $\mu=\frac{1}{\log_e 10}$.

আমরা জানি $\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)$.

এখানে $n=3$ বসাইয়া আমরা পাই

$$\log_e 4-\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\cdots\cdots\right)$$

অর্থাৎ $\log_e 2=2(\cdot 33333333\ldots+\frac{1}{3}\times\cdot 037037037\ldots+$
$\frac{1}{5}\times\cdot 00415226\ldots+\frac{1}{7}\times\cdot 000457247\ldots+\frac{1}{9}\times\cdot 000050805\ldots$
$+\frac{1}{11}\times\cdot 000005645\ldots+\frac{1}{13}\times\cdot 000000627+$
$\frac{1}{15}\times\cdot 000000070+\ldots)$
$=2(\cdot 333333333+\cdot 012345679+\cdot 000823045+\cdot 000065321$
$+\cdot 000005645+\cdot 000000513+\cdot 000000048+\cdot 000000004)$
$=2\times\cdot 346573588=\cdot 693147176=\cdot 69314718$ (আট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

$$\therefore \quad \log_e 8 = \log_e 2^3 = 3 \log_e 2 = 3 \times \cdot 69314718$$
$$= 2\cdot 07944154.$$

আবার, $n = 9$ বসাইয়া আমরা পাই

$$\log_e 10 - \log_e 8 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\cdots\right)$$
$$= 2 \times \cdot 111571775$$
$$= \cdot 22314355.$$

$$\therefore \quad \log_e 10 = 2\cdot 07944154 + \cdot 22314355$$
$$= 2\cdot 30258509.$$

$\therefore$ সাধারণ লগারিদ্‌মের modulus বা মাপাঙ্ক

$$\mu = \frac{1}{2\cdot 30258509} = \cdot 43429448.$$

দুইটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে একটির লগারিদ্‌ম দেওয়া থাকিলে, § 21·7 এর (1) এর সাহায্যে আমরা অন্যটির লগারিদ্‌ম স্থির করিতে পারি। সুতরাং $\log_e 2$ জানা আছে বলিয়া $\log_e 2$ বাহির করিতে পারা যাইবে। এইভাবে $\log_e 5$, $\log_e 7$ প্রভৃতি বাহির করা যাইবে। অবশ্য ক্ষেত্র বিশেষে লগারিদ্‌মগুলি তাড়াতাড়ি বাহির করিবার জন্য অন্যান্য পদ্ধতিও প্রয়োগ করা হয়। Ex. 1 দেখ।

এখন কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম স্থির করিতে হইলে প্রথমে আমরা উপরে প্রদত্ত উপযোগী লগারিদ্‌ম শ্রেণীর সাহায্যে e নিধানযুক্ত নেপিরীয় লগারিদ্‌ম স্থির করি। এই প্রকারে প্রাপ্ত নেপিরীয় লগারিদ্‌মকে সাধারণ লগারিদ্‌মের modulus বা মাপাঙ্ক ·43429448 দ্বারা গুণ করিলে সংখ্যাটির 10 নিধানযুক্ত অর্থাৎ সাধারণ লগারিদ্‌ম পাওয়া যাইবে।

আমরা জানি $\log_e(n+1) - \log_e n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} - \cdots\cdots$ উভয় পক্ষে μ দ্বারা গুণ করিলে,

$$\mu \log_e(n+1) - \mu \log_e n = \frac{\mu}{n} - \frac{\mu}{2n^2} + \frac{\mu}{3n^3} - \cdots$$

বা, $\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{\mu}{2n^2} + \dfrac{\mu}{3n^3} - \cdots$ (1)

অনুরূপভাবে, $\log_{10} n - \log_{10}(n-1) = \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\mu}{2n^2} + \dfrac{\mu}{3n^3} + \cdots$ (2)

(1) এবং (2) হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, পর পর দুইটি সংখ্যার একটির লগারিদ্‌ম জানা থাকিলে অপরটির লগারিদ্‌ম স্থির করা যায় এবং এইভাবে লগারিদ্‌ম-তালিকা প্রণয়ন করা হয়।

নেপিরীয় লগারিদ্‌মকে সাধারণ লগারিদ্‌মে পরিণত করিতে আমরা সাধারণ লগারিদ্‌মের modulus বা মাপাঙ্ক ·43429448 দ্বারা ইহাকে অর্থাৎ নেপিরীয় লগারিদ্‌মকে গুণ করি।

Ex. 1. Calculate $\log_{10}3$, given $\mu = {\cdot}43429448$.

উপরে (2)-এ nএর পরিবর্তে 10 বসাইয়া আমরা পাই,

$$\log_{10}10 - \log_{10}9 = \frac{\mu}{10} + \frac{\mu}{2.10^2} + \frac{\mu}{3.10^3} + \frac{\mu}{4.10^4} + \cdots$$

বা $1 - 2\log_{10}3 = {\cdot}043429448 + {\cdot}002671472 + {\cdot}000144765 + {\cdot}000010857 + {\cdot}000000868 + {\cdot}000000072 + {\cdot}000000006 = {\cdot}045757488.$

বা $2\log_{10}3 = 1 - {\cdot}045757488 = {\cdot}954242512.$

$\therefore \log_{10}3 = {\cdot}477121256.$

21·9. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Show that* $\log_e 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots$ *to* ∞

আমরা জানি

$$\log_e 2 = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

আবার

$$\log_e 2 = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}) - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া আমরা পাই,

$$2\log_e 2 = 1 + \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{3-1}{1.2.3} + \frac{5-3}{3.4.5} + \frac{7-5}{5.6.7} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + \cdots$$

$$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots$$

Ex. 2. *If* $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, *show that*

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = \log_e (1+x).$$

$$\therefore \quad 1 + x = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

$$\therefore \quad x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\cdots$$

Ex. 3. *If* α, β *are the roots of the equation* $ax^2 + bx + c = 0$, *show that*

$$\log_e (a - bx + cx^2)$$
$$= \log_e a + (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 - \cdots$$

যেহেতু α, β $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজ,

$$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore \quad a - bx + cx^2 = a + a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta x^2 = a\{1 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2\}$$
$$= a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore \quad \log_e (a - bx + cx^2) = \log_e a\,(1+\alpha x)(1+\beta x)$$
$$= \log_e a + \log_e (1+\alpha x) + \log_e (1+\beta x)$$
$$= \log_e a + \alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \cdots + \beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - \cdots$$
$$= \log_e a + (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 + \cdots$$

Ex. 4. *Prove that* $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=-\log_e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=-\log_e\frac{n}{n+1}=\log_e\frac{n+1}{n}=\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

Ex. 5. *Show that*

$$\log_e\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)-\cdots$$

প্রদত্ত শ্রেণীটি

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log_e\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_e\left(1+\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{3}{2}+\log_e\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_e 2=\log_e\sqrt{2}.$$

Ex. 6. *Show that*

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}-\frac{1}{4.5(n+1)^4}-\cdots$$

মনে কর, $\frac{1}{n+1}=x.$

∴ প্রদত্ত শ্রেণীটি

$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2.3}-\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}-\cdots$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)x-\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\right)\frac{x^3}{3}-\left(1-\frac{4}{5}\right)\frac{x^4}{4}-\cdots$$

$$=\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)$$

$$=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)+\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

$$=\log_e(1-x)-\frac{1}{x}\log_e(1-x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\log_e(1-x)$$

$$=(1-n-1)\log_e\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

[x এর পরিবর্তে $\frac{1}{n+1}$ বসাইয়া]

$$=-n\log_e\frac{n}{n+1}=n\log_e\frac{n+1}{n}$$

$$=n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ex. 7. *If $x>1$, prove that*

$$2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots$$

$2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)$

$$=\log_e x^2-\{\log_e(x+1)+\log_e(x-1)\}=\log_e x^2-\log_e(x^2-1)$$

$$=\log_e\frac{x^2}{x^2-1}=-\log_e\frac{x^2-1}{x^2}=-\log_e\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots$$

[$x>1$ বলিয়া $\frac{1}{x^2}<1$, এইজন্য $-\log_e\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ এর বিস্তার সম্ভব]

Ex. 8. *Prove that* $\log_e \{(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}\}$

$$=2\left\{\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right\}.$$

$$\log_e\{(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}\}=\log_e(1+x)^{1+x}+\log_e(1-x)^{1-x}$$
$$=(1+x)\log_e(1+x)+(1-x)\log_e(1-x)$$
$$=\log_e(1+x)+\log_e(1-x)+x\{\log_e(1+x)-\log_e(1-x)\}$$
$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\right)\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$$
$$+x\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right\}$$
$$=-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots\right)+2x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$
$$=2\left\{x^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+x^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right\}$$
$$=2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right).$$

Ex. 9. *Sum the series* $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+\cdots\cdots$ *to* ∞ *where* $x<1$.

প্রদত্ত শ্রেণীটি

$$=x\left(1-\frac{1}{2}\right)+x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)$$
$$=-\log_e(1-x)-\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$
$$=-\log_e(1-x)-\frac{1}{x}\left(-x+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$
$$=-\log_e(1-x)+1-\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$
$$=1-\log_e(1-x)+\frac{1}{x}\log_e(1-x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\log_e(1-x)$$
$$=1+\frac{1-x}{x}\log_e(1-x).$$

Ex. 10. *If $x^2y=2x-y$ and $x<1$, show that*

$$y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

$$x^2y=2x-y, \text{ বা, } y(1+x^2)=2x \text{ বা, } \frac{1+x^2}{2x}=\frac{1}{y}.$$

এখন যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}=\frac{1+y}{1-y} \text{ বা, } \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}=\frac{1+y}{1-y}.$$

$$\therefore \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1+x}{1-x},$$ [উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া]

উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইলে,

$$\frac{1}{2}\log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e\frac{1+x}{1-x},$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2}\{\log_e(1+y)-\log_e(1-y)\}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x),$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2}\left(2y+\frac{2y^3}{3}+\frac{2y^5}{5}+\cdots\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

$$\text{অর্থাৎ, } y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

Ex. 11. *If $y=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$ and $z=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\cdots$, show that $x=\log_e\frac{1}{1-e^z}$.*

$$y=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x} \quad \cdots\ (1)$$

$$z=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\cdots=\log_e(1-y)=\log_e(1-e^{-x}).$$

$$\therefore e^z=1-e^{-x}, \text{ বা, } e^{-x}=1-e^z.$$

$$\therefore e^x=\frac{1}{1-e^z}$$

উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইলে,

$$x=\log_e\frac{1}{1-e^z}.$$

Ex. 12. *Prove that*

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{8^5}\right)+\cdots$$

$$=log_e\sqrt{3}.$$

প্রদত্ত শ্রেণী

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{8^5}\right)+\cdots$$

$$=\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^5+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\log_e\frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{5}{3}+\log_e\frac{7}{5}+\log_e\frac{9}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_e\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{7}=\frac{1}{2}\log_e 3=\log_e\sqrt{3}.$$

Ex. 13. *Show that* $\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5+\cdots$

$$=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{2x^9}{9}+\cdots$$

প্রদত্ত শ্রেণী § 21·7 এর (4) অনুসারে,

$$=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\frac{x}{1+x^2}}{1-\frac{x}{1+x^2}}=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{1}{2}\log_e\frac{1-x^3}{1+x^3}\cdot\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\log_e\frac{1-x^3}{1+x^3}+\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x^3}{1-x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\times 2\left(x^3+\frac{x^9}{3}+\frac{x^{15}}{5}+\cdots\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots-x^3-\frac{x^9}{3}-\frac{x^{15}}{5}-\cdots$$

$$=x+x^3\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+x^9\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{2x^9}{9}+\cdots$$

Ex. 14. *Prove that, when* $x<\frac{1}{3}$,

$log_e\frac{1+3x}{1-2x}=5x-\frac{5x^2}{2}+\frac{35x^3}{3}-\frac{65x^4}{4}+\cdots\cdots$: *and find the general term of the series.*

যেহেতু $x<\frac{1}{3}$, $2x$ এবং $3x$ উভয়েই <1 ; সুতরাং, আমরা $\log_e(1+3x)$ এবং $\log_e(1-2x)$ কে লগারিদ্‌ম শ্রেণীতে বিস্তার করিতে পারি।

$$\log_e\frac{1+3x}{1-2x}=\log_e(1+3x)-\log_e(1-2x)$$

$$=3x-\frac{9x^2}{2}+\frac{27x^3}{3}-\frac{81x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{r-1}3^r.x^r}{r}+\cdots$$

$$+2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}+\frac{16x^4}{4}+\cdots+\frac{2^r.x^r}{r}+\cdots$$

$$=5x-\frac{5x^2}{2}+\frac{35x^3}{3}-\frac{65x^4}{4}+\cdots+\frac{(-)^{r-1}3^r+2^r}{r}x^r+\cdots$$

এই শ্রেণীর নির্ণেয় সাধারণ পদ $=\dfrac{(-1)^{r-1}3^rx^r}{r}+\dfrac{2^rx^r}{r}$

$$=\frac{(-1)^{r-1}3^r+2^r}{r}\cdot x^r.$$

দ্রষ্টব্য। এই শ্রেণীর সহগগুলির লব 5 দ্বারা বিভাজ্য। এই শ্রেণীর সাধারণ পদের সহগের লব $(-1)^{r-1}3^r+2^r$.

এখন r অযুগ্ম হইলে, $(r-1)$ যুগ্ম এবং $(-1)^{r-1}=1$. $\therefore$ তখন লব $=3^r+2^r$. আমরা § 1·5(C) হইতে জানি r অযুগ্ম হইলে 3^r+2^r এর $(3+2)$ অর্থাৎ 5 একটি উৎপাদক হইবে। আবার, r যুগ্ম হইলে, $(r-1)$ অযুগ্ম এবং $(-1)^{r-1}=-1$. তখন সহগের লব $=-3^r+2^r=-(3^r-2^r)$.

§ 1·5 (B) হইতে আমরা জানি r যুগ্ম হইলে $3^r - 2^r$ এর $(3+2)$ অর্থাৎ 5 একটি উৎপাদক হইবে।

$\therefore$ এই শ্রেণীর যে-কোন পদের লব 5 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 15. *If x, y, z are in H. P. and in descending order of magnitude, show that*

$$\log_e y - \log_e z = \left(\frac{z}{y} - \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3}\right) + \cdots$$

যেহেতু x, y, z বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত, স্থতরাং, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ একটি সমান্তরশ্রেণী। আবার যেহেতু $x < y < z$, $\frac{y}{x} > 1$, $\frac{z}{y} > 1$.

$$\therefore \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \text{ বা, } \frac{x-y}{xy} = \frac{y-z}{yz}, \text{ বা, } \frac{x}{z} = \frac{x-y}{y-z}.$$

এখন লগারিদ্‌ম লইয়া,

$$\begin{aligned}\log_e x - \log_e z &= \log_e (x-y) - \log_e (y-z)\\ &= \log_e x\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \log_e y\left(1 - \frac{z}{y}\right)\\ &= \log_e x + \log_e\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \log_e y - \log_e\left(1 - \frac{z}{y}\right).\end{aligned}$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$\begin{aligned}\log_e y - \log_e z &= -\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y^3}{3x^3} - \cdots + \frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3} + \cdots\\ &= \left(\frac{z}{y} - \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3}\right) + \cdots\end{aligned}$$

Examples XXI (B)

Prove that :

1. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \cdots = \log_e 2.$

2. $2\log_e 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \cdots = \log_e 5.$

3. $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}\right)+\cdots=\log_e\sqrt{2}.$

4. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\ldots=\log_e\left(\frac{e}{2}\right).$

5. $\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{18^2}+\frac{1}{17^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{18^3}-\frac{1}{17^3}\right)+\cdots=0.$

6. $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots=\log_e\left(\frac{4}{e}\right).$

7. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots=\log_e x.\ (x>0)$

8. $\left(\frac{a-b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)+\cdots=\log_e\frac{a}{b}.$

9. If α, β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that

$$\log_e(ax^2+bx+c)=\log_e ax^2-\frac{1}{x}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2x^2}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{1}{3x^2}(\alpha^3+\beta^3)\cdots\cdots$$

10. If $x<1$, prove that

$$\log_e(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)=3\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right).$$

11. Show that

(a) $$\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\cdots=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{2x^9}{9}+\cdots$$

(b) $$\log_e(x+2h)+\log_e x-2\log_e(x+h)=\left(\frac{h}{x+h}\right)^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x+h}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x+h}\right)^4+\cdots\right].$$

12. Expand $\log_e(1-x+x^2)$ in a series of ascending powers of x as far as x^9.

13. Expand $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ in powers of x and find the coefficient of x^{2n} and x^{2n+1}.

14. Expand $\log_e(1+x)^{1-x}(1-x)^{1+x}$ retaining three terms; assume $x<1$.

15. If $\log_e(1-x-x^2+x^3)^{-1}$ be expanded in a series of ascending powers of x, show that the coefficient of x^n is $\frac{1}{n}$ or $\frac{3}{n}$ according as n is odd or even.

16. Sum to infinity the following series [$x<1$]

(i) $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\cdots$ to ∞

(ii) $\frac{x^2}{2.3}+\frac{2x^3}{3.4}+\frac{3x^4}{4.5}+\frac{4x^5}{5.6}+\cdots$ to ∞

(iii) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\cdots$ to ∞

(iv) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$ to ∞

17. Find the value of the following:

(i) $1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}+\cdots$

(ii) $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots$

18. Show that

$$\log_e\frac{(1+x)^{\frac{1-x}{2}}}{(1-x)^{\frac{1+x}{2}}}=x+\frac{5x^3}{2.3}+\frac{9x^5}{4.5}+\cdots+\frac{13.x^7}{6.7}+\frac{17.x^9}{8.9}+\cdots$$

19. If $\log_e \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ be expanded in a series of ascending powers of x, show that the coefficient of x^n is $-\dfrac{1}{n}$ if n be odd.

20. If $y = x + x^2 + 2x^3 + \cdots + \dfrac{(2n)\,!}{(n)\,!\,(n+1)\,!}\,x^{n+1} + \cdots$ to ∞ prove that $y^2 - y + x = 0$.

21. If $y = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots$, show that

$$e^y = 1 + x + x + x^2 + \cdots \text{ to } \infty$$

22. Given $\log_{10} 2 = \cdot 3013000$, and $\mu = \cdot 43429448$, find the numerical value of the common logarithm of 7, 11, 13.

ANSWERS

12. $-x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^8}{8} - \dfrac{2x^9}{9} + \cdots\cdots$

13. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \cdots\cdots$

coeff. of $x^{2n} = -\dfrac{1}{2n} + (-1)^{n-1}\,\dfrac{1}{n}$.

coeff. of $x^{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

14. $-3x^2 - \dfrac{7}{6}\,x^4 - \dfrac{11}{15}\,x^6 - \cdots\cdots$

16. (i) $x + (1-x)\log_e(1-x)$. (ii) $\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\log_e(1-x) - 2$.

(iii) $-\frac{1}{3}\log_e(1-x^3)$. (iv) $\dfrac{x}{1-x} + \log_e(1-x)$.

17. (i) $\log_e 3$. (ii) $\log_e\left(\dfrac{8}{e}\right)$.

22. ·8450980, 1·0413927; 1·1139434.

দ্বাবিংশ অধ্যায়

কতিপয় প্রয়োজনীয় লেখ

(Some important graphs)

22·1. পূর্ববর্তী নবম অধ্যায়ে লেখ সম্বন্ধে সাধারণ নিয়ম, লেখ অঙ্কন পদ্ধতি ও লেখ সাহায্যে বিভিন্ন অঙ্কের সমাধান দেখানো হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ লেখ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। এই সকল লেখগুলির সাধারণ ধর্ম সম্বন্ধে অভিহিত থাকা বাঞ্ছনীয়।

প্রথমে $y=x^n$ লেখটি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। আলোচনার সুবিধার জন্য লেখটি দুই পর্যায়ে ভাগ করা হইবে এবং মূলবিন্দুর নিকটবর্তী বিন্দুগুলির জন্য ইহার লেখটি স্থির করা হইবে।

I. $y=x^n$, n অযুগ্ম, অখণ্ড, ধনাত্মক পূর্ণরাশি।

n অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণবর্গ রাশি বলিয়া $n=1, 3, 5,\cdots$ প্রভৃতি হইতে পারে অর্থাৎ

(a) $y=x$ (b) $y=x^3$ (c) $y=x^5$ প্রভৃতি লেখগুলি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মূল বিন্দুর নিকটস্থ x-এর বিভিন্ন মান বসাইয়া নিম্নলিখিত তালিকাগুলি প্রস্তুত করা হইল।

(a)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

(b)

x	3	2	−1·7	−1·5	−1·2	1	−·7	−·5
y	−27	−8	−4·91	−3·38	−1·73	−1	−·34	−·13

−·2	0	·2	·5	·7	1	1·2	1·5	1·7	2	3
−·008	0	·008	·13	·34	1	1·73	3·38	4·91	8	27

(c)

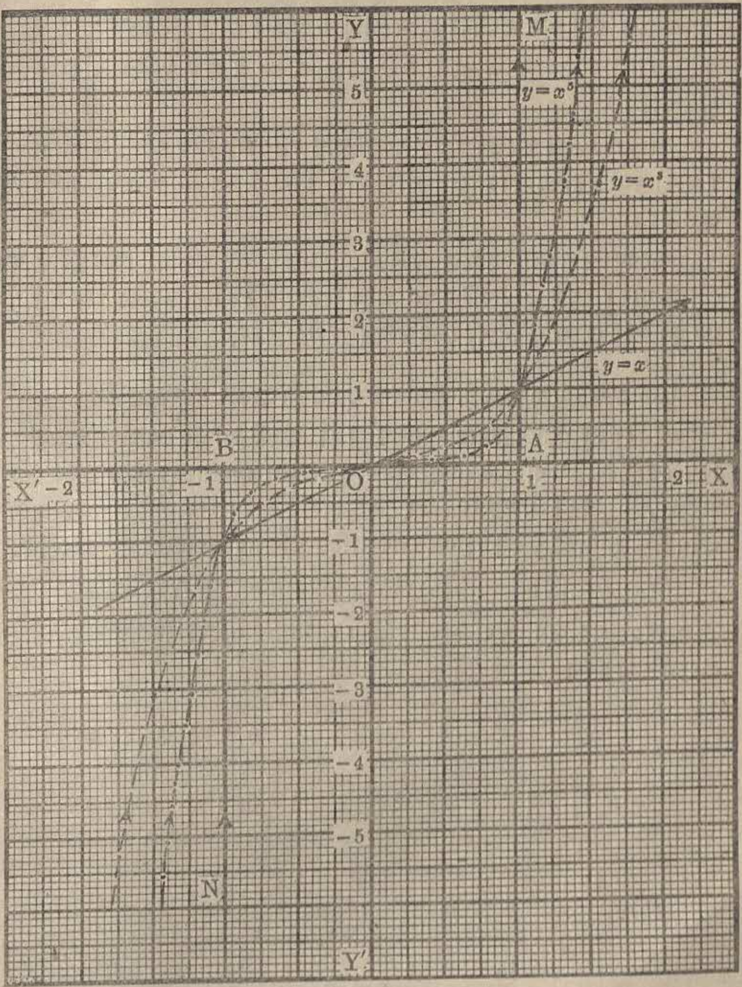
x	-2	$-1{\cdot}8$	$-1{\cdot}6$	$-1{\cdot}4$	$-1{\cdot}2$	-1	$-{\cdot}7$	$-{\cdot}5$
y	-32	$-18{\cdot}9$	$-10{\cdot}5$	$-5{\cdot}38$	$-2{\cdot}49$	-1	$-{\cdot}17$	$-{\cdot}031$

$-{\cdot}3$	0	${\cdot}3$	${\cdot}5$	${\cdot}7$	1	$1{\cdot}2$	$1{\cdot}4$	$1{\cdot}6$	$1{\cdot}8$	2
$-{\cdot}002$	0	$-{\cdot}002$	$-{\cdot}031$	$-{\cdot}17$	1	$2{\cdot}49$	$5{\cdot}38$	$10{\cdot}5$	$18{\cdot}9$	32

যেহেতু $y=x$ একটি সরলরেখা (মূলবিন্দুভেদী), সুতরাং ইহার লেখ অন্য ভাবেও নির্ণয় করা যাইত। এক্ষেত্রে $-5 \leqq x \leqq 5$ বাহির করা হইলেও সরলরেখাটিকে উভয়দিকে বর্ধিত করিতে কোন অসুবিধা নাই। কিন্তু (b)-তালিকাটি $-3 \leqq x \leqq 3$ জন্য প্রণয়ন করা হইলেও, ছক কাগজের স্বল্প পরিসরে $x=-3$, $x=3$ প্রভৃতির জন্য y বিন্দুগুলি বসানো সম্ভব হয় নাই। কিন্তু ছাত্রগণ তালিকাটি হইতে $x>1$, ও $x<-1$-এর জন্য y কত দ্রুত বর্ধিত বা হ্রাস পাইতেছে তাহা কিছু পরিমাণে উপলব্ধি করিতে পারিবে। সেইরূপ ভাবে দেখা যাইবে $-1<x<1$, বা মূলবিন্দুর খুব নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে y অত্যন্ত ধীরে ধীরে বর্ধিত হইতেছে।

(c) তালিকাটি $-2 \leqq x \leqq 2$ র জন্য প্রণয়ন করা হইয়াছে। এখানেও যেহেতু $x=1$ এর পূর্বে এবং পরে লেখ অত্যন্ত দ্রুতহারে বাড়িতেছে এবং ধীরে ধীরে কমিতেছে (অনুরূপ যুক্তি $x=-1$ র জন্যও সত্য) বলিয়া $x=1$-এর পূর্বে এবং পরে x-এর এতগুলি বিন্দুর জন্য y-এর মান স্থির করা হইয়াছে। পূর্ববর্তী নবম অধ্যায়ে x বিন্দুগুলি ভুজাক্ষের উপর সমবিরতিতে লওয়া হইয়াছিল। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে অসম বিরতিতে লওয়ার প্রয়োজন ঘটে। সামান্য অভ্যাসেই ছাত্রগণ কোন কোন ক্ষেত্রে x বিন্দুগুলি সমবিরতিতে বা অসম বিরতিতে লইতে হইবে তাহা স্থির করিতে পারিবে।

ছক কাগজে ভুজাক্ষের এক-একটি ঘরকে ·05 ধরিয়া ও কোটি-অক্ষের একটি ঘরকে ·1 ধরা হইল এবং বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া (a), (b), (c) লেখগুলি পাওয়া গেল।



চিত্র 1

উপরের চিত্র (1) হইতে নিম্নলিখিত গুণগুলি স্পষ্টই প্রতীয়মান ঃ

(i) সব লেখগুলি সবসময় (0, 0), (1, 1), এবং (−1, −1) বিন্দুগুলি দিয়া যায়।

(ii) লেখগুলি সবসময় প্রথম পাদে ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

(iii) $-\infty < x < 0$ ও $0 < x < \infty$ র জন্য y-এর মান সবসময় বৃদ্ধি পায়।

(iv) x-এর ঘাতের সূচক-সংখ্যা বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে, $0 < x < 1$ র মধ্যে y-এর বৃদ্ধির হার হ্রাস পায় এবং $1 < x < \infty$ র মধ্যে বৃদ্ধির হার দ্রুত হয়।

উপরের গুণাবলী হইতে $y=x^7$, $y=x^9$, ... প্রভৃতি লেখগুলির স্বরূপ বোঝা যায়। যদি x একটি অখণ্ড অযুগ্ম ধনরাশি হয় এবং x-এর মান যদি খুবই বড় হয় তবে সেক্ষেত্রে নির্ণেয় লেখ হইবে $NBOAM$.

II. $y=x^n$, n যুগ্ম, অখণ্ড, ধনাত্মক পূর্ণরাশি।

এই লেখটি আলোচনার প্রারম্ভে $|x|$ চিহ্নটি সামান্য আলোচিত হইবে। $|x|$ কে "মড x" বা x-এর শুদ্ধমানরূপে আখ্যা দেওয়া হয় (§ 16·4 দেখ)। অতএব, $y=|x|$ বলিতে x-এর চিহ্ন-বিবর্জিত সাংখ্যমানটুকুই ধরা হইবে। এখন $n=2, 4,$ ও $y=|x|$ এর লেখ বাহির করিবার পদ্ধতি প্রদর্শিত হইবে।

(a) $y=|x|$ (b) $y=x^2$ (c) $y=x^4$

পূর্বের ন্যায় মূলবিন্দুর নিকটস্থ x-এর মান বসাইয়া নিম্নের তালিকাগুলি প্রণয়ন করা হইল।

(a)

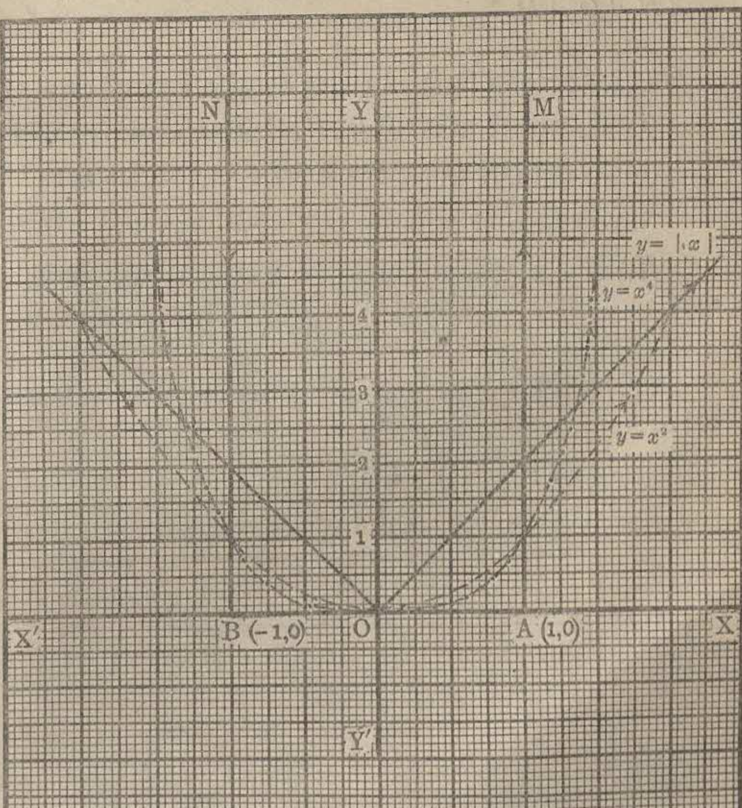
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

(b)

x	−4	−3	−2	−1·5	−1	−·7	−·5	−·2	0	·2	·5	·7	1	1·5	2	3	4
y	16	9	4	2·25	1	·49	·25	·04	0	·04	·25	·49	1	2·25	4	9	16

(c)

x	-2	$-1{\cdot}7$	$-1{\cdot}5$	$-1{\cdot}2$	-1	$-{\cdot}7$	$-{\cdot}5$	$-{\cdot}2$	0	·2	·5	·7	1	1·2	1·5	1·7	2
y	16	8·35	5·06	1·90	1	·24	·063	·002	0	·002	·063	·24	1	1·90	5·06	8·35	16



চিত্র 2

ছক কাগজের ভুজাক্ষের উপর 1 ঘরকে ·05 ধরিয়া ও কোটি-অক্ষের উপর 1 ঘরকে ·1 ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। তাহা হইলে উদ্দিষ্ট লেখগুলি পাওয়া গেল (চিত্র 2)।

উপরের চিত্র হইতে বোঝা যায় যে, $n=2, 4, \cdots$ প্রভৃতি সূচক-সংখ্যার জন্য y, $-1 < x < 1$ এর মধ্যে ধীরে ধীরে বর্ধিত হয়, কিন্তু $x > 1$ এবং $x < -1$ এর জন্য বৃদ্ধির হার দ্রুত হইয়া যায়। আবার সূচক-সংখ্যাটি বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে লেখের $-1 < x < 1$ অংশটি ক্রমশঃ ভুজাক্ষের দিকে নামিয়া আসে। সুতরাং অতি বৃহৎ সূচক-সংখ্যার জন্য ($y=x^{2m}$, m খুবই বড়) লেখটির রূপ হইবে $N\ B\ O\ A\ M$.

চিত্র হইতে লেখগুলির নিম্নলিখিত সাধারণ গুণাবলীগুলি সহজেই বোঝা যায়।

(i) সব লেখগুলিই সবসময় (0, 0), (1, 1) এবং (−1, 1) দিয়া যায়।

(ii) সব লেখগুলিই সবসময় প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হয়।

(iii) সব লেখগুলিই কোটি-অক্ষের দুই পাশেই একরূপ অর্থাৎ প্রতিসম।

(iv) $0 < x < \infty, 0 > x > -\infty$ র জন্য y-এর মান সবসময়ই বৃদ্ধি পায়।

22·2. বর্তমান অনুচ্ছেদে আরও দুইটি প্রয়োজনীয় লেখ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

(a) $y=e^x$ (b) $y=\log_e x$

লগ-তালিকা হইতে নিম্নলিখিত তালিকা দুইটি প্রস্তুত করা হইল।

(a)

x	−3·5	−3	−2·5	−2	−1·5	−1	−·5	0	·5	1	1·5	2	2·5	3	3·5
y	·03	·05	·08	·14	·22	·37	·61	1	1·65	2·72	4·48	7·4	12·1	20·1	33·1

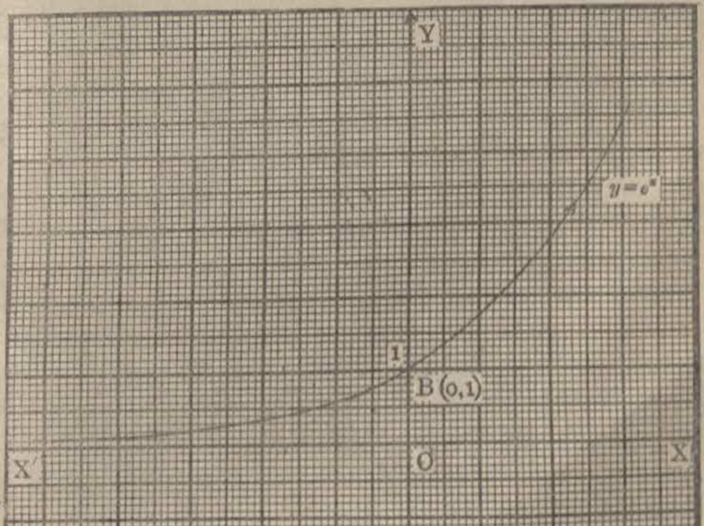
(b)

x	$\to 0$	·1	·2	·4	·6	·8	1	1·2
y	$\to -\infty$	$-2·30$	$-1·61$	$-·92$	$-·51$	$-·22$	0	·18

1·4	1·6	1·8	2	3
·34	·45	·59	·69	1·10

দ্রষ্টব্য 1. (a) তালিকাটি $y=e^x$, সুতরাং, লগ-তালিকায় সূচক অপেক্ষক e^x এর মান যদি না দেওয়া থাকে তবে $y=e^x$ কে $\log_{10} y = x \log_{10} e$ লিখিয়া লইতে হইবে। এখন x-এর বিভিন্ন মান বসাইয়া y-এর মান সাধারণ লগ-তালিকা হইতে (যেহেতু $\log_{10} e = ·4343$) নির্ণয় করা সম্ভব হইবে। এই উপায়ে $\mathbf{y=a^x}$ এর লেখও বাহির করা সম্ভব হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. (b) তালিকাটি $y=\log_e x$, সুতরাং প্রাকৃত বা নেপিরীয়



চিত্র ৪

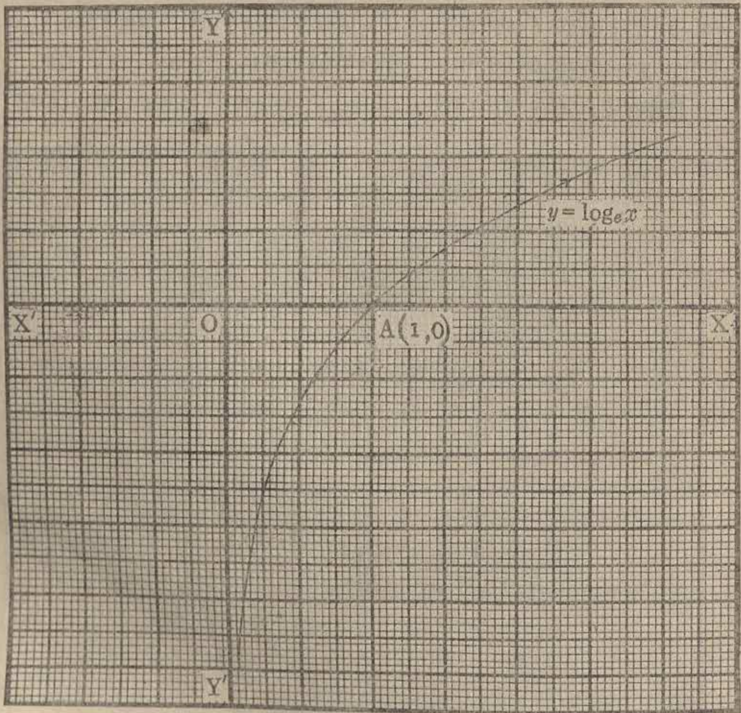
লগারিদ্‌ম যদি না পাওয়া যায় তবে $y=\log_{10}x\times\log_e 10$ লিখিয়া লইতে হইবে এবং যেহেতু $\log_e 10=2{\cdot}3026$, x-এর বিভিন্ন মান বসাইয়া সাধারণ লগারিদ্‌ম তালিকা হইতে $\log_e x$ বাহির করা যাইবে। এইভাবে $\mathbf{y=\log_a x}$ $(a>0)$ এর লেখ বাহির করা সম্ভব হইবে।

(a) ভুজাক্ষের উপর ছক কাগজের একটি ঘরকে ·05 ও কোটি-অক্ষের উপর একটি ঘরকে ·1 ধরিয়া $y=e^x$ লেখটি পাওয়া গেল।

উপরের চিত্র হইতে বোঝা যায় যে, লেখটি

(i) (0, 1) বিন্দু দিয়া যাইবে।

(ii) x-এর ধনাত্মক বিশাল মানের জন্য y-এর মান ও ধনাত্মক বিশাল হইবে।



চিত্র 4

(iii) x-এর ঋণাত্মক বিশাল মানের জন্য y-এর মান অতি সামান্য হইবে, প্রায় শূন্যের কাছে হইবে কিন্তু একেবারে শূন্য হইবে না, অর্থাৎ লেখটি ভুজাক্ষকে স্পর্শ করিবে না। এমতাবস্থায় ভুজাক্ষটিকে লেখটির **অসীম পথ** বলা হয়।

(*b*) ভুজাক্ষের উপর ও কোটি-অক্ষের উপর ছক কাগজের এক-একটি ঘরকে ·05 করিয়া $y = \log_e x$ লেখটি পাওয়া গেল।

উপরের চিত্র হইতে বোঝা যায় যে, লেখটি

(i) (1, 0) বিন্দু দিয়া যাইবে।

(ii) $0 < x < 1$ এর জন্য y-এর মান ঋণাত্মক হইবে এবং x-এর মান শূন্যের যত নিকটবর্তী হইবে y-এর মান ক্রমশঃ ঋণাত্মক ও বিশাল হইতে বিশালতর হইবে। এখানে কোটি-অক্ষ লেখটির অসীমপথ হইবে।

(iii) $1 < x < \infty$-এর জন্য y-এর মান ধনাত্মক ও x-এর মান-বৃদ্ধির সহিত y-এর মান বৃদ্ধি ঘটিবে।

Examples XXII

Draw the following graphs of (near the origin) :

1. (i) $y = 4x^2$. (ii) $y = 5x^5$.
   (iii) $y^3 = 2x$. (iv) $y^4 = 3x$.

2. (i) $y = 4x^2 + x$. (ii) $y = 1 + 2x^2 + 3x^3$.
   (iii) $y = x^2 + x^4$. (iv) $y = 2 + 3x^3 - 5x^5$.

3. (i) $y = 10^x$. (ii) $y = 2^x$.
   (iii) $3^y = x$. (iv) $5^{y+1} = 10x$.

4. (i) $y = \log_{10} x$. (ii) $y = \log_7 x$.
   (iii) $x = \log_3 y$. (iv) $x = \log_2 y$.

5. Solve graphically
   (i) $y = x^3$, $y = x^2$. (ii) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$.
   (iii) $y = 10^x$, $y = e^x$. (iv) $y = \log_{10} x$, $y = \log_e x$.

6. Read from the graph
   (*a*) where $y = 10^x$ cuts y-axis.
   (*b*) where $y = \log_{10} x$ cuts x-axis.

ANSWERS

5. (i) (0, 0), (1, 1). (ii) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. (iii) (0, 1) (iv) (1, 0).
6. (i) (0, 1). (ii) (1, 0).

পরিশিষ্ট

(A) UNIVERSITY QUESTIONS

1960

1. (*a*) If $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, find the value of $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

(*b*) Simplify : $\left[\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[9]{8}}\times\sqrt[12]{16^{-1}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

(*c*) Find the square root of $28-6\sqrt{3}$.

2. Slove the equations :

(*a*) $\left.\begin{aligned} 2x^2+3xy+y^2&=15 \\ 5x+2y&=12 \end{aligned}\right\}$ (*b*) $\left.\begin{aligned} 3x+4y&=5xy \\ 2y+3z&=2yz \\ 5z+2x&=6zx \end{aligned}\right\}$

3. (*a*) A class consists of a number of boys whose ages are in Arithmetical Progression, the common difference being 3 months. If the youngest boy is just seven years old and the sum of the ages of the boys is 153 years, find the number of boys in the class.

(*b*) If S_1, S_2, S_3 denote respectively the sum of the first n terms, first $2n$ terms and first $3n$ terms of a series in Geometrical Progression, prove that $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$.

4. (*a*) Find the cube roots of unity. If ω be an imaginary cube root of unity, prove $1+\omega+\omega^2=0$.

(*b*) The area of a circle varies as the square of its radius. If the area is $38\frac{1}{2}$ sq. ft. when the radius is 3 ft. 6 in., find the area when the radius is 4 ft. 8 in.

5. (*a*) If x be real, prove that the value of the expression $\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}$ must lie between $\frac{1}{2}$ and $\frac{7}{6}$.

(*b*) If α, β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, form the equation whose roots are $\alpha+\frac{1}{\beta}$ and $\beta+\frac{1}{\alpha}$.

6. (*a*) Find the value of the term independent of x, in the expansion of $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$.

(*b*) Apply the Binomial Theorem to find the value of $(\cdot999)^3$ to 6 places of decimals.

7. (*a*) Simplify :

$$\log_{10}\frac{384}{5}+\log_{10}\frac{81}{32}+3\log_{10}\frac{5}{3}+\log_{10}\frac{1}{9}.$$

(*b*) If x, y, z are in Geometrical Progression, prove that $\log_{10}x$, $\log_{10}y$ and $\log_{10}z$ are in Arithmetical Progression.

8. (*a*) Find the number of permutations of n different things taken r at a time, where r is less than or equal to n.

(*b*) How many numbers lying between 3000 and 4000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5 and 6 ?

1961

1. (*a*) Simplify :

$$\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}.$$

(*b*) Simplify :

$$\sqrt[ln]{\frac{x^l}{x^n}}\times\sqrt[mn]{\frac{x^n}{x^m}}\times\sqrt[lm]{\frac{x^m}{x^l}}.$$

(*c*) Find the square root of $33-4\sqrt{35}$.

2. (*a*) Solve the equations : $x+y=3,\ 2x^2-5xy+2y^2=0$.

(*b*) The length of a pendulum varies inversely as the square of the number of beats it makes per minute. If a pendulum 16 ft. long makes 27 beats per minute, find the length of the pendulum that makes 24 beats per minute.

3. (*a*) A person lends Rs. 1000 to a friend agreeing to charge no interest and also to recover the amount by monthly instalments decreasing successively by Rs. 2. In how many months will the loan be paid up, if the first instalment be Rs. 64 and its payment be made one month after the sum is lent ?

(*b*) If $1, \omega, \omega^2$ are the three cube roots of unity, prove that

$$(1+\omega-\omega^2)^3=(1-\omega+\omega^2)^3=-8.$$

4. (*a*) If p, q are the roots of the equation $2x^2-5x+2=0$, find the equation whose roots are $p+mq$ and $q+mp$.

(*b*) Find the maximum and minimum values of

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \text{ for real values of } x.$$

5. (*a*) Expand : $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6$.

(*b*) Write down the coefficient of x^{10} in $(x-2y)^{13}$.

6. (*a*) Given, $\log 2=\cdot30103$ and $\log 3=\cdot4771213$, find the logarithm of $\cdot015$.

(*b*) Prove that $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}-\log 2=0$.

7. (*a*) Find the number of combinations of n dissimilar things taken r at a time.

(*b*) How many numbers each lying between 10 and 100 can be formed with the digits 3, 4, 0, 5, 6.

1962

1. Given $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

(b) Find the square root of $17-12\sqrt{2}$.

(c) Simplify :

$$(8x^{3}\div 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}\times(64x^{3}+27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}.$$

2. (a) Solve the equations :

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\ xy=8\end{array}\right\}$$

(b) Given that the area of a circle varies as the square of its radius and that the area of a circle is 154 sq. feet, when the radius is 7 ft., find the area of a circle whose radius is 10 ft. 6 in.

3. (a) If S_1, S_2, S_3 be the sums of n terms of three Arithmetic series, the first term each being 1 and the respective common differences 1, 2, 3, prove that $S_1+S_3=2S_2$.

(b) If 1, ω, ω^2 are the three cube roots of unity, prove that

$$(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy.$$

4. (a) If α, β be the roots of the equation $ax^2+x+b=0$, show that

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{1}{ab}.$$

(b) If x is real, prove that

$$\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$$

can have no value between 5 and 9.

5. (a) Find the value of the term independent of x in $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$.

(b) Expand $(1+2x)^{-3}$ to five terms.

6. (a) Given $\log 2=\cdot30103$ and $\log 3=\cdot4771213$, find the logarithms of (i) $5\frac{1}{16}$ and (ii) $\cdot1875$.

(b) Find the value of

$$7\log\frac{15}{16}+6\log\frac{8}{3}+5\log\frac{2}{5}+\log\frac{32}{25}.$$

7. (a) Find the number of permutations of n dissimilar things taken r at a time where r is less than or equal to n.

(b) How many permutations can be made out of the letters of the word TRIANGLE ? How many of these will begin with T but end with E ?

1963

1. (*a*) Simplify : $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{8}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+\sqrt{24}}}$.

(*b*) If $a^x=m$, $a^y=n$ and $a^2=(m^y n^x)^2$, prove that $xyz=1$.

(*c*) Find the square root of $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

2. (*a*) Solve the equations :

$$x+\frac{4}{y}=1.$$
$$y+\frac{4}{x}=25.$$

(*b*) The volume of a pyramid varies jointly as its height and the area of its base, and when the area of the base is 60 square feet and the height 14 feet, the volume is 280 cubic feet. What is the area of the base of a pyramid whose volume is 390 cubic feet and whose height is 26 feet?

3. (*a*) If a, b, c, d be in G. P., show that

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

(*b*) If $1, \omega, \omega^2$ be the three cube roots of unity, prove that

(i) $1+\omega+\omega^2=0$;

(ii) $(3+3\omega+5\omega^2)^6=(3+5\omega+3\omega^2)=64$.

4. (*a*) If the roots of the equation $lx^2+nx+n=0$ be in the ratio $p:q$, prove that

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0.$$

(*b*) Find the maximum and the minimum values of $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ for real values of x.

5. (*a*) Find the coefficient of x^{32} in the expansion of $\left(x^4-\dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$.

(*b*) Find the two middle terms in expansion of $(a+x)^{2n+1}$.

6. (*a*) Write the series for e^x, hence expand $e^x+\dfrac{1}{e^x}$ in a series of ascending powers of x.

(*b*) Given $\log 2=\cdot30103$ and $\log 3=\cdot4771213$, find (i) $\log 75$ and (ii) $\log 4500$.

7. (*a*) Find the number of combinations of n dissimilar things taken r at a time.

(*b*) From a company of 15 men, how many selections of 9 men can be made, so as to (i) exclude three particular men,

(ii) to include three particular men?

1964

1. (a) Simplify : $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

(b) If $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ and $xyz=1$, prove that $a+b+c=0$.

(c) Find the square root of $8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}$.

2. (a) Solve the equations :

$$2x-3y=4$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}.$$

(b) Given that the illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance ; how much farther from a candle must a book which is now 8 inches off, be removed so as to receive just half as much light?

3. (a) A man arranges to pay off a debt of £3600 by 40 annual instalments which form an arithmetical series. When 30 of these instalments have been paid, he dies leaving a third of his debt unpaid; find the value of the first instalment.

(b) If ω is an imaginary cube root of unity, prove that

$$(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9.$$

4. (a) If α and β are the roots of the equation $ax^2-bx+c=0$, form the equation whose roots are $\alpha+\frac{\alpha^2}{\beta}$ and $\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}$.

(b) If the roots of the equation $ax^2+2bx+c=0$ be α, β and those of the equation $Ax^2+2Bx+C=0$ be $\alpha+m$ and $\beta+m$, show that

$$\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2.$$

5. (a) Find the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-x)^{-4}$,

(b) Write down the coefficient of x^{13} in the expansion of

$$(2x-3x^2)^{10}.$$

6. (a) Find the total number of permutations of n dissimilar things taken r at a time $(r < n)$ in which a particular thing always occurs.

(b) How many numbers of four digits greater than 5000 can be formed out of the digits 3, 4, 5, 6 and 7, if no digit is repeated?

7. (a) Given $\log_{10}165=2{\cdot}2175$ and $\log_{10}6974=3{\cdot}8435$, find the value of

$$\sqrt[5]{\cdot00000165}.$$

(b) Write down the exponential series for e^x; hence obtain a series for $e+\frac{1}{e}$.

...T., West Be... Library

(B) লগ ও এণ্টিলগের তালিকা

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02938	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	154	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	09991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	20951	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	26	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	171	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27416	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	41	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	6	11	17	22	28	33	39	44	50
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90848	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	42	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	27	32	37	42	48
83	91908	91960	92012	92064	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	20	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	26	31	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	28	33	38	42
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	18	23	28	32	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	42
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	31	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

মূল্য পাঁচ টাকা মাত্র
জেল বাঁধাই সওয়া ছয় টাকা